Lineare Algebra II

Kuhlmann

19. Vorlesung.

Am 25.06.2012.

Sei $K = \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$. V K-VR mit $(x|y) \in K$.

<u>Bemerkung:</u> $(x|x) = \overline{(x|x)}$, also ist
$(x|x) \in \mathbb{R}$.

Erinnerung:

Definition: Ein inneres Produkt auf V ist eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow K$$
$$(x, y) \longmapsto (x|y)$$

so daß

(1) $(x|y) = \overline{(y|x)}$

(2) $(c_1 x_1 + c_2 x_2 | y) = c_1 (x_1|y) + c_2 (x_2|y)$

(3) $(x|x) \geq 0$ und $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

<u>Notation:</u>

$(x|x) := \|x\|^2$ und $\|x\| := \sqrt{(x|x)}$ (Norm von x).

<u>Bem.:</u> (i) Es gilt

$$\|cx\| = |c| \, \|x\|.$$

(ii) (2') $(x | c_1 y_1 + c_2 y_2) = \overline{(c_1 y_1 + c_2 y_2 | x)} =$

$\overline{c_1 (y_1|x) + c_2 (y_2|x)} = \bar{c}_1 \overline{(y_1|x)} + \bar{c}_2 \overline{(y_2|x)} =$

$\bar{c}_1 (x|y_1) + \bar{c}_2 (x|y_2)$.

Terminologie:

$K = \mathbb{R}$ } V heißt **Euklischerraum** und das innere Produkt $(\,|\,)$ } heißt **symmetrisch bilineare positive definite Form**.

$K = \mathbb{C}$ V heißt { **Hermitescherraum** / **Unitärerraum** } und das innere Produkt $(\,|\,)$ ist **Hermitesch symmetrisch** (1) **konjugiert bilinear** (2) und (2') **positive definite Form** (3)

Beispiel auf $V = K^n$ Das Standard Inneres Produkt

$x = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \bar{\eta}_i$$

Definition

(i) x, y sind **orthogonal** falls $(x|y) = 0$

(äquivalent $(y|x) = 0$).

(ii) $W_1, W_2 \subseteq V$ sind **orthogonal** falls

$$(x|y) = 0 \quad \forall x \in W_1, \ \forall y \in W_2$$

(iii) $S \subseteq V$ ist orthonormal falls

$$(x|y) = 0 \quad \text{wenn} \quad x \neq y$$
$$(x|y) = 1 \quad \text{wenn} \quad x = y.$$

Also $S = \{x_1, ..., x_n\}$ ist orthon. falls

$$(x_i | x_j) = \delta_{ij}$$

(IV) S orthonormal ist vollständig falls

S maximal (bezüglich Inklusion) mit der

Eigenschaft " orthonormal " ist.

Bem. (i) S orthon. $\Rightarrow$ S. l. u.

Bew. $\sum c_i x_i = 0 \Rightarrow 0 = (\sum c_i x_i | x_j) = \sum c_i (x_i | x_j) = c_j$.

(ii) Dim $V = n \Rightarrow |S| \leq n$ für S orthon.

Im diesem Fall:

Definition orthog. Dim $(V) = \max\{|S| \mid S \text{ orthon.}\}$.

Bem. orthog Dim $(V) \leq$ Dim (V).

Notation. $S^\perp := \{x \in V \mid (x|s) = 0 \quad \forall s \in S\}$

Bem. (i) $S^\perp$ ist Unterraum: Seien $x_1, x_2 \in S^\perp$, $c \in K$

Bew. $0 = (0|y) \Rightarrow \{0\} \subseteq S^\perp$; $(x_1 + c x_2 | s) = (x_1|s) + c(x_2|s)$
$= 0 + 0 = 0.$

(iii) $S \subseteq (S^\perp)^\perp := S^{\perp\perp}$

(iv) $\operatorname{Span}(S) \subseteq S^{\perp\perp}$

Definition : $W \subseteq V$ unterraum
$W^\perp :=$ orth. Komplement.

Satz 1 (Bessel's ungleichung)

Sei $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ orthon., $x \in V$.

Setze $c_i := (x | x_i)$. Es gelten

(i) $\sum_i |c_i|^2 \leq \|x\|^2$

(ii) $x' := x - \sum c_i x_i$

ist orthogonal zu x_j $(j = 1, \dots, n)$.

