- Lineare Algebra - Kuhlmann.

9. Vorlesung. 18/11/11

Korollar 1 Seien A und B $m \times n$ Matrizen über K.
Es gilt:
B ~~ist~~ zu A zeilenäquivalent gdw
$B = PA$
wobei P Produkt von $m \times m$ elem. Matrizen

Beweis "$\Leftarrow$" Seit $P = E_\ell \dots E_2 E_1$

wobei E_t elementare $m \times m$ Matrix.

Also $E_1 A$ ist zeilenäquiv. zu A

und $E_2(E_1 A)$ " " " $E_1 A$

Also $E_2 E_1 A$ " " " A

So weiter fortsetzen:

$\vdots$

$E_\ell \dots E_1 A$ " " " A

i.e. B " " " A.

"$\Rightarrow$" Sei B zeilenäquiv. zu A und $e_1, \dots, e_\ell$ die elementare Zeilenumformungen mit

$$A \xrightarrow[e_1]{} \cdots \xrightarrow[e_l]{} B .$$

Also $\quad E_l \cdots E_2 E_1 A = B$

wobei $\quad E_t$ die elementare Matrix

$e_t(I_m)$ ist, für $t = 1, \ldots, l$

Setze $\quad P := E_l \cdots E_2 E_1 .$ $\boxed{}$

<u>Definition 1</u> Eine $n \times n$ <u>Matrix A ist invertierbar</u> falls es eine $n \times n$ Matrix B gibt so daß:

$$AB = I_n \quad \text{und} \quad BA = I_n .$$

Im diesem Fall heißt B <u>eine Inverse von A</u>.

<u>Proposition 1</u>. Sei A invertierbar. Dann gibt es eine eindeutige Inverse

<u>Beweis</u> Seien B_1, B_2 beide Inverse von A. Es gilt

$$AB_1 = I_n = AB_2$$

also $\quad B_2(AB_1) = B_2(AB_2) \qquad$ (Multiplik.)

also $\quad (B_2 A) B_1 = (B_2 A) B_2$

also $\quad I_n B_1 = I_n B_2$, i.e. $B_1 = B_2$. $\boxed{}$

Notation: Wir bezeichnen mit A^{-1} die eindeutige Inverse der invertierbaren Matrix A.

Proposition 2 Seien A, B $n \times n$ über K. Es gilt:

(i) Wenn A invertierbar, so auch A^{-1}, und

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

(ii) Wenn A und B beide invertierbar, so auch AB, und

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Beweis. (i) Wir berechnen

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I_n,$$ also ist A die Inverse von A^{-1}.

(ii) Wir berechnen

$$B^{-1} A^{-1} (AB) = B^{-1} (A^{-1} A) B = B^{-1} I_n B$$

$$= B^{-1} B = I_n$$

Analog $(AB)(B^{-1} A^{-1}) = I_n$. ∎

Korollar 2. Seien $A_1, \dots, A_\ell$ $n \times n$ invertierbare Matrizen, dann ist das Produkt $A_1 \cdots A_\ell$ auch invertierbar und es gilt

$$(A_1 \cdots A_\ell)^{-1} = A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1} \qquad (*)$$

Beweis: Induktion nach ℓ. $\ell = 1$ ✓

Induktionsannahme: $(*)$ gilt für ℓ

Induktionsschritt: $(*)$ gilt für $\ell+1$:

Beweis:

$$(A_1 \cdots A_\ell A_{\ell+1})^{-1} =$$

$$[(A_1 \cdots A_\ell) A_{\ell+1}]^{-1} \overset{\text{Prop. 2 (ii)}}{=}$$

$$A_{\ell+1}^{-1} (A_1 \cdots A_\ell)^{-1} \overset{\text{Induktionsannahme}}{=}$$

$$A_{\ell+1}^{-1} (A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1}) \overset{\text{Assoziativität.}}{=}$$

$$A_{\ell+1}^{-1} A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

■

~~Korollar 3~~

Proposition 3. Elementare Matrizen sind invertierbar

Beweis. Sei $E = e(I_n)$ eine elementare Matrix

Sei e^* die umgekehrte Zeilenumformung

(auf die Zeilen von I_n).

und $E^* := e^*(I_n)$.

Wir berechnen:

$$E^* E = e^*(I_n)\, e(I_n) = I_n \text{ und}$$

$$E^* E = EE^* = I_n.$$

D. h. $E^* = E^{-1}$. $\blacksquare$

Beispiel 1 2×2 elementare Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix}$$

$c \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}.$$

Satz 1. Sei A $n \times n$ Matrix. Sind äquivalent:

(i) A ist invertierbar

(ii) $A\underline{x} = \underline{b}$ ist konsistent für jede $n \times 1$ Spaltenmatrix $\underline{b}$

(iii) $A\underline{x} = \underline{0}$ hat nur die triviale Lösung

Beziehung zwischen homogene und allgemeine (quadratische) Systeme.

(iv) A ist Zeilenäquivalent zu I_n

(v) A ist Produkt von elementaren Matrizen.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Setze $\underline{x} := A^{-1}\underline{b}$. Es gilt

$$A\underline{x} = A(A^{-1}\underline{b}) = (AA^{-1})\underline{b} = I_n\underline{b} = \underline{b}.$$

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) schon bewiesen (Korollar 3 7. Vorlesung

i.e.

(Korollar 7.3)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Wenn $A\underline{x} = \underline{0}$ nichttriviale Lösungen hätte dann ist die r. Z. S. F R von A nicht I_n, also muss eine Nullzeile haben.

Also ist zum Beispiel das System

$$(S) \quad R\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{inkonsistent.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} - & - & - & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nun $\boxed{R = PA}$ wobei P Produkt von elementaren Matrizen (Korollar 1), also ist P invertierbar (Korollar 2 und Prop. 3).

Also multipliziere (S) durch P^{-1}:

$$(S) \quad (PA)\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist inkonsistent also}$$

$$P^{-1}(PA)\underline{x} = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ist inkonsistent}$$

also
$$A\underline{x} = P^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{inkonsistent}$$

$$\underbrace{\underset{n\times n}{P^{-1}}\ \underset{n\times 1}{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}}}_{n\times 1}$$

setze $\underline{b} = P^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$; wir bekommen

$A\underline{x} = \underline{b}$ inkonsistent. Widerspruch.

(iv) $\Rightarrow$ (v) $A = P' I_n = P'$

wobei P' Produkt von elem. Matrizen.

(Korollar 1).

(v) $\Rightarrow$ (i) Folgt aus Korollar 2 und Prop 3. ∎

<u>Korollar 3</u> Seien A und B $m\times n$ Matrizen.

B ist zeilenäquivalent zu A gdw

$B = PA$ mit P invertierbare $m\times m$ Matrix. ∎
