Lineare Algebra II

Kuhlmann

20. Vorlesung

Am 29. 06. 2012

Beweis (iii) (Dreiecksungleichung für Norm und Distanz).

$$\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = \|x\|^2 + (x/y) + (y/x) + \|y\|^2$$

$$= \|x\|^2 + (x/y) + \overline{(x/y)} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x/y) + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\,|(x/y)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

Schwarz

$$= (\|x\| + \|y\|)^2. \qquad \blacksquare$$

Satz (Gram-Schmidt).

Sei V n-dim Inneres Produkt K-VR.

Dann hat V eine Basis bestehend aus

eine orthonormale (vollständige) Menge.

Definition. Sei S eine Basis, S orthonormal,

S heißt orthonormale Basis.

Beweis. Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis.

Wir werden eine orthonormale Basis

$$\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_n\} \text{ per Induktion.}$$

I.Anf: $x_1 \neq 0$ setze $y_1 := x_1 / \|x_1\|$.

I.A: seien $y_1, \dots, y_r$ schon definiert so daß

$\{y_1, \dots, y_r\}$ orthonormal und $y_j \in \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_j\}$

für $j = 1, \dots, r$.

I.S. Betrachte

$$(*) \qquad z := x_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} c_i y_i \qquad c_i \in K$$

Berechne:

$$(z \mid y_j) = (x_{r+1} \mid y_j) - c_j \quad \text{für } j = 1, \dots, r.$$

Nun setze $c_j := (x_{r+1} \mid y_j)$. Mit dieser Wahl in $(*)$

$(z / y_j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, r$ und

$z \in \operatorname{Span}\{x_{r+1}, y_1, \dots, y_r\} \subseteq \operatorname{span}\{x_{r+1}, x_1, \dots, x_r\}$,

$z \neq 0$ das $x_1, \dots, x_{r+1}$ l. u und der Koeffizient ei ⊛ of x_{r+1} ist nicht Null.

Nun setze $y_{r+1} := z / \|z\|$ ⊠

Satz 2. Sei W Unterraum, es gilt

(1) $V = W \oplus W^{\perp}$

(2) $W^{\perp\perp} = W$

Beweis. Sei $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ eine Orthonormale

Basis für W und $z \in V$. Schreibe

$$W \ni x := \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \quad \text{where } c_i = (z / x_i)$$

Bessel liefert: $y := z - x$ ist orthogonal

zu x_i und damit zu W; d.h. $y \in W^{\perp}$.

also $z = x + y$ $x \in W$, $y \in W^{\perp}$.

Es gilt ferner daß $W \cap W^{\perp} = \{0\}$

(weil $(x/x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$).

(2) $z = x + y$ also $(z/x) = \|x\|^2 + (y/x) = \|x\|^2$

Analog $(z|y) = \|y\|^2$.

Wenn $z \in W^{\perp\perp}$ dann $(z|y) = 0 = \|y\|^2$

so $z = x \in W$. $\blacksquare$

§ Lineare Funktionale

Satz 3 (Riesz - Darstellung).

Sei V endl. dim Inneres Produkt K-VR.

Sei $f \in V^*$; $\exists!\ y \in V$ mit

$$(+) \quad f(x) = (x|y) \quad \forall x \in V.$$

Beweis. $\exists^z$: $f = 0 \Rightarrow y = 0$ ✓.

Sei $f \neq 0$; $W := \ker(f) \subsetneq V$

$$W^\perp \neq \{0\}.$$

Sei $y_0 \neq 0$ $y_0 \in W^\perp$; OE $\|y_0\| = 1$.

Setze $y := \overline{f(y_0)}\, y_0$

Beobachte:
$(y_0|y) = (y_0 | \overline{f(y_0)}\, y_0) = f(y_0)(y_0|y_0) = f(y_0)$

So $(+)$ ist ~~er~~füllt.

