Lineare Algebra II

– Kuhlmann –

12. Vorlesung

Am 25. 05. 2012.

Bemerkung: am Ende 11. Vorlesung

$\dim V = n$, $T \in \mathcal{L}(V, V)$

$d_1, \dots, d_n$ verschiedene Eigenwerte,

α_i Eingenvekt. zur Eigenw. d_i

Setze $\mathcal{D} := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

Dann ist $\mathcal{D}$ eine Basis und

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$ diagonales Matrix.

Korollar 1. Sei $\dim V = n$, $T \in \mathcal{L}(V, V)$

$d_1, \dots, d_k$ verschiedene Eigenw.

$\forall i \in \{1, \dots, k\}$ sei $\mathcal{B}_i \subseteq W_{d_i}$; $\mathcal{B}_i$ lin. unabh.

Dann ist $\mathcal{B} := \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ auch lin. unabh.

__Beweis__ Sei $L := \{v_1, \ldots, v_\ell\} \subseteq \mathcal{B}$. Betrachte eine l.K $\sum_{j=1}^{\ell} c_j v_j$.

Nun Setze $L_i := L \cap \mathcal{B}_i$

und Setze

(*) $$\alpha_i := \sum_{v_j \in L_i} c_j v_j \qquad \text{falls } L_i \neq \emptyset$$

(und $\alpha_i := 0$ per konvention falls $L_i = \emptyset$).

Dann ist $\alpha_i \in W_{\lambda_i}$. Also ist

$0 = \sum_{j=1}^{\ell} c_j v_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$ nur möglich wenn

$\alpha_i = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, k$

(da sonst wären die $\alpha_i \neq 0$ Eigenvekt.

zur verschiedenen Eigenw. <u>und</u> gleichzeitig

linear abhängig; widerspruch zur Lemma 2

der 11. Vorlesung!).

Nun sind die v_j in (*) linear unabh

also $c_j = 0 \quad \forall\, j$ wie behauptet. $\square$

Lemma 1. Sei $\dim V = n$; $T \in \mathcal{L}(V,V)$

$d_1, \dots, d_k$ die verschiedene Eigenw. von T.

Es gilt: T ist diagonalisierbar $\iff \sum_{j=1}^{k} \dim W_{d_j} = n$.

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von Eigenvekt.

$$\text{Setze } \mathcal{B}_j := \mathcal{B} \cap W_{d_j}.$$

Also ist $\mathcal{B} = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$

Setze $l_j := |\mathcal{B}_j|$ also

$$n = |\mathcal{B}| = \sum_{j=1}^{k} l_j.$$

Beh: $l_j = \dim W_{d_j}$.

Es ist klar daß $l_j \le \dim W_{d_j}$.

Ist $l_i < \dim W_{d_i}$ dann $\exists \beta \in W_{d_i}$

mit $\mathcal{B}_i' := \mathcal{B}_i \cup \{\beta\}$ l. u.

Aber dann ist

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{\beta\} = \dot{\bigcup}_{j \ne i} \mathcal{B}_j \,\dot{\cup}\, \mathcal{B}_i'$$

l. u (Kor. 1) und $|\mathcal{B}'| = n+1$ ↯ (unmöglich)

"$\Leftarrow$" Sei $\sum_{j=1}^{k} \dim W_{d_j} = n$ und $\mathcal{B}_j$ eine Basis für W_{d_j} für jedes $j = 1, \dots, k$.

Setze $\mathcal{B} = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$. Dann ist $\mathcal{B}$ linear unab (Kor 1) und $|\mathcal{B}| = \sum_{j=1}^{k} |\mathcal{B}_j|$

$$= \sum_{j=1}^{k} \dim W_{d_j} = n.$$

Also ist $\mathcal{B}$ eine Basis für V und besteht aus Eigenvekt. von T.

Also ist T diagonalisierbar. $\square$

Sei nun $\dim V = n$

$T \in \mathcal{L}(V, V)$ diagonalisierbar,

$d_1, \dots, d_k$ ~~die~~ verschiedene Eigenw.

$\mathcal{B}$ eine Basis bestehend aus Eigenvekt.

(und geordnet so daß die ersten Basisvekt. Eigenvekt zu d_1 sind, d_2, usw. ...).

Dann ist

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \underbrace{d_1 \cdots d_1}_{l_1 \text{ Mal}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{d_k \cdots d_k}_{l_k \text{ Mal}} \end{pmatrix}$$

wobei

$$\boxed{\begin{array}{c} l_i := \dim W_{d_i} . \\ \text{und damit ist } \operatorname{Char.Pol}(T) = \prod_{i=1}^{k} (x-d_i)^{l_i} \end{array}} \quad (*).$$

Umgekehrt ist Char. Pol (T) wie in (*)

(mit $d_i \neq d_j$ für $i \neq j$ und $l_i = \dim W_{d_i}$)

dann ist T diagonalisierbar weil $\sum_{i=1}^{k} \dim W_{d_i} = n$ ist

(siehe Lemma 1).

Wir haben bewiesen:

Satz 1. Sei V endl dim, $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gilt:

T ist diagonalisierbar gdw $\operatorname{char Pol}(T) = \prod_{i=1}^{k} (x-d_i)^{l_i}$

wobei die Vielfachheit l_i der NS d_i

$\dim W_{d_i}$ ist. ∎

Bemerkung: $\dim W_d$ wird auch "geometrische Vielfachheit" der NS d genannt.

Im allgemeinen gilt:

Satz 2. Sei $\dim(V)$ endl, $T \in \mathcal{L}(V,V)$.

Sei d Eigenwert von T mit Vielfachheit μ.

Es gilt: $l := \dim(W_d) \leq \mu$

Beweis. Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ Basis von W_d.

Ergänze zu einer Basis

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_n\} \text{ von } V$$

Es ist

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} d & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d \end{matrix}}^{l \text{ Mal}} & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

Wir berechnen Char Pol (A):

$$\det(xI - A) = \det \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} x-d & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x-d \end{matrix}}^{l \text{ Mal}} & -B \\ \hline 0 & xI - C \end{array}\right)$$

$$= (x-d)^l \det(xI - C).$$

Also ist $l \leq \mu$. $\blacksquare$

T in Beispiele (1) und (2) der 11. Vorlesung sind beide

nicht diagonalisierbar

Beispiel (3):

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

$\text{Char Pol}(A) = (x-1)(x-2)^2$ (wie im Beispiel (2) !)

$d_1 = 1$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

rang $(A-I) \neq 3$ weil $A-I$ singulär. Es ist klar daß rang $(A-I) \geq 2$ also rang $(A-I) = 2$

$d_2 = 2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

rang $(A-2I) = 1$

Also

$\dim W_{d_1} = 1$ $\quad\quad$ $\dim W_{d_2} = 2$

$\dim W_{d_1} + \dim W_{d_2} = 3$

Also T ist diagonalisierbar: $\exists\ \mathcal{D}$ Basis von $\mathbb{R}^3$ s.d

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$$

$\square$