Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra II
Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1

(a) Seien $A \in K^{r\times r}, B \in K^{r\times s}$ fest gewählt. Für $C \in K^{s\times s}$ sei

$$\delta(C) := \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\delta(C) = \det(C) \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

gilt.

(b) Seien $A \in K^{r\times r}, B \in K^{r\times s}$ und $C \in K^{s\times s}$.

(i) Verwenden Sie Zeilenumformungen, um zu zeigen, dass

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det A$$

gilt.

Folgern Sie, dass für alle $A \in K^{r\times r}, B \in K^{r\times s}$ and $C \in K^{s\times s}$

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \det C$$

gilt.

Aufgabe 6.2
Sei $A \in K^{m\times n}$. Sind $1 \leq r \leq m$ und $1 \leq s \leq n$, so ist eine $r \times s$ *Untermatrix* von A eine Matrix, die man durch Streichen von $m-r$ Zeilen und $n-s$ Spalten aus A erhält.
Der *Determinantenrang* detrang(A) einer Matrix $A \neq 0$ ist das größte $1 \leq r \leq \min(n, m)$ so, dass eine $r \times r$ Untermatrix B von A existiert mit $\det B \neq 0$.
Sei $A \in K^{n\times n}$ mit $A \neq 0$.

(a) Zeigen Sie, dass detrang$(A) \geq$ rang(A).

(b) Zeigen Sie, dass detrang$(A) \leq$ rang(A).

Aufgabe 6.3

(a) Seien $n \geq 2$ und $A, B \in K^{n\times n}$ mit $\det A \neq 0$ und $\det B \neq 0$. Zeigen Sie, dass:

  (i) $\mathrm{adj}(AB) = \mathrm{adj}(B)\mathrm{adj}(A)$
  (ii) $\det(\mathrm{adj}A) = (\det A)^{n-1}$
  (iii) $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}A) = (\det A)^{n-2}A$

(b) Sei $n \geq 2$ und $A \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{rang}(\mathrm{adj}(A)) = \begin{cases} n, & \text{wenn } \mathrm{rang}(A) = n; \\ 1, & \text{wenn } \mathrm{rang}(A) = n-1; \\ 0, & \text{wenn } \mathrm{rang}(A) \leq n-2. \end{cases}$$

Aufgabe 6.4
Sei
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Über jedem der Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ berechnen Sie:

(a) das charakteristische Polynom von A,

(b) die Eigenwerte von A,

(c) die Eigenraüme von A,

(d) die Dimension der Eigenraüme von A.

Ist A diagonalisierbar über $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$?

Aufgabe 6.5 Zusatzaufgabe für Interessierte
Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei $C := A + iB \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $A + \lambda B$ invertierbar existiert, falls C invertierbar ist.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe **Montag, 04.06.2012** bis 10.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
