

Übungen zur Linearen Algebra 1

Aufgabe 1: a) Lösen Sie das folgende Gleichungssystem in \mathbb{R} mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$3x_1 - x_2 + 4x_3 = 12 \quad (1)$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 \quad (2)$$

$$6x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 16 \quad (3)$$

$$5x_1 + 7x_2 - 11x_3 = -24 \quad (4)$$

Geben Sie die Zwischenschritte an!

b) Lösen Sie jetzt das folgende Gleichungssystem S in \mathbb{F}_{13} mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

$$3x_1 + 14x_2 = 2 \quad (5)$$

$$4x_1 - 7x_2 = 5 \quad (6)$$

Geben Sie auch hier die Zwischenschritte an.

c) Ist S in \mathbb{Z}_{14} lösbar? Die Antwort ist zu begründen.

Aufgabe 2: Sei $1 < n \in \mathbb{N}$. Eine natürliche Zahl $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ wird **Einheit** von \mathbb{Z}_n genannt, falls $l \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ existiert mit $k \cdot_n l = 1$. Es sei $U(n)$ die Menge der Einheiten von \mathbb{Z}_n .

a) Finden Sie $U(14)$. Geben Sie die Verknüpfungstabellen für $(U(14), \cdot_{14})$ an, d.h. eine Tabelle, die zu jedem Paar $(a, b) \in U(14) \times U(14)$ das Ergebnis von $a \cdot_{14} b$ angibt.

b) Zeigen Sie: Für $a \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ist $a \in U(n)$ genau dann, wenn $\text{ggT}(a, n) = 1$.

c) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $(U(n), \cdot_n)$ abelsche Gruppe.

Aufgabe 3: Sei (G, \cdot) eine Gruppe mit neutralem Element e , so dass $x \cdot x = e$ für alle $x \in G$.

a) Geben Sie ein Beispiel für eine solche Gruppe an, bei dem G mehr als zwei Elemente besitzt.

b) Zeigen Sie: Jedes solche (G, \cdot) ist abelsch.

Aufgabe 4: Wir definieren $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Zeigen Sie: $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ ist Teilkörper von $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, wobei $+$ und \cdot die gewöhnliche Addition und Multiplikation reeller Zahlen bezeichnen.

Zusatzaufgabe für Interessierte: Sei $5 \leq p \in \mathbb{P}$, wobei \mathbb{P} die Menge der Primzahlen bezeichnet.

a) Zeigen Sie: Ist $\frac{a}{b} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$, so gilt $p \mid a$.

b) Zeigen Sie: Ist $\frac{a}{b} = \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$, so gilt $p^2 \mid a$.

Bei jeder Aufgabe sind bis zu 10 Punkte zu erreichen.

Abgabe bis zum 15.11.2011, 12.30. Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in das Postfach Ihres Tutors im Gang F , 4. Etage.