Bew: $0 \leq (x' | x') = \left(x - \sum c_i x_i \,\middle|\, x - \sum c_i x_i \right) =$

$(x|x) - \sum_i c_i (x_i | x) - \sum_i \overline{c_i} (x | x_i)$

$+ \sum_{i,j} c_i \overline{c_j} (x_i | x_j) =$

$\|x\|^2 - \sum_i c_i \overline{c_i} - \sum_i \overline{c_i} c_i + \sum_i c_i \overline{c_i}$

$= \|x\|^2 - \sum_i |c_i|^2$. Damit ist (i) bewiesen.

$$(x' \mid x_j) = (x \mid x_j) - \sum_i c_i (x_i \mid x_j) = c_j - c_j = 0$$

damit ist (ii) bewiesen ∎

Satz 2 (Char. von Vollständigkeit).

Sei $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ orthon. Folgende sind äquivalent:

(i) S ist vollständig

(ii) Aus $(x \mid x_i) = 0$ $\forall\, i = 1, \dots, n$ folgt $x = 0$

(iii) $\operatorname{span} S = V$

(iv) $\forall x \in V: \quad x = \sum_i (x \mid x_i)\, x_i$

(v) $\forall x, y \in V: \quad (x \mid y) = \sum_i (x \mid x_i)(x_i \mid y)$

(vi) $\forall x \in V: \quad \|x\|^2 = \sum_i |(x \mid x_i)|^2$

Beweis.

(i) ⇒ (ii) $x \neq 0$ setze $x_{n+1} := \frac{x}{\|x\|}$

Dann ist $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ orthon.

$$\left[(x_{n+1} \mid x_i) = 0 \text{ und } (x_{n+1} \mid x_{n+1}) = \frac{1}{\|x\|^2} (x \mid x) = 1 \right].$$

(ii) ⇒ (iii) Sei $x \in V$, $x \notin \operatorname{span} S$ dann ist $x' = x - \sum (x \mid x_i)\, x_i \neq 0$ und (Satz 1) ist zu jedem x_i orthogonal. Widerspruch

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sei $x \in V$ $\qquad x = \sum c_i x_i$ also

$$(x|x_j) = \sum c_i (x_i | x_j) = c_j .$$

(iv) $\Rightarrow$ (v)

$$\left(\sum_i (x|x_i) x_i \,\middle|\, \sum_j (y|x_j) x_j \right) =$$

$$\sum_{i,j} (x|x_i) \overline{(y|x_j)} (x_i|x_j) = \sum_i (x|x_i)(x_i|y)$$

(v) $\Rightarrow$ (vi) $\quad (x|x) = \sum_i (x|x_i)(x_i|x)$

$$= \sum_i (x|x_i) \overline{(x|x_i)}$$

$$= \sum_i |(x|x_i)|^2$$

(vi) $\Rightarrow$ (1) Sei $x \notin S$ $\qquad$ wenn $S \cup \{x\}$ orthon. dann

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x|x_i)|^2 = 0 = (x|x) \neq 1$$

Widerspruch. $\qquad \square$

<u>Satz 3</u> (Schwarz)

$$|(x|y)| \leq \|x\| \, \|y\|$$

<u>Bew</u>: $y = 0$ ✓ . Sei $y \neq 0$; $y_1 := \frac{y}{\|y\|}$

ist orthonormal und Bessel impliziert

$$|(x|y_1)|^2 \leq \|x\|^2$$

also $\frac{1}{\|y\|^2} |(x|y)|^2 \leq \|x\|^2$

$$\Rightarrow \quad |(x|y)|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \quad . \quad \boxtimes$$

<u>Definition</u> : $\delta(x,y) := \|x-y\|$

Proposition 1.

(i) $\delta(x,y) = \delta(y,x)$

(ii) $\delta(x,y) \geq 0$; $\delta(x,y) = 0 \iff x = y$

(iii) $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$ $\quad \Delta$ Ungl.

(iv) $\delta(x,y) = \delta(x+z, y+z)$.

<u>Beweis</u>: In der 20. Vorlesung. $\boxtimes$

Ein Inneres Produkt definiert also auch eine Norm:

<u>Bem und Definition</u> $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, V K-VR

$$V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$x \longmapsto \|x\|$$

ist eine <u>Norm</u> falls

(i) $x = 0 \iff \|x\| = 0$ (ii) $\|cx\| = |c| \, \|x\|$ (iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. $\boxtimes$