Typ I bei wiederholten Anwendung von Typ I erhalten wir eine Matrix B die auch (d) genügt, also B ist in r. Z. S. F. ∎

---

§4 Kapitel I: 7. Vorlesung 11/11/11

Beispiel 1: Sei R folgende Matrix (über $\mathbb{Q}$)

$$R = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \end{array}$$

; finde $\mathcal{L}(S)$

wobei (S) das homogene System

$$R\underline{X} = \underline{0}$$ ist.

Lösung: R ist in r. Z. S. F. Beobachte:

$r :=$ Anzahl der $\neq 0$ Zeilen $= 2 =$ Anzahl Hauptvariab.

$$(S) \quad \begin{aligned} x_2 - 3x_3 \qquad + \tfrac{1}{2}x_5 &= 0 \\ x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

also

$$x_2 = 3x_3 - \tfrac{1}{2}x_5$$
$$x_4 = \quad -2x_5$$

x_1, x_3, x_5 freie Variablen, setze:

$x_1 = a$

$x_3 = b$

$x_5 = c$

also $\mathcal{L}(S) = \{(a, 3b - \tfrac{1}{2}c, b, -2c, c) \in \mathbb{Q}^5;\ a, b, c \in \mathbb{Q}\}$

Bemerke: x_1 freie Var. setze $a = 1$, $b = c = 0$

Fortsetzung 7. Vorlesung. Freitag 11/11/11.

Fortsetzung: Homogene Systeme (§4 Kapitel I).

Korollar 1: Sei R eine $m \times n$ Matrix in r.Z.S.F und setze $r :=$ die Anzahl der $\neq 0$ Zeilen von R.

Falls $r < n$ dann hat das homogene System

$$R\underline{X} = \underline{0} \quad (*)$$

nicht triviale Lösungen.

Beweis: r = Anzahl der $\neq 0$ Zeilen in r.Z.S.F
= Anzahl der Haupteins
= Anzahl der Hauptvariablen

Also $n - r$ = Anzahl der freien Variablen.

Und $r < n \Rightarrow n - r \neq 0 \Rightarrow$
es existiert mindestens eine freie Variable x_j, wir erhalten eine nichttriviale Lösung für $(*)$ indem wir z.B setzen

$$x_j = 1.$$

$\blacksquare$

Korollar 2: Sei A eine (beliebige) $m \times n$ Matrix mit $m < n$.

Dann hat das homogene System

$$(S) \qquad A\underline{x} = \underline{0}$$

nicht triviale Lösungen.

Beweis. Sei R in r. Z. S. F zeilenäquivalent zu A. (R ist immernoch eine $m \times n$ Matrix).

Setze $r :=$ Anzahl der $\neq 0$ Zeilen von R.

Also $r \leq m < n$.

Also $\xRightarrow{\text{Kor. 1}}$

$$R\underline{x} = \underline{0} \qquad (*)$$

hat nichttriviale Lösungen, und damit auch (S). ∎

Bemerkung 1: Sei R $n \times n$ in r. Z. S. F und **ohne Nullzeilen** (also jede Zeile hat eine Haupt1). Dann ist $R = I_n$.

Beweis: r. Z. S. F $\Rightarrow$

$$1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq n$$

(wobei k_j ist die Spalte wo die Haupteins der Zeile Z_j erscheint).

Also $k_j = j \quad \forall j = 1, \dots, n.$

Also $a_{jj} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n$

Sei $i \neq j$, dann ist a_{ij} in der

k_j te Spalte $\xrightarrow{\text{r. Z. S. F}}$ $a_{ij} = 0$ (weil $a_{ij} \neq a_{jj}$). ∎

Korollar 3: Sei A $n \times n$ Matrix.
Es gilt: A zeilenäquivalent zu I_n
$\Longleftrightarrow$ $A\underline{x} = \underline{0}$ hat nur die triviale Lösung

Beweis: "$\Rightarrow$" klar weil $I_n \underline{X} = \underline{0}$ nur die triviale Lösung hat.

"$\Leftarrow$" Sei R $n \times n$ in r. Z. S. F und Zeilenäquiv. zu A. Sei $r :=$ Anzahl der $\neq 0$ Zeilen von R.
Korollar 2 $\Rightarrow$ $r \geq n$. Andererseits $r \leq n$. Also $r = n$.
Also hat R keine Nullzeilen $\Rightarrow R = I_n$ ∎

Kapitel I § 5: 7. Vorlesung Fortsetzung.

