Lineare Algebra II

Kuhlmann

18. Vorlesung

Am 22. 06. 2012.

---

1. V K-VR, $T \in \mathcal{L}(V,V)$, $c \in K$ EigW, $l \in \mathbb{N}$, $v_i \in V$:
$(v_1, \dots, v_l)$ ist eine J. K. der Länge l
zum EigW. c falls

$$(T - cI)\, v_i = v_{i-1} \qquad i = 2, \dots, l$$
$$(T - cI)\, v_1 = 0 \qquad \text{und } v_1 \neq 0.$$

2. $(v_1, \dots, v_l)$ J. K $\Rightarrow \underbrace{\{v_1, \dots, v_l\}}_{:= \mathcal{B}'}$ lin. unab.

$W = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_l\}$ ist T-invariant und

$\boxed{\text{üB \#9}}$

$$[T|W]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & c \end{pmatrix} \leftarrow J_l(c) :=$$

$l \times l$

Jordanzelle der Dimension l zum EigW c.

3. $\underbrace{W \subseteq V,\ W' \subseteq V}_{\text{Unterraum}}$; W' ist Komplement von W in V

falls
$$V = W \oplus W'$$

Bem: (i) Komplemente existieren und sind i.a. nicht eindeutig.

(ii) Sei $W \subseteq V$ Unterraum

$v_1^1, \dots, v_s^1 \in V$ lin. unab sodaß

ÜB #9

$\operatorname{span}\{v_1^1, \dots, v_s^1\} \cap W = \{0\}$.

Dann kann man $\{v_1^1, \dots, v_s^1\}$ zu einer Basis von Komplement von W in V ergänzen.

Satz (Jordan Normal Form)

Sei V K-VR, $\dim V < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V,V)$, sei $\operatorname{Min\,Pol}(T) = (x-c)^r$ $c \in K$.

Dann hat V eine Basis aus J. K zum EigW c. Die längste Ketten haben Länge r, die Anzahl der Ketten in jeder Länge ist eindeutig bestimmt.

Beweis Beh. seien $v^1, \dots, v^s \in \ker(T - cI)^j$

lin. unab und

$$\operatorname{span}\{v^1, \dots, v^s\} \cap \ker(T - cI)^{j-1} = \{0\}$$

then

$$w^1 := (T - cI)v^1, \dots, w^s := (T - cI)v^s \in$$

$\ker(T - cI)^{j-1}$, sind l. unab und

$$\operatorname{span}\{w^1, \dots, w^s\} \cap \ker(T - cI)^{j-2} = \{0\}.$$

<u>Bew der Beh.</u>

$$0 = (T - cI)^j v^i = (T - cI)^{j-1} \underbrace{(T - cI)v^i}_{w^i}$$

Also $w^i \in \ker(T - cI)^{j-1}$. ✓

Sei nun $\sum_{i=1}^{s} c_i w^i = 0$ so $\sum_{i=1}^{s} c_i (T - cI)v^i = 0$

$c_i \neq 0$
für ein
i

so $(T - cI) \sum_{i=1}^{s} c_i v^i = 0$.

Also $\sum_{i=1}^{s} c_i v^i \in \ker(T - cI)^{j-1}$ weil

$$(T - cI)^{j-1}\left(\sum c_i v^i\right) = (T - cI)^{j-2} \underbrace{(T - cI)\left(\sum c_i v^i\right)}_{0} = 0$$

Also ist

$$\sum_{i=1}^{s} c_i v^i \in \operatorname{Span}\{v^1, \dots, v^s\} \cap \ker(T-cI)^{j-1}$$

Also ist $\sum_{i=1}^{s} c_i v_i = 0$ with $c_i \neq 0$ für ein i

$\lightning$ da $\{v_1, \dots, v_s\}$ lin. unab.

Betrachte nun $\sum c_i w^i$ so daß

$(T-cI)^{j-2}\left(\sum c_i w^i\right) = 0$ dann ist

$(T-cI)^{j-1}\left(\sum c_i v^i\right) = 0$ so

$\sum c_i v^i = 0$ so $(T-cI)\left(\sum c_i v^i\right) = 0$

also $\sum c_i (T-cI) v^i = 0 = \sum c_i w^i$ $\blacksquare$ Beh

Wir bauen nun J. K folgendermassen.

