8. Vorlesung 15/11/11
(Fortsetzung)

Kapitel I. § 6 Elementare Matrizen.

Notation: Sei e eine elementare Zeilenumformung auf eine $m \times n$ Matrix A.
Bezeichen mit $e(A)$ die $m \times n$ Matrix die wir somit erhalten.

Untersuchung:

Typ 1 Umtauschen von Zeilen Z_r und Z_s von A:

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r, i \neq s \\ A_{sj} & \text{für } i = r \\ A_{rj} & \text{für } i = s \end{cases}$$

Typ 2 Multipl. Z_r durch Skalar $c \neq 0$, $c \in K$:

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ cA_{rj} & \text{für } i = r \end{cases}$$

Typ 3. ersetzen von Z_r durch $Z_r + c Z_s$
$c \in K$; $r \neq s$

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ A_{rj} + cA_{sj} & \text{für } i = r. \end{cases}$$

Definition 1:
Eine $m \times m$ Matrix ist elementar falls sie aus der Form $e(I_m)$.

Beispiel 1. die 2×2 elem. Matrizen über K:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Typ 1}$$

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} ; \quad c \neq 0, \; c \in K \qquad \text{Typ 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} ; \quad c \in F \qquad \text{Typ 3.}$$

Satz 1: Sei e eine elem. Z. Umf., und E die elementare Matrix

$$E := e(I_m).$$

Sei A eine $m \times n$ Matrix über K.
Es gilt:

$$e(A) = EA.$$

Beweis: $e \in$ Typ 1: $\quad r \neq s$

(i) $E_{ik} = \delta_{ik}$ für $i \neq r$; $i \neq s$

und

(ii) $E_{rk} = \delta_{sk}$ für $i = r$

und

(iii) $E_{sk} = \delta_{rk}$ für $i = s$

Nun:

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik} A_{kj}$$

Fall (i): $i \neq r$, $i \neq s$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} A_{kj}$$

$$= \delta_{ii} A_{ij} = A_{ij}$$

Fall (ii): $i = r$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{rk} A_{kj}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \delta_{sk} A_{kj} = \delta_{ss} A_{sj} = A_{sj}$$

Fall (iii): $i = s$

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{sk} A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{rk} A_{kj}$$

$$= \delta_{rr} A_{rj} = A_{rj} \quad \blacksquare$$

e ist von Typ 2: ÜA.

e ist von Typ 3: $\boxed{r \neq s}$

$$E_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik} & \text{für } i \neq r \\ \delta_{rk} + c\,\delta_{sk} & \text{für } i = r \end{cases}$$

Also: $$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik} A_{kj}$$

Fall 1: $\boxed{i \neq r}$

dann $$\sum_{k=1}^{m} E_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} A_{kj}$$

$$= \delta_{ii} A_{ij} = A_{ij}$$

Fall 2: $\boxed{i = r}$

dann
$$\sum_{k=1}^{m} E_{rk} A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} (\delta_{rk} + c\,\delta_{sk}) A_{kj}$$

Hier bekommen wir nur zwei Terme (die möglich Ungleich Null sind), und zwar nur für $k=r$ oder $k=s$:

$\boxed{k=r} \Rightarrow$ also $k \neq s$ so $c\,\delta_{sk} = 0$ so

$$(\delta_{rk} + c\,\delta_{sk}) A_{kj} = (\delta_{rr} + 0) A_{rj} = A_{rj}$$

$\boxed{k=s} \Rightarrow$ also $k \neq r$ also $\delta_{rk} = 0$ also

$$(\delta_{rk} + c\,\delta_{sk}) A_{kj} = (0 + c\,\delta_{ss}) A_{sj} = c A_{sj} \quad \blacksquare$$

Also
$$\sum E_{rk} A_{kj} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ A_{rj} + c A_{sj} & \text{für } i = r. \end{cases} \quad \blacksquare$$