– Lineare Algebra II –

– Kuhlmann –

8. Vorlesung
am 11. 05. 2012.

Lemma 2. Seien $\delta : K^n \times \dots \times K^n \longrightarrow K$ alt. n-lin. Form und $A \in M_{n \times n}(K)$. Es gelten:

(i) $\delta(e(A)) = \delta(A)$ $\quad e$ Zeilenumformung von Typ 3

(ii) $\delta(e(A)) = -\delta(A)$ $\quad e$ von Typ 1, $i \neq j$

(iii) $\delta(e(A)) = c\,\delta(A)$ $\quad e$ von Typ 2; $c \in K$; $c \neq 0$.

allgemeiner

(iv) $\delta(cA) = c^n \delta(A)$ $\quad c \in K$; c

Beweis: (i) $\delta(z_1 + cz_2, z_2, \dots, z_n) = \delta(z_1, z_2, \dots, z_n) + c\,\underbrace{\delta(z_2, z_2, \dots, z_n)}_{= 0}$.

(ii) folgt aus Lemma 1. (7. Vorlesung).

(iii) folgt aus n-linearität

(iv) $\delta(cz_1, \dots, cz_n) = c\,\delta(z_1, cz_2, \dots, cz_n) =$
$c^2 \delta(z_1, z_2, cz_3, \dots, cz_n) = \dots$
$c^n \delta(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)$. ∎

Lemma 3 $\delta(A) = \Delta_A \, \delta(\text{r.Z.S.F}(A))$

wobei $\Delta_A \in K$; $\Delta_A \neq 0$; Δ_A hängt nur von

$A \in M_{n\times n}(K)$ ab.

Beweis: Wiederholte Anwendung von Lemma 2
(Δ_A ist ein Produkt aus der Gestalt

$(-1)^\ell \, c_1 \dots c_k$ für geeignete $\ell, k \in \mathbb{N}_0$,

und $c_1, \dots, c_k \in K^\times$). ∎

Bem: Für $A \in M_{n\times n}(K)$: gilt die folgende Dichotomie (siehe LA I)

$$\begin{cases} \underline{\text{Fall(1)}} & \text{r.Z.S.F}(A) \text{ hat eine Nullzeile} \\ & \text{oder} \\ \underline{\text{Fall(2)}} & \text{r.Z.S.F.}(A) = I_n \end{cases}$$

also erhalten wir hier auch eine Dichotomie:

$$\begin{cases} \underline{\text{Fall(1)}} & \delta(A) = \Delta_A \cdot 0 = 0 \\ \underline{\text{Fall(2)}} & \delta(A) = \Delta_A \, \delta(I_n) \end{cases}$$

Kor 1. $\delta \neq 0$ gdw $\delta(I_n) \neq 0$

Bew. "$\Leftarrow$" klar

"$\Rightarrow$" $\delta(I_n) = 0 \implies \delta(A) = 0$ in beiden Fällen (1) und (2). ∎

Kor 2. $\delta(A) \neq 0$ gdw A invertierbar.

Bew. A invertiebar $\Leftrightarrow$ r. Z. S. F $(A) = I_n$. ∎

Kor 3 Seien δ_1, δ_2 n-lineare alt. Formen auf K^n.

Es gilt $\delta_1 = \delta_2$ gdw $\delta_1(e_1, \dots, e_n) = \delta_2(e_1, \dots, e_n)$

(wobei wie immer $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ die Standard Basis ist). ∎

Definition und Notation. $\mathbb{A} := \mathrm{alt}^{(n)}(K^n) :=$ der K-VR der n-linearen alt. Formen auf K^n.

Es ist ein Unterraum von $\mathcal{L}^{(n)}(K^n \times \dots \times K^n; K)$.

Kor 4. $\mathrm{Dim}\left(\mathrm{alt}^{(n)}(K^n)\right) \leq 1$.

Beweis. Sei $\delta_1 \neq 0$ fixiert. Sei $\delta_2 \in \mathbb{A}$.
Es gilt

$$(*) \quad \delta_2(A) = \Delta_A \, \delta_2(I_n) = \Delta_A \left(\frac{\delta_2(I_n)}{\delta_1(I_n)}\right) \delta_1(I_n).$$

Setze $d := \dfrac{\delta_2(I_n)}{\delta_1(I_n)} \in K$.

Aus $(*)$ folgt:

$$\delta_2(A) = d \, \underbrace{\Delta_A \, \delta_1(I_n)} = d \, \delta_1(A)$$

für $A \in M_{n \times n}(K)$. Also ist $\delta_2 = d\,\delta_1$. ∎

Wir werden nun zeigen: es existiert ein $\delta \in \mathbb{A}$ mit $\delta(I_n) = 1$
[illegible] δ ist notwendig eindeutig.

