

Universität Konstanz

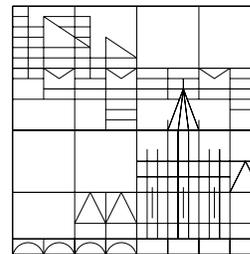
Fachbereich

Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Dr. Lorna Gregory

Katharina Dupont



Lineare Algebra II

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1

(a) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -7 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie $P \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ so dass $P^{-1}AP$ in Jordan Normalform ist und geben Sie die Jordan Normalform von A an.

(b) Berechnen Sie die Jordan Normalform der folgenden komplexwertigen Matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10.2

(a) Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. Sei $\phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$\phi(x, y) := (\overline{y_1}, \overline{y_2}) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$. Zeigen Sie, dass (1) und (2) (aus der Definition des inneren Produktes im Skript) genau dann gilt, wenn $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ und $\gamma = \overline{\beta}$.

- (b) Zeigen Sie, dass (3) (aus der Definition des inneren Produktes), $\alpha > 0$ und $\delta > 0$ impliziert.
- (c) Zeigen Sie, dass eine Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \delta \end{pmatrix}$$

entweder zwei verschiedene Eigenwerte hat, oder von der Form $\lambda \cdot I$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und Einheitsmatrix I , ist.

- (d) Zeigen Sie, dass ϕ (aus Teil (a)) genau dann ein inneres Produkt ist, wenn $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \delta > 0$, $\gamma = \bar{\beta}$ und $\alpha\delta - \beta\bar{\beta} > 0$.

Hinweis: Betrachten Sie die Eigenwerte von

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie zunächst, dass die Eigenwerte reell sind, wenn ϕ ein inneres Produkt auf \mathbb{C}^2 ist. Sind die Eigenwerte positiv oder negativ?

Aufgabe 10.3

- (a) Sei $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $\|x\|_1$ eine Norm auf \mathbb{R}^2 ist.
- (b) Sei $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}$ für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $\|x\|_\infty$ eine Norm auf \mathbb{R}^2 ist.

Aufgabe 10.4 Gram-Schmidt-Verfahren

- (a) Sei $(\cdot | \cdot)$ das innere Standardprodukt auf \mathbb{R}^4 , und seien $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 4, 5)$, $v_3 = (1, -3, -4, -2)$. Finden Sie eine Orthonormalbasis (bezüglich $(\cdot | \cdot)$) von $W := \text{span}(v_1, v_2, v_3)$ mittels des Gram-Schmidt-Verfahrens.

- (b) Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine vollständige orthonormale Menge in einem inneren Produktraum und sei $y_i = \sum_{j=1}^i x_j$. Wir wenden das Gram-Schmidt Verfahren auf y_1, \dots, y_n an und erhalten neue Elemente z_1, \dots, z_n . Drücken sie z_1, \dots, z_n als Linearkombination der x_i aus.

Aufgabe 10.5 Zusatzaufgabe für Interessierte

Die Normen $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ seien definiert wie in Aufgabe 10.3. Gibt es ein inneres Produkt $(\cdot | \cdot)_1$ auf \mathbb{R}^2 so dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ $(x|x) = \|x\|_1^2$? Gibt es ein Innerprodukt $(\cdot | \cdot)_\infty$ auf \mathbb{R}^2 so, dass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ $(x|x) = \|x\|_\infty^2$?

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe **Montag, 09.07.2012** bis 10.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.

<http://www.math.uni-konstanz.de/~gregory/linearealgebra2.html>