Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra II
Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1

Erinnerung: Sei $A \in K^{n\times n}$.
Seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Die Matrix $A[i|j]$ ist die $(n-1)\times(n-1)$ Matrix, die man durch Entfernung der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus A bekommt. In der Vorlesung, haben wir definiert:

$$D_{ij}(A) := \det(A[i|j]).$$

(a) Für feste $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} K^{n\times n} & \longrightarrow & K \\ A & \mapsto & A_{ij}D_{ij}(A) \end{array}$$

(i) bezüglich der i-ten Zeile von A linear ist.

(ii) für $0 < k \leq n$ mit $k \neq i$ bezüglich der k-ten Zeile von A linear ist.

(b) Für feste $j \in \{1, \ldots, n\}$ folgern Sie, dass

$$\begin{array}{rcl} K^{n\times n} & \longrightarrow & K \\ A & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}D_{ij}(A) \end{array}$$

eine bezüglich der Zeilen von A n-lineare Funktion ist.

Aufgabe 5.2 Die Vandermonde-Determinante

Sei $n \geq 2$. Seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ und sei

$$V_n = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ & & \ldots & \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie mit Induktion über n, dass $V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $V_n = (x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}) V_{n-1}$.

Aufgabe 5.3

(a) Wir sagen, dass eine Matrix $A = (A_{ij}) \in K^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, wenn für alle i, $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i > j$ gilt $A_{ij} = 0$.

Zeigen Sie, dass die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix das Produkt der Einträge auf der Diagonalen ist (also $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$).

(b) Seien $a, b \in K$. Berechnen Sie die Determinante der folgenden $n \times n$-Matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b & \ldots & b & b \\ b & a & \ldots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \ldots & a & b \\ b & b & \ldots & b & a \end{pmatrix}$$

.

Aufgabe 5.4
Sei $D : K^{n\times n} \to K$ eine bezüglich der Zeilen von $A \in K^{n\times n}$ n-lineare Funktion. Es gelte $D(A) = 0$, falls zwei benachbarte Zeilen von A gleich sind.

(a) Sei $A \in K^{n\times n}$. Sei A' eine durch das Vertauschen zweier benachbarter Zeilen von A entstandene Matrix. Zeige, dass

$$D(A) = -D(A').$$

(b) Zeigen Sie, dass A eine bezüglich der Zeilen einer Matrix alternierende Funktion ist.

Hinweis: Lesen Sie zunächst den Beweis von Satz 3 der Vorlesung 9 und benutzen Sie eine ähnliche Idee zur Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 5.5 Zusatzaufgabe für Interessierte
Die Eulersche Phi-Funktion $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist definiert durch:

$$\phi(n) := |\{i \mid 1 \le i \le n \text{ und } \mathsf{ggT}(n,i) = 1\}|$$

Sei $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mit Einträgen $A_{ij} := ggT(i,j)$. Zeigen Sie, dass

$$\det A = \phi(1)\phi(2)\cdots\phi(n).$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n = \sum_{j|n} \phi(j)$ gilt.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe **Dienstag, 29.5.2012** bis 10.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
