– Lineare Algebra II –

– Kuhlmann –

7. Vorlesung am 07.05.2012

---

§ Die symmetrische Gruppen S_n (Fortsetzung).

Definition und Notation: Betrachte die folgende Untermenge von S_n:

$A_n := \{ \sigma \mid \sigma \text{ ist gerade} \}$.

Es gilt: A_n ist eine Untergruppe von S_n

[(1) die Einheit ist gerade, $\sigma = \tau_1 \dots \tau_m$
also $(1) \in A_n$ $\quad \gamma = \gamma_1 \dots \gamma_n$

$S_n \ni \tau_i, \gamma_j$ Transpositionen, m, n gerade
$1 \leq i \leq m$ $\Rightarrow \sigma\gamma = \tau_1 \dots \tau_m \gamma_1 \dots \gamma_n$;
$1 \leq j \leq n$

also A_n abgeschlossen unter Produkt, auch
$\sigma^{-1} = \tau_m^{-1} \dots \tau_1^{-1}$, also A_n abgeschlossen
unter Inversen.]

A_n ist die alternierende Gruppe.

Bem: $S_n = A_n \dot\cup \text{Ungerade} = A_n \dot\cup \mathcal{U}$
wobei
$\mathcal{U} := \text{Ungerade} := \{ \sigma ; \sigma \text{ ist ungerade} \}$ ist
die Untermenge der ungeraden Permutationen.

Die Abbildung

$$A_n \longrightarrow \mathcal{U}$$
$$\sigma \longmapsto (12)\sigma$$

ist bijektiv. Wir folgern:

$$|A_n| = \frac{n!}{2}$$ ∎

---

§ Multilineare Formen.

Definition: Sei K Körper, U, V K-VR

$$\beta : U \times V \longrightarrow K$$
$$(x, y) \longmapsto \beta(x, y)$$

ist eine bilineare Funktionale falls gelten:
(oder bilineare Form)

(1) $\beta(c_1 x_1 + c_2 x_2, y) = c_1 \beta(x_1, y) + c_2 \beta(x_2, y)$

und

(2) $\beta(x, d_1 y_1 + d_2 y_2) = d_1 \beta(x, y_1) + d_2 \beta(x, y_2)$

für alle $x, x_1, x_2 \in U$, $y, y_1, y_2 \in V$, $c_1, c_2, d_1, d_2 \in K$.

Bsp.

$$V \times V^* \longrightarrow K$$
$$(x, f) \longmapsto [x, f]$$ wobei

$[x, f] := f(x)$ für $x \in V$ und $f \in V^*$.

Die definierende Eigenschaften in V^* liefern
und Verknüpfungen

(1) $[c_1 x_1 + c_2 x_2, f] = c_1 [x_1, f] + c_2 [x_2, f]$

und

(2) $[x, d_1 f_1 + d_2 f_2] = d_1 [x, f_1] + d_2 [x, f_2]$. ■

Notation: $\mathcal{L}^{(2)}(U \times V; K) :=$ die Menge der bilinearen Formen auf $U \times V$.

Sie ist ein K-Vektorraum (mit den Verknüpfungen

$$(c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2)(x, y) := c_1 \beta_1 (x, y) + c_2 \beta_2 (x, y)$$

wie üblich).

Definition $m \in \mathbb{N}$; $V_1, \ldots, V_m$ K-VR

Eine <u>m-lineare Funktionale</u> (Form) (oder multilineare Funktionale vom Grad m) auf $V_1 \times \ldots \times V_m$ ist eine Abbildung

$\mu : V_1 \times \ldots \times V_m \longrightarrow K$ so daß für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$

gilt:

$$\left.\begin{aligned} &\mu(\alpha_1, \ldots, c\alpha_i + \gamma_i, \ldots, \alpha_m) = \\ &c\,\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m) + \\ &\mu(\alpha_1, \ldots, \gamma_i, \ldots, \alpha_m) \end{aligned}\right\} \text{ für } \alpha_i, \gamma_i \in V_i,\ c \in K.$$

Notation $\mathcal{L}^{(m)}(V_1 \times \dots \times V_m; K) :=$ K-VR der m-linearen Formen.

Bem. μ multilinear und $\exists i$ mit $\alpha_i = 0 \Rightarrow$

$\mu(\alpha_1, \dots, 0, \dots, \alpha_m) = 0.$

§ Alternierende multilineare Formen auf K^n.

Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$, $V = K^n$

Eine n-lineare Form

$$\delta : \underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_{n \text{ mal}} \longrightarrow K$$

ist alternierend falls:

$\exists\, i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $z_i = z_j$
$i \neq j$

impliziert daß:

$\delta(z_1, \dots, z_n) = 0 \quad$ (für $z_1, \dots, z_n \in K^n$).

Konvention: δ wird auch als Abbildung auf $K^{n \times n} = \mathrm{Mat}_{n \times n}(K)$ aufgefasst;

nämlich $\delta(A) = \delta(z_1, \dots, z_n)$ wobei

$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \hline \text{- - - -} \\ \hline z_n \end{pmatrix}$; i.e z_i ist die i^{te}-Zeile

der $n \times n$ Matrix A.

Lemma 1. Sei δ alternierend. Es gelten:

(i) $z_1, \dots, z_n$ linear abhängig $\Rightarrow$

$\delta(z_1, \dots, z_n) = 0$

(ii) $\delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) =$

$-\delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n)$

(für $i \neq j$).

Allgemeiner: $\delta(z_{\pi(1)}, \dots, z_{\pi(n)}) = \mathrm{Sign}(\pi)\, \delta(z_1, \dots, z_n)$; $\pi \in S_n$

Beweis: (i) OE nehmen wir an: $z_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i$

für geeignete $c_1, \dots, c_{n-1} \in K$.

Wir berechnen:

$$\delta(z_1, \dots, z_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i\, \delta(z_1, \dots, z_{n-1}, z_i)$$

$$= 0$$

(ii) Wir berechnen:

$0 = \delta(z_1, \dots, z_i + z_j, \dots, z_j + z_i, \dots, z_n) =$

$= \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j + z_i, \dots, z_n) +$

$\delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_j + z_i, \dots, z_n) =$

$\delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) +$

$0 = \quad \delta(z_1, \dots, \underline{z_i}, \dots, \underline{z_i}, \dots, z_n) +$

$0 = \quad \delta(z_1, \dots, \underline{z_j}, \dots, \underline{z_j}, \dots, z_n) +$

$\delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n)$

Also:

$$0 = \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) + \delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n)$$

wie behauptet. $\blacksquare$

Bem.: (1) Falls $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ gilt auch die Umkehrung:

δ erfüllt (ii) impliziert δ alternierend:

~~nehme $z_i = z_j$ ~~für~~ $i \neq j$~~

also $\delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_i, \dots, z_n) = -\delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_i, \dots, z_n)$ $\Big\}$ $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ $\forall a \in K$; $a = -a \Rightarrow a = 0$

(2) $\delta((a,b),(c,d)) := ac + bd$ auf $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ ist Gegenbsp.
