- Lineare Algebra II -

- Kuhlmann -

10. Vorlesung
am 18.05.2012

Wir haben bewiesen: $n > 1$; A $n \times n$ über R; für jede j^{te} Spalte gilt:

$$\det(A) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det A[i|j]}\, A_{ij}$$

<u>Definition 1.</u> $(-1)^{i+j} \det A[i|j]$ ist ij^{te} <u>Kofaktor von A</u>

<u>Notation</u>: $C_{ij} := (-1)^{i+j} \det A[i|j]$.

Also $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} C_{ij}$.

1. Behauptung. $k \neq j \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik} C_{ij} = 0$$

<u>Beweis</u> Ersetze die j^{te} Spalte von A durch ihre k^{te} Spalte und nenne die so erhaltene Matrix B.

Es gilt also: $B_{ij} = A_{ik} \quad \forall i$

B hat zwei gleiche Spalten also ist $\det(B) = 0$

Nun ist $B[i|j] = A[i|j]$

Also: $0 = \det(B) =$

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} B_{ij} \det B[i|j]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ik} \det A[i|j]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_{ik} C_{ij}$$ $\boxtimes$ 1. Beh.

Diese Eigenschaften fassen wir zusammen:

(*) $$\sum_{i=1}^{n} A_{ik} C_{ij} = \delta_{jk} \det(A)$$

<u>Definition 2</u> Die $n \times n$ Matrix $\operatorname{adj}(A)$ ist die Transponierte der Matrix der Kofaktoren von A; d.h

$$(\operatorname{adj} A)_{ij} := C_{ji} = (-1)^{i+j} \det A[j|i]$$

$\operatorname{adj}(A)$ ist die <u>adjungierte Matrix</u> von A.

Die Formeln in (*) kann man nun zusammenfassen:

(**) $$(\operatorname{adj} A)\, A = \det(A)\, I_n.$$

2. Behauptung:

$$A(\mathrm{adj}\ A) = \det(A)\ I_n.$$

Beweis: Es ist: $A^T[i\,|\,j] = A[j\,|\,i]^T$

Also $(-1)^{i+j} \det A^T[i\,|\,j] =$

$(-1)^{i+j} \det A[j\,|\,i]$

(ij^{te} Kofaktor von A^T = ji^{te} Kofaktor von A)

Also

(***) $\mathrm{adj}\,(A^T) = (\mathrm{adj}\ A)^T$

(**) impliziert für A^T:

$$(\mathrm{adj}\ A^T)\,A^T = (\det A^T)\,I_n = (\det A)\,I_n.$$

Also

$$A\,(\mathrm{adj}\ A^T)^T = (\det A)\,I_n$$

Zusammen mit (***) erhalten wir

$$A\,(\mathrm{adj}\ A) = (\det A)\,I_n$$ ▪ 2. Beh.

Es gilt also:

$$(\dagger)\begin{cases} A\,(\mathrm{adj}\ A) = (\det A)\,I_n \text{ und} \\ (\mathrm{adj}\,A)\ A = \det(A)\,I_n \end{cases}$$

Definition 3. $A \in M_{n\times n}(R)$ ist über R invertierbar falls es $B \in M_{n\times n}(R)$ gibt so daß $AB = BA = I_n$.

[Wenn B existiert dann ist B eindeutig; $B = A^{-1}$ wie für $R = K$ (Körper)].

Aus (+) sehen wir: $\det(A)$ invertierbar in R (i.e. eine Einheit von R) $\Rightarrow$ A invertierbar über R und $A^{-1} = (\det A)^{-1} \operatorname{adj} A$.

Umgekehrt: A invertierbar $\Rightarrow AA^{-1} = I_n \Rightarrow$ $\det(AA^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow$ $\det(A)$ ist eine Einheit in R.

Wir haben bewiesen

Satz 1: $A \in M_{n\times n}(R)$ is invertierbar über R

gdw

$\det(A)$ ist eine Einheit in R.

Ist A invertierbar so ist $A^{-1} = \det(A)^{-1} \operatorname{adj}(A)$.

[Insbesonders $A \in M_{n\times n}(K)$ (K Körper)
ist invertierbar gdw $\det(A) \neq 0$.]

Sonder Fall. $R = K[x]$

$f, g \in K[x]$; $fg = 1 \Rightarrow \deg f + \deg g = 0$

$\Rightarrow \deg f = \deg g = 0$.

Also sind die Einheiten von R die $\neq 0$ Skalarpolynome. A ist invertierbar gdw $\det(A) \in K^\times$. $\square$

<u>Bsp 1</u> $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$

$\det(A) = -2$ A nicht invertierbar über $\mathbb{Z}$.

A ist aber invertierbar als Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$ und

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

<u>Bsp 2</u> $R = \mathbb{R}[x]$

$$A = \begin{pmatrix} x^2+x & x+1 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x^2-1 & x+2 \\ x^2-2x+3 & x \end{pmatrix}$$

$\det(A) = x+1$ $\qquad$ $\det B = -6$

A nicht invertierbar $\qquad$ B invertierbar.

<u>Lemma 2</u> Ähnliche Matrizen haben gleiche Determinante.

Beweis $\quad B = P^{-1} A P \qquad A, B \in M_{n \times n}(K)$

$$\det B = \det(P^{-1} A P) = \det(P)^{-1} \det(P) \det(A)$$
$$= \det(A). \qquad \square$$

<u>Definition 4</u> $\dim(V) = n$, V K-VR
$T : V \to V$ lin. Operator. Definiere:

$$\det(T) := \det([T]_{\mathcal{B}})$$

für eine (jede) Basis $\mathcal{B}$ von V.

Cramer's Formel

Betrachte GS

$$A X = Y \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^{n \times 1}$$

Also

$$\underbrace{adj(A) A}\, X = adj(A)\, Y$$

Also

$$(\det A) X = adj(A)\, Y$$

also

$$(\det A)\, x_j = \sum_{i=1}^{n} (adj\, A)_{ji}\, y_i$$

also für $1 \le j \le n$ gilt:

$$(\det A)\, x_j = \sum (-1)^{i+j}\, y_i \det A[i/j]$$

Hier erkennen wir Determinante der Matrix die man erhält wenn man die $j$te Spalte von A durch Y ersetzt.

Wenn $\det(A) \neq 0$ bekommen wir

Cramer's Regel

Sei $A \in M_{n\times n}(K)$, mit $\det(A) \neq 0$.

Sei $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}$.

Dann ist die eindeutige Lösung

$X = A^{-1}Y$ so beschrieben:

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A}$$

Wobei B_j die $n\times n$ Matrix ist, die man erhält wenn man die $j$te Spalte von A durch Y ersätzt. ∎