Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra II
Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1

(a) Sei V ein endlich dimensionaler hermitescher Raum (ein Inneres Produkt $\mathbb{C}$-Vektorraum). Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) T ist unitär.

(ii) Es existiert eine orthonomale Basis $\mathcal{B}$ so, dass $[T]_{\mathcal{B}}$ unitär ist.

(iii) $[T]_{\mathcal{B}}$ ist unitär für alle orthonomalen Basen $\mathcal{B}$.

(b) Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer Raum (ein Inneres Produkt $\mathbb{R}$-Vektorraum). Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) T ist orthogonal.

(b) Es existiert eine orthonomale Basis $\mathcal{B}$ so, dass $[T]_{\mathcal{B}}$ orthogonal ist.

(c) $[T]_{\mathcal{B}}$ ist orthogonal für alle orthonomalen Basen $\mathcal{B}$.

Aufgabe 12.2
Sei V ein hermitescher Raum mit innerem Produkt $(\ |\ )$. Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$.
Wenn T hermitesch und $(Tx, x) \geq 0$ (bzw. $(Tx, x) > 0$) ist, heißt T positiv (bzw. strikt positiv).
Wenn $T^2 = T$, heißt T idempotent.
Sei T ein normaler Operator.

(a) Zeigen Sie, dass T genau dann positiv ist, wenn alle Eigenwerte von T positiv sind.

(b) Zeigen Sie, dass T genau dann strikt positiv ist, wenn alle Eigenwerte strikt positiv sind.

(c) Zeigen Sie, dass T genau dann invertierbar ist, wenn alle Eigenwerte von T ungleich null sind.

(d) Zeigen Sie, dass T genau dann idempotent ist, wenn alle Eigenwerte von T entweder 0 oder 1 sind.

Aufgabe 12.3

(a) Beweisen Sie, dass $T \in \mathcal{L}(V, V)$ genau dann normal ist, wenn $T = T_1 + iT_2$ wobei $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, V)$ hermitesch sind und $T_1T_2 = T_2T_1$.

(b) Finden Sie einen normalen Operator, der weder hermitesch noch schief-hermitesch noch unitär ist.

Aufgabe 12.4
Sei V ein hermitescher Raum. Sei T ein normaler Operator auf V. Zeigen Sie, dass ein Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ existiert mit

$$T^* = f(T).$$

Keine Abgabe.
