Lineare Algebra II

– Kuhlmann –

16. Vorlesung

am 15. 06. 2012

Erinnerung (Quotientenraum) und direkte Summen.
aus LA I:

1. Sei $W \subseteq V$ Unterraum.

$$V/W = \{\alpha + W \mid \alpha \in V\} \quad \text{mit} \quad c(\alpha + W) = c\alpha + W$$

für $c \in K$ und

$$(c\alpha + W) + (\beta + W) = (c\alpha + \beta) + W \quad \text{für } \alpha, \beta \in V.$$

Bezeichnung: $\alpha + W := \bar{\alpha}$

2. Kanonischer Homomorphismus

$$\pi : V \twoheadrightarrow V/W$$

$$\pi(\alpha) := \alpha + W$$

ist surjektiv mit $\operatorname{Ker} \pi = W$

3. Isomorphiesatz:

Sei $\varphi : V \to U$ Homomorphismus von K-VR
Es gilt $V/_{\operatorname{Ker}\varphi} \cong \operatorname{Im} \varphi$.

4. $W_1, W_2 \subseteq V$ unterräume,

$V = W_1 \oplus W_2$ (direkte Summe)

falls

$V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

D.h: $\forall \alpha \in V \quad \exists!\, w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$

so daß $\alpha = w_1 + w_2$.

Projektion Homomorphismus:

$$\pi : W_1 \oplus W_2 \twoheadrightarrow W_2$$

$$\pi(w_1 + w_2) := w_2$$

ist surjektiv mit $\ker \pi = W_1$.

Also gilt

$$\frac{W_1 \oplus W_2}{W_1} \simeq W_2.$$

---

5. Die Abbildung

$$\overline{T} : V/_W \longrightarrow V/W$$

wird so definiert:

für $W \subseteq V$ T-invariant und wobei $T \in \mathcal{L}(V,V)$

$$\overline{T}(\overline{\alpha}) = \overline{T}(\alpha + W) := T(\alpha) + W = \overline{T(\alpha)}$$

Sie ist wohldefiniert i.e

$$\alpha_1 + W = \alpha_2 + W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W$$

weil $\alpha_1 - \alpha_2 \in W \Rightarrow T(\alpha_1 - \alpha_2) \in W$

$\Rightarrow T(\alpha_1) - T(\alpha_2) \in W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W.$

Sie ist auch linear (ÜA)

also $\overline{T} \in \mathcal{L}(V/W, V/W)$ ∎

Satz. Sei V endl. dim, $W \subseteq V$,

$T \in \mathcal{L}(V, V)$ und W T-invariant.

Sei $\mathcal{B}'$ eine Basis für W, ergänze

zu einer Basis $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \,\dot{\cup}\, \mathcal{B}''$ von V.

Es gilt:

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$ wobei $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$

und $D = [\overline{T}]_{\overline{\mathcal{B}''}}$

$\left(\overline{\mathcal{B}''} := \{\overline{\alpha} \,;\, \alpha \in \mathcal{B}''\}\right).$

Wir brauchen ein Lemma: Sei V endl. dim,

(1) Sei $W \subseteq V$ Unterraum;

$\mathcal{B}' \subseteq W$ Basis für W; $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ ergänz. Basis für V,

dann ist $\overline{\mathcal{B}''}$ eine Basis für V/W.

(2) Umgekehrt sei $\{\overline{\alpha_{r+1}}, \dots, \overline{\alpha_n}\}$

eine Basis für V/W;

dann ist

$\mathcal{B}' \cup \{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ Basis für V.

$\boxed{\text{ÜA - ÜB.}}$ ▣

Beweis vom Satz. setze $r := \dim W$; B ist $r \times r$.

Also ist $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$.

- Die Aussage über B ist bereits in der 15. Vorlesung bewiesen worden.

- Wir analysieren die $(n-r) \times (n-r)$ Matrix D.

Die Matrix $A = [T]_{\mathcal{B}}$ ist durch die folgende Gleichungen definiert:

$$(*)\quad T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\,\alpha_j \qquad 1 \le i \le n$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c}
\underset{r \times r}{B} & [T(\alpha_{r+1})]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}} \\
\hline
 & & &
\end{array}\right)$$

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{\alpha_1, \dots, \alpha_r}_{|\mathcal{B}'| = r},\ \underbrace{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n}_{|\mathcal{B}''| = (n-r)}\}$$

$$\overline{\mathcal{B}''} = \underbrace{\{\overline{\alpha_{r+1}}, \dots, \overline{\alpha_n}\}}_{|\mathcal{B}''| = n-r}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c}
 & A_{1\,r+1} & & A_{1n} \\
B & \vdots & & \vdots \\
 & A_{r(r+1)} & & A_{rn} \\
\hline
 & A_{(r+1)(r+1)} & \cdots & A_{(r+1)n} \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & A_{n(r+1)} & & A_{nn}
\end{array}\right)$$

oder

$$(**)\quad T(\alpha_i) = \underbrace{\sum_{j=1}^{r} A_{ji}\,\alpha_j}_{\in W} + \sum_{j=r+1}^{n} A_{ji}\,\alpha_j \qquad \text{und damit}$$

