Lineare Algebra II.
Kuhlmann
1. Vorlesung
16.04.2012

<u>Inhalt:</u> Es ist geplant, folgende Themen in der Vorlesung in SS 2012 abzudecken. Zusätzliche Abschnitte könnten noch dazu kommen.

1. Polynomalgebren, Potenzreihen, Symmetrische Gruppen.

2. $\exists$ ce und Eindeutigkeit von Determinanten

3. Eigenschaften von Determinanten: multiplikativ, det(AB), det(A^{-1}), nach Zeilenentwicklung oder Spaltenentwicklung, Cramer's Formel.

4. Eigenwerte, Triangulasierung, Diagonalisierung, Eigenräume, Invariante Unterräume, Jordan Normalform. Anwendungen.

5. Innere Produkte, Cauchy-Schwartz, Orthogonalität, Orthonormale Basen, Gram-Schmidt Verfahren, Riesz Darstellungssatz.

6. Spektralsatz. Anwendungen.

7. Symmetrische Formen, Quadratische Formen, Positive Formen, Sylvester Satz, Anwendungen.

Kapitel I. Polynome.

---

§1. Algebren.

<u>Erinnerung.</u> Sei K ein Körper. Eine <u>K-Algebra</u> $\mathcal{A}$ ist ein K-VR mit einer Multiplikation von Vektoren:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha\beta \end{aligned}$$

so daß $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ und $c \in K$ gilt:

(a) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

(b) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ und
$(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

(c) $c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta)$

Falls es $1 \in \mathcal{A}$ gibt so daß $1\alpha = \alpha 1 = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}$ heißt die Algebra eine <u>Algebra mit Einheit.</u>

Falls $\alpha\beta = \beta\alpha \quad \forall \alpha, \beta$ heißt

$\mathcal{A}$ eine kommutative Algebra.

Bsp 1. $\mathcal{A} := M_{n \times n}(K)$ kommutative Algebra mit Einheit.

Bsp 2. $\mathcal{A} := \mathcal{L}(V, V)$ " " " "

Bsp 3: Potenzreihen Algebra:
Betrachte

$$K^{\mathbb{N}_0} := \{ f \; ; \; f : \mathbb{N}_0 \to K, \; f \text{ Abbildung} \}$$

Schreibe $\quad f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (f_0, f_1, \ldots)$

Addition: Punktweise i.e

(*) $$(f+g)_n := f_n + g_n$$

Skalar mult.: $\quad (cf)_n := c \, f_n$
auch
Punktweise

(**) Produkt: $$(fg)_n := \sum_{i=0}^{n} f_i \, g_{n-i}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Proposition 1. $\mathcal{A} := K^{\mathbb{N}_0}$ mit den Verknüpfungen (wie in (*) und (**) erklärt) ist eine kommutative Algebra mit Einheit.

Erinnerung: in LA I hatten wir die K-VR Axiome für $K^{\mathbb{N}_0}$ bewiesen

Beweis: $$(gf)_n = \sum_{i=0}^{n} g_i f_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} g_{n-i} f_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i} = (fg)_n .$$

so kommutativ!

$$[(fg)h]_n = \sum_{i=0}^{n} (fg)_i \, h_{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} f_j \, g_{i-j} \right) h_{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} f_j \, g_{i-j} \, h_{n-i} = \sum_{j=0}^{n} f_j \sum_{i=0}^{n-j} g_i \, h_{n-i-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f_j \sum_{i=0}^{n-j} g_i \, h_{(n-j)-i}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f_j \, (gh)_{n-j} = [f(gh)]_n$$

so assoziativ!

ÜA, ÜB: die übrige Axiome (b) und (c). Zeigen Sie auch daß $1 := (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ Einheit ist.

Notation: $x := (0, 1, 0, \ldots)$

$x^0 := 1$

$x^n := \underbrace{x \cdots x}_{n \text{ mal}}$.

Proposition 2. (1) $x^k = (0, \ldots, 0, \underset{k^{\text{te}} \text{ Stelle}}{1}, 0, \ldots)$

$\forall\, k \in \mathbb{N}_0$

(2) $\{ x^k \mid k \in \mathbb{N}_0 \}$ sind l. u

also ist $K^{\mathbb{N}_0}$ unendlich dim.

Beweis. Bereits in LA I. $\square$

Definition und Notation

$\mathcal{A} = K^{\mathbb{N}_0}$ heißt die Algebra der Potenzreihen über K; sie wird bezeichnet $\mathcal{A} := K[\![x]\!]$.

Warum Potenzreihen? $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ (formale Schreibweise).

§2 Die Polynomalgebra

Notation $K[x] := \mathrm{Span}\{x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Definition $f \in K[x]$ heißt Polynom über K.

Degree / Grad: Sei nun $f \neq 0$; $f \in K[x]$.

Es gilt: $f \in K[x]$ gdw $\exists! n \in \mathbb{N}_0$

mit $f_n \neq 0$ und $f_k = 0 \quad \forall k > n$.

Notation / Definition: $\deg f := n$ (Grad von f ist n)

NB: $\deg f = n \Leftrightarrow f = f_0 x^0 + f_1 x^1 + \dots + f_n x^n$

$f_n \neq 0$

f_i heißen Koeffiziente von f.

Definition Ein Polynom aus der Gestalt
$f = f_0 x^0$ ist ein Skalarpolynom
($\deg f = 0$ oder $f = 0$)

Ein Polynom $f \neq 0$ ist normiert

falls $\deg f = n$ und $f_n = 1$.