Lineare Algebra II.

Kuhlmann.
15. Vorlesung
Am 08. 06. 2012

§ Invariante Unterräume

<u>Definition</u> $W \subseteq V$ Unterraum, $T \in \mathcal{L}(V,V)$
W ist <u>T-invariant</u> falls
$T(W) \subseteq W$.

<u>Beispiele</u>: (0) $\{0\}$ und V sind T-invariant.

(1) D Ableitung Operator auf $V = K[x]$
W Unterraum der Poly. von $\deg \leq n$
is T-invariant.

(2) Sei $U \in \mathcal{L}(V,V)$ mit $TU = UT$, dann ist

(i) $W := \mathrm{Im}(U)$ (ii) $N := \mathrm{Ker}(U)$

sind T-invariant

Bew. (i) Sei $\alpha \in \mathrm{Im}\, U$; $T(\alpha) = T(U(\beta)) = U(T(\beta))$
$\alpha = U(\beta)$
$\in \mathrm{Im}\, U$

(ii) $\alpha \in N$; $U(T(\alpha)) = T(U(\alpha)) = T(0) = 0$
$\Rightarrow T(\alpha) \in N$

(ÜA) (3) $W \subseteq V$ T-invariant $\Rightarrow$ W $g(T)$ invariant für $g \in K[x]$.

(4) für $g \in K[x]$ gilt $g(T)\,T = T\,g(T)$,
$U := g(T)$

Insbesonders für $U := cI - T$; also ist

$\ker(T - cI)$ T-invariant;

Eigenraum zum Eigenwert c ist T-invariant.

(5) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Wir behaupten: nur $\{0\}$ und $V = \mathbb{R}^2$ sind

T invariant (für $T = T_A$).

Sei $\underbrace{W \neq V, \quad W \neq \{0\}}$ T-invariant,

es gelte aber dann daß $\dim W = 1$

Sei $\alpha \neq 0$; $\alpha \in W$; $\{\alpha\}$ ist eine Basis

und damit ein Eigenvektor. A hat aber

keine reelle Eigenwerte. $\blacksquare$

<u>Der Operator $T|_W := T_W$</u>

Sei W T-invariant; dann ist $T_W \in \mathcal{L}(W, W)$.

Matrix Darstellung von T_W:

Sei V endl. dim, $W \subseteq V$ T-invariant
dim $W = r$.

$\mathcal{B}' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ Basis für W

ergänze zu

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ Basis für V

Betrachte $A := [T]_{\mathcal{B}}$, wir haben die Gleichungen

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\,\alpha_i$$

W T-inv $\Rightarrow$ $T\alpha_j \in W$ für $j \le r$

Also $T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{r} A_{ij}\,\alpha_i$ für $j \le r$

d.h. $A_{ij} = 0$ für $j \le r$
und $i > r$

Also sieht A so aus

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

wobei B $r \times r$
C $r \times (n-r)$
D $(n-r) \times (n-r)$
sind.

Es ist darüberhinaus klar, daß $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$.

Lemma 1. Sei V K-VR, $\dim V < \infty$

$T \in \mathcal{L}(V,V)$, $W \subseteq V$ T-invariant; also $T_W \in \mathcal{L}(W,W)$

Es gelten:

(i) Char Pol T_W teilt Char Pol T

(ii) Min Pol T_W teilt Min Pol T.

Beweis: (i) ist klar weil

$$A = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T_W]_{\mathcal{B}'} & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$ und somit ist

$\det(xI - A) = \det(xI - B) \det(xI - D)$.

(ii) Beachte daß

$$A^k = \begin{bmatrix} B^k & C_k \\ 0 & D^k \end{bmatrix}$$ wobei C_k ist $r \times (n-r)$.

Also jedes Polynom das A annihiliert, annihiliert auch damit B.

Also Min Pol (B) teilt Min Pol (A). ∎

Wir werden in der nächsten Vorlesung die Matrix D genauer untersuchen.