Universität Konstanz

Fachbereich
Mathematik und Statistik

Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Dr. Lorna Gregory
Katharina Dupont

Lineare Algebra II
Übungsblatt 9

Aufgabe 9.1
Sei K ein Körper. Seien V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Unterraum von V. Sei $\mathcal{B}' \subseteq W$ eine Basis für W.

(a) Sei $\mathcal{B}''$ eine Untermenge von V so, dass $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ eine Basis für V ist und $\mathcal{B}' \cap \mathcal{B}'' = \emptyset$ ist. Beweisen Sie, dass $\overline{\mathcal{B}''}$ eine Basis für V/W ist.

(b) Umgekehrt sei $\{\alpha_{r+1}, ..., \alpha_n\} \subseteq V$ mit $\{\overline{\alpha_{r+1}}, ..., \overline{\alpha_n}\}$ eine Basis für V/W. Beweisen Sie, dass $\mathcal{B}' \cup \{\alpha_{r+1}, ..., \alpha_n\}$ eine Basis für V ist.

Aufgabe 9.2
Sei K ein Körper.

(a) Seien V ein K-Vektorraum und W ein Unterraum von V. Zeigen Sie, dass W ein lineares Komplement in V hat, d.h. es gibt einen Unterraum $W' \subseteq V$ mit $W' \oplus W = V$.

(b) Seien V ein K-Vektorraum, $W \subseteq V$ ein Unterraum von V und $v_1, ..., v_s \in V$ linear unabhängig mit $\text{span}\{v_1, ..., v_s\} \cap W = \{0\}$. Zeigen Sie, dass $\{v_1, ..., v_s\}$ zu einer Basis eines linearen Komplementes von W in V ergänzt werden kann.

(c) Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim V \geq 2$. Sei $W \subsetneq V$, $W \neq 0$ ein Unterraum von V. Zeigen Sie, dass es zwei verschiedene Komplemente W_1, W_2 mit $V = W \oplus W_1$ und $V = W \oplus W_2$ existieren.

Aufgabe 9.3
Sei K ein Körper. Seien V ein K-Vektorraum und $W_1, ..., W_k$ Unterräume von V. Sei $W := W_1 + ... + W_k$.

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

  (i) $W_1, ..., W_k$ sind unabhängig d.h. falls $\alpha_1 + ... + \alpha_k = 0$ mit $\alpha_i \in W_i$ für $0 < i \leq k$, so ist $\alpha_i = 0$ für $0 < i \leq k$.

  (ii) Für jedes j mit $2 \leq j \leq k$ gilt
$$W_j \cap (W_1 + ... + W_{j-1}) = \{0\}.$$

  (iii) Ist $\mathcal{B}_i$ eine angeordnete Basis für W_i $(0 < i \leq k)$, so ist $(\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_k)$ eine angeordnete Basis für W.

  Falls eine (und damit alle) der oben stehenden Bedingungen erfüllt ist, schreiben wir $W = W_1 \oplus ... \oplus W_k$.

(b) Sei jetzt V endlichdimensional. Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$. Angenommen $V = W_1 \oplus ... \oplus W_k$ und für alle $0 < i \leq k$ ist W_i T-invariant. Sei für jedes $0 < i \leq k$ $\mathcal{B}_i$ eine angeordnete Basis für W_i und $\mathcal{B} := (\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_k)$. Zeigen Sie, dass
$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [T|_{W_1}]_{\mathcal{B}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [T|_{W_k}]_{\mathcal{B}_k} \end{pmatrix}$$
ist.

Aufgabe 9.4
Sei K ein Körper. Seien $T : V \to V$ linear, $c \in K$ ein Eigenwert von T, $v_1, ..., v_r \in V$ mit $v_1 \neq 0$ so, dass

$$(T - cI)(v_1) = 0$$

und

$$(T - cI)(v_i) = v_{i-1}$$

für $i = 2, ..., r$, d.h. so, dass $(v_1, ..., v_r)$ eine Jordan Kette der Länge r zum Eigenwert c ist.
Zeigen Sie für $W :=$ Span$\{v_1, ..., v_r\}$:

(i) $\mathcal{B}' := \{v_1, ..., v_r\}$ ist eine Basis für W.

(ii) W ist T-invariant.

(iii)
$$[T_W]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c & 1 & & 0 \\ & c & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & c \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.5 Zusatzaufgabe für Interessierte
Sei K ein unendlicher Körper. Sei $W \subseteq V$ ein Unterraum von V mit $\{0\} \neq W \subsetneq V$. Zeigen Sie, dass unendlich viele verschiedene Unterräume W' mit $W \oplus W' = V$ existiert.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.
Abgabe **Montag, 02.07.2012** bis 10.00 Uhr in die Briefkästen bei F 411.