$x = \lambda y_0 \Rightarrow$

$$f(\lambda y_0) = \lambda f(y_0) = \lambda (y_0 | y) = (\lambda y_0 | y) \checkmark$$

$x \in W \Rightarrow$

$$(x|y) = (x | \overline{f(y_0)}\, y_0) = f(y_0)(x|y_0) = 0 = f(x) \checkmark$$

Sei nun $x \in V$ schreibe

$$x = x_0 + \lambda y_0 \quad \text{mit } \lambda := \frac{f(x)}{f(y_0)} \quad \text{und } x_0 := x - \lambda y_0$$

Berechne $f(x_0) = f(x) - \dfrac{f(x)}{f(y_0)} f(y_0) = 0$ so $x_0 \in W$,

und $f(x) = f(x_0) + f(\lambda y_0) = (x_0 | y) + (\lambda y_0 | y)$

$$= (x_0 + \lambda y_0 | y) = (x|y). \checkmark$$

Eindeutigkeit. Seien $y_1, y_2 \in V$ mit

$(x|y_1) = (x|y_2) \quad \forall x \in V$. Dann

$(x | y_1 - y_2) = 0 \quad \forall x \in V$ insbesondere

für $x := (y_1 - y_2)$ bekommen wir

$\|y_1 - y_2\|^2 = 0$ so $y_1 - y_2 = 0$. $\square$

Satz 4. Die Abbildung

$$\rho : V^* \longrightarrow V$$

$$f \longmapsto y$$

erfüllt

(i) $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$

(ii) ρ ist surjektiv

(iii) ρ ist injektiv

aber

(iv) $\rho(cf) = \bar{c}\rho(f) \quad \forall c \in K.$

i.e ρ ist konjugierter Isomorphismus.

Beweis.

(ii) $y \in V$ betrachte $f(x) := (x|y)$.

$f \in V^*$ und $\rho(f) = y$.

(iii) $\underset{\forall x}{f(x) = (x|0) = 0} \Rightarrow f = 0.$

(iv) $z := \rho(cf) \quad y := \rho(f)$. Zeige: $z = \bar{c}y$

i.e $\forall x \in V$:

$(Cf)(x) = (x \mid z)$.

Berechne: $(cf)(x) = cf(x) = c(x \mid y) = (x \mid \bar{c}y)$. ■

Folgerungen.

I. $(f_1 \mid f_2) := (\rho(f_2) \mid \rho(f_1))$

definiert ein Inneres Produkt auf V^*.

II. Sei $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ Basis für V

$\exists$ $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ Basis für V mit

$$(x_i \mid y_j) = \delta_{ij}.$$

III. $W^0 \subseteq V^*$ wird ersetzt durch $W^\perp \subseteq V$.

IV. Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Definiere T^* durch

$$(Tx \mid y) := (x \mid T^* y) \quad \forall x \in V$$

[d.h $T^*(y) = z$ gdw

$$\forall x \in V : (x \mid z) = (Tx \mid y).]$$.

Es gilt $T^* \in \mathcal{L}(V,V)$.

T^* ist die $\left\{\begin{array}{l}\text{transponierte (adjungierte)} \\ \text{konjugierte}\end{array}\right.$.

Eigenschaften der Transponierte konjugierte:

(1) $(cT)^* = \bar{c}\, T^*$

(2) sei $[T]_\chi := A$ und

$\mathcal{Y}$ die Basis wie in II.

Es gilt

$$[T^*]_{\mathcal{Y}} = \overline{A^t} := A^*$$

[ie die ij^{te} Koeffiziente von A^* sind $\overline{a_{ji}}$ wobei a_{ij} der ij^{te} Koeffizient von A ist.]

(3) $\det A^* = \overline{\det A}$

(4) Die Eigenwerte von A^* sind die konjugierte der Eigenwerte von A. ∎

Folgerungen I. II. III. IV. werden im ÜB # 11 ausarbeitet. ∎