(Beachte daß $\ker(T-cI) \subseteq \dots \subseteq \ker(T-cI)^r = V$)

Betrachte

$$V = V_r \oplus \ker(T-cI)^{r-1}$$

$n_r = \dim\ker(\ )^r - \dim\ker(\ )^{r-1}$

sei $\{v_r^1, \dots, v_r^{n_r}\}$ Basis für V_r.

Setze $v_{r-1}^1 := (T-cI)v_r^1, \ldots, v_{r-1}^{n_r} := (T-cI)v_r^{n_r}$

$\in \ker(T-cI)^{r-1}$

Betrachte nun

$\ker(T-cI)^{r-1} = V_{r-1} \oplus \ker(T-cI)^{r-2}$

ergänze zu einer Basis von Komplement

von $\ker(T-cI)^{r-2}$ in $\ker(T-cI)^{r-1}$:

$\{v_{r-1}^1, \ldots, v_{r-1}^{n_r}, v_{r-1}^{n_r+1}, \ldots, v_{r-1}^{n_r+n_{r-1}}\}$

Also

$n_{r-1} =$

$\dim \ker(\quad)^{r-1} - \dim \ker(\quad)^{r-2} - n_r.$

Wir verfahren so weiter, im letztem Schritt

bekommen wir

$v_1^1 = (T-cI)v_2^1, \ldots, v_1^{n_r+\ldots+n_2} = (T-cI)v_2^{n_r+\ldots+n_2}$

welches wir zu eine Basis von $\ker(T-cI)$

ergänzen:

$v_1^1, \ldots, v_1^{n_r+\ldots+n_2}, v_1^{n_r+\ldots+n_2+1}, \ldots, v_1^{n_r+\ldots+n_2+n_1}$

Hier ist die Gestalt der Gesammt Basis für V die wir erhalten:

$v_r^1, \dots, v_r^{n_r}$		
$v_{r-1}^1, \dots, v_{r-1}^{n_r},$	$v_{r-1}^{n_r+1}, \dots, v_{r-1}^{n_r+n_{r-1}}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$v_1^1, \dots, v_1^{n_r},$	$v_1^{n_r+1}, \dots, v_1^{n_r+n_{r-1}}, \dots,$	$v_1^{n_r+\dots+n_2+1}, \dots, v_1^{n_r+\dots+n_2+n_1}$
n_r J. K der Länge r	n_{r-1} J. K der Länge $r-1$, ...,	n_1 J. K der Länge 1. ∎

Bemerkung: Die Matrix Darstellung in der Basis der J. K ist:

$$A_c := \begin{pmatrix} \underbrace{J_r(c) & & \\ & \ddots & \\ & & J_r(c)}_{n_r \text{ mal}} & & & & & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ 0 & & & & \underbrace{J_1(c) & & \\ & \ddots & \\ & & J_1(c)}_{n_1 \text{ mal}} \end{pmatrix}$$

Korollar: Sei V K-VR, $\dim V < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V,V)$.
Falls
Min Pol(T) (oder Char Pol(T)) zerfällt über K,
dann hat V eine Basis von J. K zu den
verschiedenen EigW. Die Anzahl der J. K
in jeder Länge ist eindeutig bestimmt.

Beweis:

$$\text{Min Pol}(T) = (x-c_1)^{r_1} \dots (x-c_k)^{r_k} \quad ;$$

Prim Zerlegung satz $\Rightarrow$

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$$

mit W_i invariant und

$$\text{Min Pol } T/_{W_i} = (x-c_i)^{r_i}$$

Jordan NF liefert Basen $\mathcal{B}_{c_i}$

von J. K für T/W_i und jeden c_i.

Setze $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{c_i}$ (die geordnete Basis). ∎

Bemerkung: ÜA ÜB #9

Sei $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, W_i T-inv.

$\mathcal{B}_i$ = Basis für W_i ; $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{c_i}$ (die geord. Basis)

Es gilt

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

wobei $A_i = [T|W_i]_{\mathcal{B}_i}$.

<u>Korollar</u>: Sei K alg. abg., V K-VR $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V so daß

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{c_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{c_k} \end{pmatrix}$$

wobei $c_1, \dots, c_k$ die EigW von T sind und A_{c_i} wie in S. 6 beschrieben. ▣