Lineair Algebra II

Kuhlmann.

~~13~~. Vorlesung

Am 01. 06. 2012

§ Annihilator Ideal

Sei V K-VR und $T \in \mathcal{L}(V,V)$, $p \in K[x]$.

Proposition 1. Sei $\dim V = n$. Es gelten:

(1) $\mathcal{A}(T) := \{ p \in K[x] \mid p(T) = 0 \}$

is ~~ein~~ Ideal; (2) $\mathcal{A}(T) \neq \{0\}$.

Beweis (1) $(p+q)(T) = p(T) + q(T)$

$$(pq)(T) = p(T)\, q(T).$$ ∎

(2) Betrachte die Elemente

$$I, T, T^2, \ldots, T^{n^2} \in \mathcal{L}(V,V)$$

Da $\dim \mathcal{L}(V,V) = n^2$ sind diese Elemente notwendig linear abhängig.

Also $\exists\, c_0, \ldots, c_{n^2} \in K$ mit $c_0 I + c_1 T + \ldots + c_{n^2} T^{n^2} = 0$

c_i nicht alle gleich Null. ∎

<u>**Definition 1.**</u> Der (eindeutig bestimmte) normierte Erzeuger von $\mathcal{A}(T)$ ist das <u>minimal Polynome von T.</u> (Min Pol (T)).

<u>Bem 1:</u>

(i) $\deg(\text{Min Pol}(T)) \leq n^2$

wir werden aber eine bessere obere Schranke bekommen.

(ii) $p := \text{Min Pol}(T)$ ist ~~das~~ normierte Polynom vom kleinstem Grad in $\mathcal{A}(T)$.

Ist also Characterisiert durch:

(1) $p \in K[x]$ (2) $p(T) = 0$ (3) $\deg q < \deg p$ $\Rightarrow q(T) \neq 0$.

<u>**Definition 2.**</u> $A \in Mat_{n \times n}(K)$.

<u>Min Pol(A)</u> ist der normierte Erzeuger von $\mathcal{A}(A)$ (analog definiert).

Bem 2.

(1) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis für V. Es gilt für $f \in K[x]$

$$[f(T)]_{\mathcal{B}} = f([T]_{\mathcal{B}}) \quad (\ddot{U}B).$$

Also $f(T) = 0 \iff f(A) = 0$ für $A = [T]_{\mathcal{B}}$

(2) Also habe ähnliche Matrizen

das gleiche Min Pol !

Satz 1. Sei $\dim V$ endlich, $T \in \mathcal{L}(V,V)$ (oder

$A \in Mat_{n \times n}(K)$. Es gilt:

Char Pol (T) und Min Pol (T) habe dieselben

NS (bis auf Vielfachheit).

Beweis Sei $p :=$ Min Pol (T) $\quad c \in K$

Z.Z: $p(c) = 0 \iff c$ Eig W. von T.

"$\Rightarrow$" $p(c) = 0 \Rightarrow p = (x-c)q$ $\quad \deg q < \deg p$
So $q(T) \neq 0$

Wähle $\beta \in V$ mit $\alpha := q(T)(\beta) \neq 0$

Es gilt

$$0 = p(T)(\beta) = (T - cI)\, q(T)(\beta)$$
$$= (T - cI)(\alpha).$$

Also $\alpha \neq 0$ ist EigVek. zum EigW. c.

"$\Leftarrow$" Umgekehrt sei

$$T(\alpha) = c\alpha \qquad \alpha \neq 0 \quad \alpha \in V$$
$$c \in K$$

Nun gilt also $p(T)(\alpha) = p(c)\,\alpha$ (ÜB)

Da aber $p(T) = 0$ und $\alpha \neq 0$ folgt $p(c) = 0$. ∎

<u>**Proposition 1.**</u> Sei T diagonalisierbar.

Dann zerfällt Min Pol (T) in verschiedene lineare Faktoren.

(Wir werden später Primäre Zerlegung anwenden um die Umkehrung dieser Aussage auch zu beweisen).

II – 01. 06. 2012

__Beweis__ Sei T diag., $c_1, \dots, c_k \in K$ die verschiedene EigW., $p := \text{Min Pol}(T)$

__Bh__: $p = (x-c_1)\dots(x-c_k)$; dies gilt weil

$$(T - c_1 I)\dots(T - c_k I)(\alpha) = 0$$

für jeder EigenV. α

(weil α ist EigV. zum EigW c_i für ein geeignetes i).

Da es eine Basis von EigV. gibt ist $p(T) = 0$ $\blacksquare$

Nun berechnen wir Min Pol für Beispiele (1), (2), (3) aus der 11. Vorlesung.

Wir bezeichnen $p :=$ Min Pol.

(3) $p = (x-1)(x-2)$ weil

T diag. ~~[illegible]~~ (Prop 1 anwenden).

(2) T ist nicht diag. also können wir Prop 1. nicht anwenden, aber Satz 1. können wir anwenden.

Da $\text{Char Pol}(T) = (x-1)(x-2)^2$

hat p die NS 1 und 2

Wir probieren Polynome aus der Form

$(x-1)^k (x-2)^l$ ("prüfen" ob sie T annihilieren).

$k \geq 1 \quad l \geq 1$

$(x-1)(x-2)$:

$$(A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$$

Also hat $\deg(p) \geq 3$

Nun probieren wir

$(x-1)^2(x-2)$ oder $(x-1)(x-2)^2$ ✓

$(A-I)(A-2I)^2 = 0$

Also hier ist $\text{Char Pol}(T) = \text{Min Pol}(T)$. ∎

Der Satz von Cayley Hamilton wird uns helfen weniger "prüfen" zu müssen!