<u>Definition</u>: Die <u>Determinante</u> (Funktionale) ist die eindeutige n-lineare alt. Form auf K^n wofür

$$\det(I_n) = 1 \quad \text{gilt.}$$

Die Formel Berechnung:

Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ $\quad A \in M_{n \times n}(K)$, $\delta \in A$.

$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

Wir schreiben $z_i = \sum_{j_i = 1}^{n} a_{i j_i} e_{j_i}$ in der Standard Basis.

Wir berechnen:

$$\delta(A) = \delta\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1 j_1} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{n j_n} e_{j_n} \right) \overset{n\text{-lin}}{=} \quad (*)$$

$$\sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^{n} a_{1 j_1} \cdots a_{n j_n} \, \delta(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) \quad (**)$$

Betrachte die Abbildung

$$\{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$$
$$i \longmapsto j_i.$$

Falls <u>nicht</u> injektiv dann gibt es eine Wiederholung in $(j_1, \ldots, j_n)$ und damit ist $\delta(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = 0$

Falls injektiv dann ist sie eine Permutation $\pi \in S_n$

und damit ist $\delta(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = \operatorname{sign}(\pi)\, \delta(e_1, \ldots, e_n)$

also können wir nun $(**)$ umschreiben

$$(**) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}\, \delta(e_1, \ldots, e_n)$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}\, \delta(I_n)$$

$$(***) = \delta(I_n) \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}.$$

Wir sehen also daß $\delta(I_n) = 1$ liefert eine Formel für δ wie in $(***)$:

Satz:
Definiere für $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$

$$\delta(A) := \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} \qquad (\det)$$

δ ist eine n-lin alt. Form und erfüllt $\delta(I_n) = 1$.

Beweis:
- Sei $0 \neq A$ diagonal, also $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.
Das heißt: die einzige Permutation die einen Beitrag $\neq 0$ bringt ist diejenige ~~wo~~ für $i = \pi(i)$ $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, i.e. $\pi = (1)$ die Identität $\in S_n$.
Es bleibt also nur ein Produkt in $(\det)$ übrig;

nämlich $a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = \delta(A)$; Insbesondere $\delta(I_n) = 1$.

- n-linear? Berechne

$$\operatorname{sign}(\pi)\left[(a_{1\pi(1)} + d\, a'_{1\pi(1)})\, a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}\right] =$$

$$\operatorname{sign}(\pi)\left[(a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}) + d\,(a'_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)})\right]$$

usw... ÜA.

- alternierend? Sei $Z_1 = Z_2$ i.e $a_{1j} = a_{2j}\ \forall 1 \le j \le n$

i.e $a_{1\pi(j)} = a_{2\pi(j)}\ \forall\ \pi \in S_n$, $1 \le j \le n$

Berechne (mit $S_n = A_n \dot\cup A_n(12)$)

$$\delta(A) = \sum_{\pi \in A_n \dot\cup A_n(12)} \operatorname{sign}(\pi)\, a_{1\pi(1)} a_{1\pi(2)} a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{\pi \in A_n} \overset{1}{\overset{\shortparallel}{\operatorname{sign}(\pi)}}\, a_{1\pi(1)} a_{1\pi(2)} a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}\right)}_{\mathrm{I}} +$$

$$\underbrace{\sum_{\pi \in A_n} \left[\overset{(-1)}{\overset{\shortparallel}{\operatorname{sign}(\pi(12))}}\right] a_{1\pi(12)(1)} a_{1\pi(12)(2)} a_{3\pi(12)(3)} \cdots a_{n\pi(12)(n)}}_{\mathrm{II}}$$

In der Summe II bekommen wir:

$$\sum_{\pi \in A_n} [\underbrace{-\operatorname{sign}(\pi)}_{(-1)}] \, a_{1\pi(2)} \, a_{1\pi(1)} \, a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

$$\underbrace{= \sum_{\pi \in A_n} [\underbrace{-\operatorname{sign}(\pi)}_{(-1)}] \, a_{1\pi(1)} \, a_{1\pi(2)} \, a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}}_{\text{II}}$$

Wir sehen also die Termen kürzen sich ab, ie in I bzw in II: $a_{1\pi(1)} a_{1\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$ und $-a_{1\pi(1)} a_{1\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$

i.e. I + II = 0 $\blacksquare$

Kor 5: $\operatorname{Dim}(\mathbb{A}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
