- Lineare Algebra II -

- Kuhlmann -

17. Vorlesung.

Am 18. 06. 2012.

---

§ **Direkte Summen.**

Lemma Sei V K-VR, $W_1, \ldots, W_k$ Unterräume.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

ü A – ü B.

(i) $W_1, \ldots, W_k$ sind unabhängig, d.h

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0 \ \left(\text{mit } \underset{1 \leq i \leq k}{\alpha_i \in W_i}\right) \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i.$$

(ii) $W_j \cap (W_1 + \cdots + W_{j-1}) = \{0\}$

für $2 \leq j \leq k$

(iii) Ist $\mathcal{B}_i$ Basis für W_i so ist

$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ Basis für V.

Notation: Wir schreiben $V = W_1 + \cdots + W_k$ wenn V nur die Summe der W_i's ist und $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ falls

$V = W_1 + \dots + W_k$ und eine der äquivalente

Bedingungen (i), (ii) oder (iii) gilt.

Im dem Fall ~~h~~ heißt V die <u>direkte Summe</u>

der W_i's.

<u>Satz (Primzerlegung von V bezgl T).</u>

Sei V K-VR, $\dim V < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V, V)$

$\text{Min Pol}(T) = p = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$

(wobei p_i verschiedene normierte irreduzible in $K[x]$ Polynome und $r_i \in \mathbb{N}$)

die Primfaktorisierung in $K[x]$ von p.

Setze $W_i := \ker p_i(T)^{r_i}$ $1 \leq i \leq k$.

Es gilt: W_i sind T-invariant (siehe 15. Vorlesung)

und (i) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$

(ii) $\text{Min Pol}(T|_{W_i}) = p_i^{r_i}$ für $1 \leq i \leq k$.

Wir beweisen den Fall $k=2$ (der allgemeiner Fall folgt per Induktion nach k).

<u>Proposition</u>: Sei $\dim V < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V,V)$

$\operatorname{MinPol}(T) = m = m_1 m_2$ mit $ggT(m_1, m_2) = 1$.

Setze $V_i := \ker m_i(T)$ $\quad i = 1, 2$

Es gilt $V = V_1 \oplus V_2$ und $\operatorname{MinPol}(T/V_i) = m_i$ $\quad i = 1, 2$.

<u>Beweis.</u> Da m_1, m_2 relativprim sind,

$\exists\, q_1, q_2 \in k[x]$ mit

$$1 = m_1 q_1 + m_2 q_2$$

also $\quad I = m_1(T)\, q_1(T) + m_2(T)\, q_2(T) \quad (*)$.

<u>Beh.</u> $V_1 = \operatorname{Im} m_2(T)$ und $V_2 = \operatorname{Im} m_1(T)$.

<u>Bew</u> $\underset{\substack{\uparrow \\ m \text{ Min Pol}}}{0 =} m(T) = m_1(T)\, m_2(T)$

also $\operatorname{Im} m_2(T) \subseteq \ker m_1(T)$.

Umgekehrt sei $v \in \ker m_1(T)$, mit $(*)$ gilt

$$v = \underbrace{q_1(T)\, m_1(T)(v)}_{\doteq\, 0} + \underbrace{m_2(T)\, \overline{q_2(T)(v)}}_{\in \operatorname{Im} m_2(T)}$$

$\square$

Wir zeigen $V = V_1 \oplus V_2$

1. Summe: $v \in V_1$ mit (*) gilt

$$v = \underbrace{m_1(T)\, q_1(T)\, v}_{\in \operatorname{Im} m_1(T)} + \underbrace{m_2(T)\, q_2(T)\, v}_{\in \operatorname{Im} m_2(T)}.$$

2. Direkt: sei $v \in V_1 \cap V_2$, mit (*) gilt

$$v = \underbrace{q_1(T)\, m_1(T)(v)}_{= 0 \text{ weil } v \in V_1} + \underbrace{q_2(T)\, m_2(T)(v)}_{= 0 \text{ weil } v \in V_2}. \quad \blacksquare$$

Sei nun $\tilde{m}_i = \operatorname{Min\,Pol}\, T\big|_{V_i}$ $\qquad i = 1, 2$

Da $V_i = \ker m_i(T)$ ist es klar daß

$$m_i(T|_{V_i}) = 0 \qquad i = 1, 2$$

also $\qquad \tilde{m}_1 \mid m_1$ und $\qquad$ (**)

$\qquad\quad\;\; \tilde{m}_2 \mid m_2$

<u>Beh.</u> $\tilde{m}_1 \tilde{m}_2$ annihiliert T.

<u>Bew.</u> Berechne

$$\tilde{m}_1(T)\,\tilde{m}_2(T)(v_2 + v_1) = \tilde{m}_1(T)\left[\tilde{m}_2(T)(v_2) + \tilde{m}_2(T)(v_1)\right]$$

$v_2 \in V_2$, $v_1 \in V_1$

$= \tilde{m}_1(T)\,(0 + \underbrace{\tilde{m}_2(T)(v_1)})$

$\in V_1$ weil V_1 $\tilde{m}_2(T)$-

invariant ist,

siehe 15. Vor.

$= 0.$ $\square$

Da $\tilde{m}_2 \tilde{m}_1$ annihiliert T folgt

$m_1 m_2 = m \mid \tilde{m}_1 \tilde{m}_2$. (***)

Da m_1, m_2 relativprim folgt nun aus (**) und (***)

daß $\tilde{m}_i = m_i \quad i = 1, 2.$ $\square$

Sonderfall: p_i ist linear und

$$p = (x - c_1) \dots (x - c_k)$$

mit $c_i \neq c_j$ für $1 \leq i \neq j \leq k$

Hier ist $W_i = \ker(T - c_i I)$ = Eigenraum zum Eigenwert c_i.

So Primzerlegungsatz besagt:

$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, also hat V eine Basis aus Eigenvektoren, und damit ist T diagonalisierbar.

Wir haben damit die Umkehrung (von Prop 1. 13. Vor. 01.06.2012) nun gezeigt. Wir haben also bewiesen:

Satz (Diag. Kriterium für Min Pol).

T ist diag $\Leftrightarrow$ Min Pol(T) zerfällt in verschiedenen lineare Faktoren über $K[x]$.

---

§ Jordan Ketten

Definition: Sei $T: V \to V$ linear, c EigW, $v_1 \neq 0$; $v_2, \dots, v_r \in V$.

$(v_1, \dots, v_r)$ heißt **Jordan Kette** wenn

$$(T - cI)(v_1) = 0 \qquad (v_1 \text{ EigV zum } c)$$

und

$$(T - cI)(v_i) = v_{i-1} \qquad i = 2, \dots, r.$$

üA üB

Lemma: Sei $(v_1, \dots, v_r)$ J.K. Es gelten für $W = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$:

(i) $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_r\}$ ist eine Basis für W,

(ii) W ist T-invariant und

(iii) $[T_W]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & c \end{pmatrix}$ ← Jordan Zelle

---