Lineare Algebra II.

– Kuhlmann –

2. Vorlesung
20. 04. 2012

NB: $f \in K[\![x]\!]$ definiere

$$\text{Support } f := \{ n \in \mathbb{N}_0 \,;\, f_n \neq 0 \}$$

(i) Support $f = \emptyset$ gdw $f = 0$

(ii) Support f ist endlich gdw $f \in K[x]$

(iii) $f \neq 0$ Support f endlich;

es gilt $\deg f = \max \text{ support } f$.

Definition: $f : K \to K$ ist eine <u>polynomiale Funktion</u> falls es $c_0, \dots, c_n \in K$ gibt sodass

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n \quad \forall x \in K.$$

NB: eine polynomiale Funktion ist etwas anders als ein Polynom. Wir werden die Beziehung genau analysieren.

Satz 1. Seien $f, g \in K[x]$; $f, g \neq 0$

Es gilt

(i) $fg \neq 0$

(ii) $\deg(fg) = \deg f + \deg g$.

(iii) fg normiert falls f und g normiert sind.

(iv) fg Skalar $\Leftrightarrow$ f und g Skalar sind.

(v) falls $f+g \neq 0$:

$$\deg(f+g) \leq \max(\deg f, \deg g).$$

Beweis. Sei $\deg f := m$ und $\deg g := n$

Beh: $$\left.\begin{array}{l} (*)\ (fg)_{m+n} = f_m g_n \\ \text{und} \\ (**)\ (fg)_{m+n+k} = 0 \\ k > 0 \end{array}\right\}$$

Wir berechnen

$$(fg)_{m+n+k} = \sum_{i=0}^{m+n+k} f_i \, g_{m+n+k-i}$$

Welche Beiträge sind ungleich Null?

$$f_i\, g_{m+n+k-i} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} i \leq m & (f_i \neq 0) \\ \text{und} & \\ m+n+k-i \leq n & \text{also} \\ m+k \leq i & \end{cases}$$

Das heißt: $f_i\, g_{m+n+k-i} \neq 0 \Rightarrow m+k \leq i \leq m$

i.e $k = 0$ und $m = i$,

wie behauptet.

Nun (*) und (**) implizieren unmittelbar

(i), (ii), (iii), auch (i) und (ii) implizieren

(iv). (V): ÜA, ÜB. ∎

Korollar 1 $K[x]$ ist kommutative K-Algebra mit Einheit.

Bew. $K[x]$ Unterraum von $K[\![x]\!]$.
Es genügt also zu prüfen daß
$K[x]$ abgeschlossen unter Produkte ist,
i.e $f, g \in K[x] \Rightarrow fg \in K[x]$.
Dieses folgt aus Satz 1 (ii). ∎

Koroller 2 $f, g, h \in K[x]$; $f \neq 0$.

Aus $fg = fh$ folgt $g = h$.

Bew. $K[x]$ ist ein Integritätsbereich. $\boxplus$
siehe Satz 1 (i).

NB $$fg = \sum_{s=0}^{m+n} \left(\sum_{r=0}^{s} f_r \, g_{s-r} \right) x^s$$

für $f = \sum_{i=0}^{m} f_i x^i$ und $g = \sum_{i=0}^{n} g_i x^i$

Insbesondere

$$c x^m \, d x^n = cd \, x^{m+n}$$

und

$$fg = \sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ 0 \leq j \leq n}} f_i \, g_j \, x^{i+j}$$

Definition Sei $\mathcal{A}$ eine K-Alg mit 1.,

$f \in K[x]$, $f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$

$\alpha \in \mathcal{A}$.

Definiere $f(\alpha) := \sum_{i=0}^{n} f_i \alpha^i$ mit $\alpha^0 := 1$.

Bsp 1 $\mathcal{A} = K$

$f \in K[x]$ bestimmt also eine polynomiale Funktion $\tilde{f} : K \longrightarrow K$

Bsp 2 $\mathcal{A} = M_{2\times 2}(K)$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad f = x^2 + 2$

$f(B) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2$ ∎

Satz 2 $\mathcal{A}$ K-Alg mit 1.

$f, g \in K[x]$; $\alpha \in \mathcal{A}$, $c \in K$

Es gilt

(i) $(cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha)$

(ii) $(fg)(\alpha) = f(\alpha)\, g(\alpha)$

Bew. ÜA. ∎

Bsp 1 nocheinmal: sei $\alpha \in \mathcal{A}$ fixiert

$L_\alpha : K[x] \longrightarrow K$, $f \longmapsto f(\alpha)$ ist eine lineare Funktionale.

NB: Beispiel $f \neq 0$ aber $\tilde{f} = 0$

($x^p - x$ für p Primzahl

verschwindet auf $\mathbb{F}_p$

e.g. $f = x^3 - x = x^3 + 2x \in \mathbb{F}_3[x]$

$$f \neq 0 \text{ weil } (f)_{n \in \mathbb{N}_0} = (0, 2, 0, 1, 0, .., 0, ..)$$

$$\neq (0, 0, 0, 0, ..., 0, ..)$$

Aber $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ in $\mathbb{F}_3$

so $\tilde{f} : \mathbb{F}_3 \longrightarrow \mathbb{F}_3$ ist die Nullabbildung.

(Mehr dazu in ÜB.).

Wenn aber K unendlich ist haben

wir solche Beispiele nicht! Wir werden

dieses genau untersuchen. Zum Schluss für

Heute: <u>Notation</u> Sei $K[x]^{\sim}$ der K-VR der polyn. Funktionen.

<u>Proposition</u>: $K[x]^{\sim}$ ist eine K-Algebra (mit 1) versehen mit Punktweise multiplikation:

$$(\tilde{f}\tilde{g})(t) := \tilde{f}(t)\,\tilde{g}(t) \qquad t \in K. \quad \blacksquare$$