

Universität Konstanz

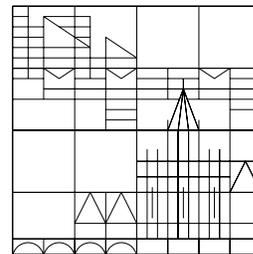
Fachbereich

Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann

Dr. Lorna Gregory

Katharina Dupont



Lineare Algebra II

Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1

Sei K ein Körper.

- (a) Sei V ein endlichdimensionaler K -Vektorraum und sei $T : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung, sowie $h := \dim(\text{Im}(T))$. Zeigen Sie, dass der Grad des Minimalpolynoms von T höchstens $h + 1$ ist.
- (b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen Sie, dass $M \in K^{n \times n}$ mit $\text{rang}(M) = n - 1$ und dem Grad des Minimalpolynoms n existiert.

Aufgabe 8.2

Sei K ein Körper. Seien V ein K -Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Unterräume von V mit $U_1 + U_2 = V$. Weiter sei $T : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Sei m_1 (bzw. m_2) das Minimalpolynom von $T|_{U_1} : U_1 \rightarrow U_1$ (bzw. $T|_{U_2} : U_2 \rightarrow U_2$). Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von T das kleinste gemeinsame Vielfache von m_1 und m_2 ist.

Hinweis: Seien $p_1, p_2 \in K[x]$. Ein normiertes Polynom q heißt kleinstes gemeinsames Vielfaches von p_1 und p_2 , falls

- (i) $p_1|q$ und $p_2|q$
- (ii) für jedes $q' \in K[t]$ mit $p_1|q'$ und $p_2|q'$ folgt $q|q'$.

Aufgabe 8.3

Das Ziel dieser Aufgabe ist es den Satz von Cayley-Hamilton für obere Dreiecksmatrizen direkt zu beweisen. Der Satz von Cayley-Hamilton soll nicht verwendet werden.

Sei K ein Körper. Für $0 \leq k \leq n$ sei V_k der Unterraum

$$V_k := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i = 0 \text{ for } i > k \right\}$$

von $K^{n \times 1}$.

Für $0 < k \leq n$ sei $U_k \in K^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix deren (k, k) -ter Eintrag gleich null ist.

(a) Seien $0 < k \leq n$ und $v \in V_k$. Zeigen Sie, dass $U_k v \in V_{k-1}$.

(b) Zeigen Sie, dass das Produkt

$$U_1 U_2 \dots U_{n-1} U_n = 0$$

ist.

(c) Sei A eine obere Dreiecksmatrix und χ_A das charakteristische Polynom von A . Zeigen Sie, dass

$$\chi_A(A) = 0$$

gilt.

Aufgabe 8.4

Wir bezeichnen als Spur $\text{Tr}(A)$ einer $n \times n$ -Matrix A über einem Körper die Summe der Diagonalelemente dieser Matrix.

Seien K ein Körper und $c_1, \dots, c_k \in K$. Sei $A \in K^{n \times n}$ mit charakteristischem Polynom

$$(x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_k)^{d_k}.$$

Zeigen Sie, dass

$$d_1 c_1 + \dots + d_k c_k = \text{Tr}(A)$$

und

$$c_1^{d_1} \dots c_k^{d_k} = \det A.$$

Hinweis: Für die Aussage über die Spur, vergleichen Sie die Koeffizienten von x^{n-1} in $\det(xI - A)$ und $(x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_k)^{d_k}$.

Aufgabe 8.5 Zusatzaufgabe für Interessierte

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass A und B ähnlich über \mathbb{R} sind, falls A und B ähnlich über \mathbb{C} sind.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe **Montag, 25.06.2012** bis 10.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.

<http://www.math.uni-konstanz.de/~gregory/linearealgebra2.html>