Lineare Algebra II.

- Kuhlmann -

14. Vorlesung.

Am 4. 6. 2012

Aussage Wiederholung vom 13. Vorlesung:

Satz von Cayley Hamilton.

Sei V endl. dim und $T \in \mathcal{L}(V,V)$,

$f :=$ Char. Pol (T). Es gilt $f(T) = 0$,

d.h das Min Pol(T) teilt f.

Beweis Seien $K :=$ die Algebra der Polyn. in T.

und $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ Basis für V.

$A := [T]_{\mathcal{B}}$ d.h

$$T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\, \alpha_j \qquad \forall\ 1 \leq i \leq n$$

Wir schreiben diese Gleichungen um als

$$(1) \quad \sum_{j=}^{n} \left(\delta_{ij} T - A_{ji}\, I\right) \alpha_j = 0 \qquad \forall\ 1 \leq i \leq n$$

Sei B die $n \times n$ Matrix mit Koeff.

in der Algebra $\mathbb{K}$ definiert durch

$$B_{ij} := \delta_{ij} T - A_{ji} I$$

Beobachtung: $\det B = f(T)$

weil $f(x) = \underbrace{\det(xI - A)}$

und die Einträge der Matrix

$$(xI - A)_{ij} = \delta_{ij} x - A_{ji}$$

Also $(xI - A)_{ij}(T) = \delta_{ij} T - A_{ji} I = B_{ij}$,

und somit gilt

$$f(T) = \left[\det(xI - A)\right](T) =$$

$$\det\left[(xI - A)(T)\right] = \det B.$$

Wir wollen zeigen $f(T) = 0$, also zeigen wir

$$(\det B)(\alpha_k) = 0 \qquad \forall\, k = 1, \dots, n.$$

Nun per Definition gelten für B_{ij} und α_j:

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(\alpha_j) = 0 \qquad 1 \leq i \leq n$$

Setze $\tilde{B} := \operatorname{adj} B$

Aus (2) folgt: $\begin{cases} \forall k \\ \forall i \end{cases}$; $\tilde{B}_{ki} \left(\sum_{j=1}^{n} B_{ij} \alpha_j \right) = 0$

$$= \sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki} B_{ij} \alpha_j ,$$ ~~w~~ir summieren

über i und bekommen:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki} B_{ij} \alpha_j =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{ki} B_{ij} \right)}_{kj^{\text{te}} \text{ Koeff. von } \tilde{B}B} (\alpha_j) .$$

Nun ist $\tilde{B} B = (\det B)\, I$, also

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{ki} B_{ij} = \delta_{ij} \det B ,$$

also

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj} (\det B)(\alpha_j) .$$

$$= (\det B)(\alpha_k) \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Wichtige Bemerkung.}}$

Sei $F_0 \subseteq F_1$ eine Körpererweiterung (e.g. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$)

$A \in Mat_{n\times n}(F_0) \subseteq Mat_{n\times n}(F_1)$.

Wir bezeichnen mit

$\mathrm{Char\,Pol}_{F_0}(A)$ und $\mathrm{Min\,Pol}_{F_0}(A)$

beziehungsweise

$\mathrm{Char\,Pol}_{F_1}(A)$ und $\mathrm{Min\,Pol}_{F_1}(A)$

die Charakt. beziehungsweise Minimalpol von A jeweils als Element aus

$Mat_{n\times n}(F_0)$ und $Mat_{n\times n}(F_1)$.

Wir wollen zeigen, daß

(1) $\mathrm{Char\,Pol}_{F_0}(A) = \mathrm{Char\,Pol}_{F_1}(A)$

und

(2) $\mathrm{Min\,Pol}_{F_0}(A) = \mathrm{Min\,Pol}_{F_1}(A)$.

__Beweis:__ (1) ist einfach weil $\det(B)$ nur vom Koeffitienten der Matrix B abhängen.

(i) wir Untersuchen zunächst die folgende Frage:

(2) Wie entscheiden wir, für gegebenen köper K und natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, ob es ein Polynom $p \in K[x]$ gibt mit $\deg(p) = k$ und $p(A) = 0$ ist?