Matrix Multiplikation.

Definition 1. Seien A eine $m \times n$ und B eine $n \times p$ Matrizen über $\mathbb{K}$.

Wir definieren eine neue Matrix

$C := AB$, das **Produkt**, als die

folgende $m \times p$ Matrix:

$$C_{ij} := \sum_{r=1}^{n} A_{ir} B_{rj}$$

Also: Zeilen mal Spalten!

Beispiel 1: (1)

$$\underset{m \times n}{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} =$$

$$\underset{m \times 1.}{\begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + \cdots + a_{2n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \end{pmatrix}}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 0 + 0 & a_{12} + 0 + 0 & a_{13} + 0 + 0 \\ 0 + a_{21} + 0 & 0 + a_{22} + 0 & 0 + a_{23} + 0 \\ 0 + 0 + a_{31} & 0 + 0 + a_{32} & 0 + 0 + a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(3) <u>Allgemeiner</u>: Sei A $n \times n$; es gilt:

$$C = A I_n = I_n A = A$$

<u>Beweis</u>: wir zeigen $A I_n = A$

($I_n A$ wird analog behandelt).

$$(A I_n)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir} (I_n)_{rj} \qquad (*)$$

<u>Fall 1</u>: $r \neq j$ $\quad (I_n)_{rj} = 0$ $\quad$ in (*) einsetzen

<u>Fall 2</u> $r = j$ $\quad (I_n)_{rj} = 1$ $\quad$ bekomme eine Summe:

$$\sum_{r=1}^{n} A_{ir} (I_n)_{rj} = A_{ij} (I_n)_{jj} = A_{ij}. \qquad \square$$

(4) über $\mathbb{F}_7$:

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (1\cdot_7 5)+(2\cdot_7 0) & (1\cdot_7 6)+(2\cdot_7 1) \\ (3\cdot_7 5)+(4\cdot_7 0) & (3\cdot_7 6)+(4\cdot_7 1) \end{pmatrix}$$

$$= \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$\blacksquare$

(5) $\overbrace{\text{Die } j^{te} \text{ Spalte von } AB}^{\text{als } m\times 1 \text{ Matrix}} =$

$\underbrace{A}_{m\times n} \underbrace{[j^{te} \text{ Spalte von } B]}_{\text{als } n\times 1 \text{ Matrix}}$

und

$\underbrace{\text{Die } i^{te} \text{ Zeile von } AB}_{\text{als } 1\times p \text{ Matrix}} =$

$\underbrace{[i^{te} \text{ Zeile von } A]}_{\text{als } 1\times n \text{ Matrix}} \underbrace{B}_{n\times p}$

$\blacksquare$

Satz 1: Seien A, B, C Matrizen über K so daß die Produkte BC und $A(BC)$ definiert sind; dann sind auch die Produkte AB und $(AB)C$ definiert, und es gilt:

$$A(BC) = (AB)C$$

Beweis: Sei B $n \times p$, also hat C p Zeilen und BC n Zeilen,
also (weil $A(BC)$ definiert ist)
$\exists$ ist A eine $m \times n$ Matrix.

Also AB ist eine wohldefinierte $m \times p$ Matrix und $(AB)C$ auch wohldefiniert.
damit
ist

Wir wollen nun zeigen daß die zwei Matrizen $A(BC)$ und $(AB)C$ gleich sind. Dafür müssen wir zeigen daß alle ihre Koeffizienten gleich sind.

Wir berechnen also:

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_r A_{ir} (BC)_{rj}$$

$$= \sum_r A_{ir} \left(\sum_s B_{rs} C_{sj} \right)$$

distributivität in K

$$\overset{\downarrow}{=} \sum_r \sum_s A_{ir} B_{rs} C_{sj}$$

Kommutativität und Assoziativität in K

$$\overset{\downarrow}{=} \sum_s \sum_r A_{ir} B_{rs} C_{sj}$$

$$= \sum_s \left(\sum_r A_{ir} B_{rs} \right) C_{sj}$$

$$= \sum_s (AB)_{is} C_{sj}$$

$$= [(AB)C]_{ij} . \qquad \blacksquare$$

Bezeichnung: A $m \times m$ und $k \in \mathbb{N}$

$$A^k := \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ Mal}} \quad \text{(wohldefiniert)}.$$

Ende §5 Kapitel I.