

**Universität Konstanz**

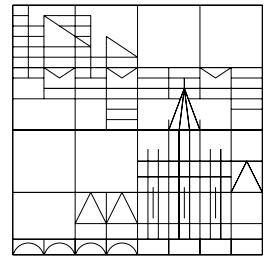
**Fachbereich**

**Mathematik und Statistik**

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Dr. Lorna Gregory

Katharina Dupont



# Lineare Algebra II

## Übungsblatt 12

### Aufgabe 12.1

- (a) Sei  $V$  ein endlich dimensionaler hermitescher Raum (ein Inneres Produkt  $\mathbb{C}$ -Vektorraum). Sei  $T \in \mathcal{L}(V, V)$ . Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
- (i)  $T$  ist unitär.
  - (ii) Es existiert eine orthonomale Basis  $\mathcal{B}$  so, dass  $[T]_{\mathcal{B}}$  unitär ist.
  - (iii)  $[T]_{\mathcal{B}}$  ist unitär für alle orthonormalen Basen  $\mathcal{B}$ .
- (b) Sei  $V$  ein endlich dimensionaler euklidischer Raum (ein Inneres Produkt  $\mathbb{R}$ -Vektorraum). Sei  $T \in \mathcal{L}(V, V)$ . Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
- (a)  $T$  ist orthogonal.
  - (b) Es existiert eine orthonomale Basis  $\mathcal{B}$  so, dass  $[T]_{\mathcal{B}}$  orthogonal ist.
  - (c)  $[T]_{\mathcal{B}}$  ist orthogonal für alle orthonormalen Basen  $\mathcal{B}$ .

### Aufgabe 12.2

Sei  $V$  ein hermitescher Raum mit innerem Produkt  $(\cdot | \cdot)$ . Sei  $T \in \mathcal{L}(V, V)$ .

Wenn  $T$  hermitesch und  $(Tx, x) \geq 0$  (bzw.  $(Tx, x) > 0$ ) ist, heißt  $T$  positiv (bzw. strikt positiv).

Wenn  $T^2 = T$ , heißt  $T$  idempotent.

Sei  $T$  ein normaler Operator.

- Zeigen Sie, dass  $T$  genau dann positiv ist, wenn alle Eigenwerte von  $T$  positiv sind.
- Zeigen Sie, dass  $T$  genau dann strikt positiv ist, wenn alle Eigenwerte strikt positiv sind.
- Zeigen Sie, dass  $T$  genau dann invertierbar ist, wenn alle Eigenwerte von  $T$  ungleich null sind.
- Zeigen Sie, dass  $T$  genau dann idempotent ist, wenn alle Eigenwerte von  $T$  entweder 0 oder 1 sind.

### Aufgabe 12.3

(a) Beweisen Sie, dass  $T \in \mathcal{L}(V, V)$  genau dann normal ist, wenn  $T = T_1 + iT_2$  wobei  $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, V)$  hermitesch sind und  $T_1T_2 = T_2T_1$ .

(b) Finden Sie einen normalen Operator, der weder hermitesch noch schiefhermitesch noch unitär ist.

### Aufgabe 12.4

Sei  $V$  ein hermitescher Raum. Sei  $T$  ein normaler Operator auf  $V$ . Zeigen Sie, dass ein Polynom  $f \in \mathbb{C}[x]$  existiert mit

$$T^* = f(T).$$

---

Keine Abgabe.

---