Lineare Algebra II

Kuhlmann

11. Vorlesung

am 21.05.2012

§ Eigenwerte und Eigenvektoren.

Definition 1. (a) Sei V K-VR, $T \in \mathcal{L}(V,V)$,
$c \in K$ ist ein Eigenwert von T
falls $\exists\ \alpha \neq 0$; $\alpha \in V$ mit

$$T(\alpha) = c\alpha.$$

(b) Sei $\alpha \in V$ und $T(\alpha) = c\alpha$,

α heißt Eigenvektor (zur Eigenwert c).

(c) $W_c := \{\alpha \mid T(\alpha) = c\alpha\}$ ist ein Unterraum;

der Eigenraum (zur Eigenwert c).

Bem 1: $W_c = \ker(T - cI)$ d.h

$$W_c = \{\alpha \mid T(\alpha) = c\alpha\} = \{\alpha \mid (T - cI)\alpha = 0\}.$$

c ist also Eigenwert gdw $(T - cI)$ singulär ist.

Satz 1. Sei V endlich dim., $T \in \mathcal{L}(V,V)$, $c \in K$.
Sind äquivalent:

(i) c ist Eigenwert von T.

(ii) $(T - cI)$ ist nicht invertierbar

(iii) $\det(T - cI) = 0$. $\boxed{B}$

Bem 2 $\det(T - xI)$ ist ein Polynom vom Grad n (die Eigenwerte sind also genau dessen Nullstellen). Sei $\mathcal{B}$ eine Basis.

Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ $\quad A = [T]_{\mathcal{B}}$

Es ist: $A - xI = [T - xI]_{\mathcal{B}}$. Nun ist

$$B := xI - A = \begin{pmatrix} x - a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \\ & & \ddots \\ & & x - a_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit } b_{ii} = (x - a_{ii})$$

$$\det B = \sum_{\tau \in S_n} (\operatorname{sign} \tau) \underbrace{b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}}_{\text{Falls } \neq 0 \text{ ist}}$$

$$\deg\left(b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}\right) =$$

$$\left| \{ i \in \{1, \ldots, n\} \mid \tau(i) = i \} \right|$$

Also ist $\prod_{i=1}^{n} (x - a_{ii})$ der einziger Term (Hauptterm) von Grad n. Wir sehen also daß

$$\deg \left(\sum_{\tau} \operatorname{sign} \tau \; b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)} \right) = n$$

und außerdem daß

$\det(xI - A)$ ein normiertes Polynom ist. $\boxdot$

<u>Definition 2.</u> $c \in K$ ist <u>Eigenwert von</u> $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$

falls $(cI - A)$ singulär ist.

Also sind die Eigenwerte von A die NS von

$\det(xI - A)$ wie oben.

<u>Definition 3</u> $f(x) := \det(xI - A)$ ist das

charakteristische Polynom von A.

<u>Lemma 1.</u> Ähnliche Matrizen haben das gleiche Char. Pol.

<u>Bew:</u> $B = P^{-1} A P \Rightarrow$

$$\det(xI - B) = \det(xI - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(xI - A)P)$$
$$= \det P^{-1} \det(xI - A) \det P = \det(xI - A). \boxdot$$

Definition 4. Sei V endl. dim ; $T \in \mathcal{L}(V, V)$.

$\text{Char Pol}(T) := \text{Char Pol}([T]_{\mathcal{B}})$

für irgendeine Basis $\mathcal{B}$ von V

(und damit, für jede Basis).

Bemerkung und Beispiele.

T can also nicht mehr als $\dim(V)$ Eigenwerte in K.

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ in $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ hat keine reelle Eigenwerte weil $\det(xI - A) = x^2+1$ keine reelle NS hat.

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$\text{Char Pol}(A) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 =$$

$$(x-1)(x-2)^2$$

Eigenwerte $c = 1$ $c = 2$ in $\mathbb{R}$.

$c = 1.$ $\ker(\cancel{A} - I) := W_1$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$ hat rang $= 2$

Also $\dim(\ker(A - I)) = 1.$

Wir wollen eine Basis für W_1 finden.

Löse $$(A - I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1 = (1, 0, 2)$ ist eine Lösung

und $\{\alpha_1\}$ ist eine Basis für W_1.

$c = 2$ $\ker(A - 2I) := W_2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$ hat rang $= 2$

Also $\dim W_2 = 1$. Wie oben finde Lösung,

$\alpha_2 = (1, 1, 2)$ und

$\{\alpha_2\}$ ist Basis für W_2

<u>Lemma 2</u>. Seien $v_i \neq 0$; $v_i \in V$,

v_i ist EigenVekt zur Eigenwert c_i

für $i = 1, .., k$.

Falls $c_i \neq c_j$ für $i \neq j$ $i, j \in \{1, .., k\}$,

dann ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ linear unabhängig.

<u>Beweis.</u> Bemerke daß $v \in V$, $v \neq 0$

$\Rightarrow$ v kann nicht Eigenvekt zu

verschiedenen Eigenwerten.

Wir führen einen Beweis per Induktion.

$k = 2$ Ist $v_2 = c v_1$ so ist

$v_2 \in W_{c_1}$ also v_2 ist Eigenvekt.

zu c_1 und $c_2 \neq c_1$. $\lightning$

Induktionsannahme gelte für $k-1$.

Seien $v_1, .., v_k$ linear abhängig.

OE haben wir also $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} v_i$

$$\left.\begin{array}{l} T(v_k) = c_k v_k = c_k \sum_{i=1}^{k-1} v_i \quad \text{und} \\ T(v_k) = \sum_{i=1}^{k-1} T(v_i) = \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$c_k \sum_{i=1}^{k-1} v_i = \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{k-1} (c_k - c_i) v_i = 0$$

$$\xRightarrow[\text{IA}]{} \underset{i=1,\dots,k-1}{c_k - c_i = 0} \Rightarrow \underset{i=1,\dots,k-1}{c_k = c_i} \quad \lightning \qquad \blacksquare$$

<u>**Korollar**</u> Seien $\dim V = n$ $T \in \mathcal{L}(V,V)$.

Nehme an daß T n verschiedene Eigenwerte $d_1, \dots, d_n$ in K hat. Dann hat V eine Basis $\mathfrak{B}$ bestehend aus Eigenvektoren von T. $\blacksquare$

Definition 5. Seien $\dim V = n$, $T \in \mathcal{L}(V,V)$

T ist diagonalisierbar (über K) falls V eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von T hat.

<u>Bemerkung</u>: Seien $d_1, \dots, d_n$ verschiedene Eigenwerte von T, und $\mathfrak{B}$ eine Basis wie im Korollar. Dann ist $[T]_{\mathfrak{B}}$ diagonal. $\blacksquare$