Wir Lösen einen Matrixgleichung System

$$A^k + x_{k-1} A^{k-1} + \dots + x_0 I = 0 . \quad (*)$$

(*) ist also ein Lineares gleichungssystem mit n^2 Gleichungen in der Variablen $x_0, \dots, x_{k-1}$. Jede Lösung $a_0, \dots, a_{k-1} \in K$ gibt und ein Polynom

$$p(x) := x^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j \quad \text{mit}$$

$$p(x) \in \mathcal{A}(A).$$

Wenn wir (*) (für ~~die~~ kleinste natürliche Zahl k wofür es eine Lösung gibt) gelöst haben, dann ist die Lösung $a_0, \dots, a_{k-1}$ eindeutig weil sie die eindeutig definierte

Koeffizienten

$1, a_{k-1}, \dots, a_0$

von $\underset{K}{\mathrm{MinPol}}(A)$ uns liefert.

Wir folgern:

Sei k minimal so daß ⊛ eine Lösung in K hat, dann liefert diese Lösung das MinPol(A). ▫

Nun untersuchen wir Lösungen für LGS:

(ii) Sei $B \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F_0)$ $\quad F_0 \subseteq F_1$ Körpererw.

$Y \in F_0^{m \times 1}$

Betrachte $\quad BX = Y \quad (S)$

Hat (S) eine Lösung in $F_1^{n \times 1}$

dann hat (S) auch eine Lösung in $F_0^{n \times 1}$. (und umgekehrt natürlich!)

Beweis Dies gilt weil die rZSF $(B|Y)$ (bzgl F_1) uns alles liefert bzgl Existenz von Lösungen.

Nun ist aber die rZSF eindeutig!

Also ist sie gleich bezgl F_0 ∎

Aus (i) und (ii) sehen wir daß (*)

eine Lösung $(a_0, \ldots, a_{k-1}) \in F_1^k$ gdw es

eine Lösungs $\in F_0^k$ hat.

Die eindeutigkeit des Min Pol$_{F_1}$ liefert

außerdem daß die Lösung in F_0^k

$(a_0, \ldots, a_{k-1})$ sein muss ! ∎

---

§ Trigonalisierbarkeit, Invariante Unterraüme.

Definition 1. $T \in \mathcal{L}(V,V)$ ist trigonalisierbar

falls es eine Basis $\mathcal{B}$ für V gibt so daß

$[T]_{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix

(i.e $a_{ij} = 0$ für $i > j$).

Satz 2. V endl dim, $T \in \mathcal{L}(V,V)$.

Es gilt: T is trigon. $\Leftrightarrow$ Char Pol(T) in linear Faktoren

über K ~~Z~~ zerfällt (i.e Char Pol$(T) = (x-c_1)^{n_1} \dots (x-c_k)^{n_k}$

mit $c_i \in K$).

Beweis. "$\Rightarrow$" Klar weil $[T]_{\mathcal{B}} = A$

ist Oberedreieck also $\det(xI - A)$ ist

product $\prod_{i=1}^{n} (x - a_{ii})$.

"$\Leftarrow$" Wir werden per Induktion eine Basis

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ aufbauen, in der $[T]_{\mathcal{B}}$ Oberedreieck ist.

Da T wenigstens einen EigW hat, hat T

auch einen EigV zum EigW $c_1 \in K$.

Sei $\alpha \neq 0$ solch ein EigV und ergänze zu einer

~~zu einer~~ Basis $\{\alpha, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ für V.

(geordnet so daß α der erste Vektor

davon ist).

Betrachte die Matrix Darstellung von T

diesbezüglich:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) \qquad \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \Gamma \in \operatorname{Mat}_{(n-1)\times(n-1)}(K)$$

Sei $G \in \mathcal{L}(W,W)$ wobei $W := \operatorname{Span}\{\beta_2, \dots, \beta_n\}$

definiert durch $Gw := \Gamma w$.

Wir sehen also $\operatorname{Char\,Pol}(T) = (x - c_1)\operatorname{Char\,Pol}(G)$

Da $\operatorname{Char\,Pol}(T)$ Produkt von linear

Faktoren ist, so ist auch $\operatorname{Char\,Pol}(G)$.

Die IA liefert eine Basis $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$

bezgl. der G eine Oberedreieckmatrix

Darstellung hat:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right)$$

Setze $\alpha_1 := \alpha$ und

Setze $\mathcal{B} := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.