$1 \le i \le n$

ist:

$$\overline{T(\alpha_i)} = \sum_{j=r+1}^{n} A_{ji}\,\overline{\alpha_j} = \overline{T}(\overline{\alpha_i}) \qquad \text{für } r+1 \le i \le n$$

$\blacksquare$

Korollar 1 $\quad \text{Char Pol } T = (\text{Char Pol } T_W)(\text{Char Pol } \overline{T})$ ∎

(Für Mini Pol T siehe ÜB 8 Aufgabe 8.2) ∎

Korollar 2 $\quad T$ ist trigonalisierbar gdw Char Pol zerfällt über K in Produkt von linearen Faktoren.

Bem: Wir haben schon diese Tatsache bewiesen, hier geben wir kurz einen zweiten Beweis (mit T_W und $\overline{T}$).

Beweis. "$\Rightarrow$" wie in 1. Beweis

"$\Leftarrow$" Per Induktion (nach dim V) [Wir wollen eine Basis $\mathcal{B}$ für V so daß die Matrix Darst. von T Dreieck.]

I. Anfang: $n = 1$ ist trivial

I. Annahme: gilt für $n-1$.

Sei c_1 ein Eigenwert von T und $\alpha_1 \neq 0$ ein Eigenvektor dazu

Setze $W := \{c\alpha_1 \; ; \; c \in K\}$. Es ist klar daß

W ist T-invariant.

Betrachte V/W und $\overline{T} \in \mathcal{L}(V/W, V/W)$

Nun ist $\dim V/W = (n-1)$.

Wir haben

$$(+) \quad \text{Char Pol } T = (\text{Char Pol } T_W)(\text{Char Pol } \overline{T}).$$

$T_W \in \mathcal{L}(W, W)$, und $T_W(\alpha) = c_1 \alpha \qquad \forall \alpha \in W$

$\left(\begin{array}{l} \text{weil } T(\alpha) = T(c\alpha_1) = cT(\alpha_1) = c c_1 \alpha_1 = c_1 c \alpha_1 \\ \alpha = c\alpha_1 \end{array} \right)$

Also ist $A_W := [T_W]_{\{\alpha_1\}} = [c_1]$ und

$$\det(xI - A_W) = \det(x \cdot 1 - c_1) = (x - c_1).$$

Also mit $(+)$ bekommen wir

$$\text{Char Pol } T = (x - c_1) \text{ Char Pol } \overline{T}$$

Wir sehen also daß auch Char Pol $\overline{T}$ ein Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt. Die I. Annahme liefert nun eine Basis $\overline{\beta}_2, \ldots, \overline{\beta}_n$ von V/W wofür die Matrix Darstellung von $\overline{T}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Setze $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$. ∎

Nun betrachten wir diese Aussage für

Min Pol (T).

<u>Korollar 3</u> : sei V endl dim, $T \in \mathcal{L}(V,V)$.

T ist trigonalisierbar gdw Min Pol (T)

ein Produkt von linearen Faktoren über K

zerfällt.

Beweis: Wir zeigen: Char Pol (T) zerfällt in Produkt von linearen Faktoren über K

gdw

Min Pol (T) zerfällt in Produkt von lineare Faktoren über K.

"$\Rightarrow$" Min Pol (T) teilt Char Pol (T). Da lineare Faktoren irreduzible sind folgt es aus der Eindeutigkeit der Primfaktorisierung in $K[x]$ daß auch Min Pol (T) Produkt von lin. Faktoren ist.

"$\Leftarrow$" Sei $\text{Min Pol}(T) = \prod_{i=1}^{k} (x - c_i)^{\nu_i}$

Min Pol (T) teilt Char Pol (T) und beide Polynome haben dieselben NS in K (und in jeder

Körpererweiterung).

Also $\text{Char Pol}(T) = \text{Min Pol}(T)\ q(x)$

$q(x) \in K[x]$, nun ist $q(x)$ reduzibel

in einer alg. abg. Körpererweiterung $\mathbb{C} \supseteq K$

und zerfällt in Produkt

$$q(x) = \prod_{j=1}^{\ell} (x - d_j) \quad \text{über } C.$$

Wir behaupten daß d_j bereits in K

liegen und $d_j = c_i$ für geeignetes i.

Dies gilt weil d_j sonst eine NS

von $\text{Min Pol}(T)$ wäre mit $d_j \in C \setminus K$

(i.e $d_j \in C$ aber $d_j \notin K$).

Dies ist aber unmöglich da

$\text{Min Pol}(T)$ bereits alle seine NS

in K hat. $\blacksquare$