

Universität Konstanz

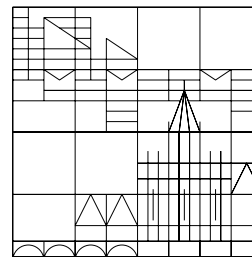
Fachbereich

Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Dr. Lorna Gregory

Katharina Dupont



## Lineare Algebra II

### Übungsblatt 5

#### Aufgabe 5.1

**Erinnerung:** Sei  $A \in K^{n \times n}$ .

Seien  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Die Matrix  $A[i|j]$  ist die  $(n-1) \times (n-1)$  Matrix, die man durch Entfernung der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte aus  $A$  bekommt. In der Vorlesung, haben wir definiert:

$$D_{ij}(A) := \det(A[i|j]).$$

(a) Für feste  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} K^{n \times n} &\longrightarrow K \\ A &\mapsto A_{ij} D_{ij}(A) \end{aligned}$$

(i) bezüglich der  $i$ -ten Zeile von  $A$  linear ist.

(ii) für  $0 < k \leq n$  mit  $k \neq i$  bezüglich der  $k$ -ten Zeile von  $A$  linear ist.

(b) Für feste  $j \in \{1, \dots, n\}$  folgern Sie, dass

$$\begin{aligned} K^{n \times n} &\longrightarrow K \\ A &\mapsto \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} A_{ij} D_{ij}(A) \end{aligned}$$

eine bezüglich der Zeilen von  $A$   $n$ -lineare Funktion ist.

### Aufgabe 5.2 Die Vandermonde-Determinante

Sei  $n \geq 2$ . Seien  $x_1, \dots, x_n \in K$  und sei

$$V_n = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie mit Induktion über  $n$ , dass  $V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ .

**Hinweis:** Zeigen Sie, dass  $V_n = (x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}) V_{n-1}$ .

### Aufgabe 5.3

(a) Wir sagen, dass eine Matrix  $A = (A_{ij}) \in K^{n \times n}$  eine obere Dreiecksmatrix ist, wenn für alle  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  mit  $i > j$  gilt  $A_{ij} = 0$ .

Zeigen Sie, dass die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix das Produkt der Einträge auf der Diagonalen ist (also  $\det(A) = \prod_{i=1}^n A_{ii}$ ).

(b) Seien  $a, b \in K$ . Berechnen Sie die Determinante der folgenden  $n \times n$ -Matrix:

$$\begin{pmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

#### Aufgabe 5.4

Sei  $D : K^{n \times n} \rightarrow K$  eine bezüglich der Zeilen von  $A \in K^{n \times n}$   $n$ -lineare Funktion. Es gelte  $D(A) = 0$ , falls zwei benachbarte Zeilen von  $A$  gleich sind.

- (a) Sei  $A \in K^{n \times n}$ . Sei  $A'$  eine durch das Vertauschen zweier benachbarter Zeilen von  $A$  entstandene Matrix. Zeige, dass

$$D(A) = -D(A').$$

- (b) Zeigen Sie, dass  $A$  eine bezüglich der Zeilen einer Matrix alternierende Funktion ist.

**Hinweis:** Lesen Sie zunächst den Beweis von Satz 3 der Vorlesung 9 und benutzen Sie eine ähnliche Idee zur Lösung der Aufgabe.

#### Aufgabe 5.5 Zusatzaufgabe für Interessierte

Die Eulersche Phi-Funktion  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  ist definiert durch:

$$\phi(n) := |\{i \mid 1 \leq i \leq n \text{ und } \text{ggT}(n, i) = 1\}|$$

Sei  $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  mit Einträgen  $A_{ij} := \text{ggT}(i, j)$ . Zeigen Sie, dass

$$\det A = \phi(1)\phi(2) \cdots \phi(n).$$

**Hinweis:** Zeigen Sie, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n = \sum_{j|n} \phi(j)$  gilt.

---

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.

Abgabe **Dienstag, 29.5.2012** bis 10.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.

---