

Universität Konstanz

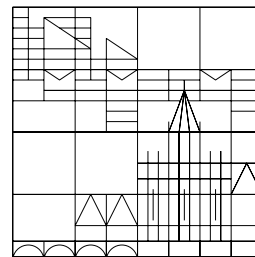
Fachbereich

Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Dr. Lorna Gregory

Katharina Dupont



Lineare Algebra II

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1

(a) Seien $A \in K^{r \times r}$, $B \in K^{r \times s}$ fest gewählt. Für $C \in K^{s \times s}$ sei

$$\delta(C) := \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\delta(C) = \det(C) \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

gilt.

(b) Seien $A \in K^{r \times r}$, $B \in K^{r \times s}$ und $C \in K^{s \times s}$.

(i) Verwenden Sie Zeilenumformungen, um zu zeigen, dass

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det A$$

gilt.

Folgern Sie, dass für alle $A \in K^{r \times r}$, $B \in K^{r \times s}$ and $C \in K^{s \times s}$

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \det C$$

gilt.

Aufgabe 6.2

Sei $A \in K^{m \times n}$. Sind $1 \leq r \leq m$ und $1 \leq s \leq n$, so ist eine $r \times s$ *Untermatrix* von A eine Matrix, die man durch Streichen von $m - r$ Zeilen und $n - s$ Spalten aus A erhält.

Der *Determinantenrang* $\text{detrang}(A)$ einer Matrix $A \neq 0$ ist das größte $1 \leq r \leq \min(n, m)$ so, dass eine $r \times r$ Untermatrix B von A existiert mit $\det B \neq 0$.

Sei $A \in K^{n \times n}$ mit $A \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $\text{detrang}(A) \geq \text{rang}(A)$.

(b) Zeigen Sie, dass $\text{detrang}(A) \leq \text{rang}(A)$.

Aufgabe 6.3

(a) Seien $n \geq 2$ und $A, B \in K^{n \times n}$ mit $\det A \neq 0$ und $\det B \neq 0$. Zeigen Sie, dass:

(i) $\text{adj}(AB) = \text{adj}(B)\text{adj}(A)$

(ii) $\det(\text{adj}A) = (\det A)^{n-1}$

(iii) $\text{adj}(\text{adj}A) = (\det A)^{n-2}A$

(b) Sei $n \geq 2$ und $A \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass

$$\text{rang}(\text{adj}(A)) = \begin{cases} n, & \text{wenn } \text{rang}(A) = n; \\ 1, & \text{wenn } \text{rang}(A) = n - 1; \\ 0, & \text{wenn } \text{rang}(A) \leq n - 2. \end{cases}$$

Aufgabe 6.4

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Über jedem der Körper \mathbb{Q} , \mathbb{R} und \mathbb{C} berechnen Sie:

- (a) das charakteristische Polynom von A ,
- (b) die Eigenwerte von A ,
- (c) die Eigenräume von A ,
- (d) die Dimension der Eigenräume von A .

Ist A diagonalisierbar über \mathbb{Q} , \mathbb{R} oder \mathbb{C} ?

Aufgabe 6.5 Zusatzaufgabe für Interessierte

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und sei $C := A + iB \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $A + \lambda B$ invertierbar existiert, falls C invertierbar ist.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.

Abgabe **Montag, 04.06.2012** bis 10.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.

<http://www.math.uni-konstanz.de/~gregory/linearealgebra2.html>