Lineare Algebra II.

Kuhlmann

21. Vorlesung

Am 2.7.2012.

---

§ Beziehung zum Bidual

Erinnerung.

Prop 1. 24. Vorlesung am 27.01.2012 S. 4

$$y_0 \in V \longmapsto L_{y_0} \in V^{**}$$

$$L_{y_0}(f) := f(y_0) \qquad \forall f \in V^*$$

und

Satz 1. 24. Vorlesung am 27.01.2012 S. 5

$$\begin{aligned} \lambda : V &\longrightarrow V^{**} \\ y_0 &\longmapsto L_{y_0} \end{aligned}$$

ist ein (kanonischer) Isomorphismus.

Vergleiche mit:

$$\begin{aligned} \delta : V &\longrightarrow V^* \\ y_0 &\longmapsto y_0^* \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \gamma : V^* &\longrightarrow V^{**} \\ y_0^* &\longmapsto y_0^{**} \end{aligned}$$

$$y_0^*(x) := (x \mid y_0) \quad \forall x \in V \qquad y_0^{**}(y^*) = (y^* \mid y_0^*) \quad \forall y^* \in V^*$$

Also $\quad \lambda : V \longrightarrow V^{**}$

$$y_0 \longmapsto L_{y_0}$$

mit $\quad L_{y_0}(y^*) := y^*(y_0) \quad$ für $y^* \in V^*$ $\quad (*)$

einerseits und

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\delta"] \arrow[rr, bend right, "\gamma \circ \delta"'] & V^* \arrow[r, "\gamma"] & V^{**} \end{tikzcd}$$

$$y_0 \longmapsto y_0^{**}$$

andererseits.

Behauptung: $L_{y_0} = y_0^{**}$

Es genügt z.z. daß y_0^{**} $(*)$ erfüllt.

Wir berechnen:

$$y_0^{**}(y^*) = (y^* \mid y_0^*) = (y_0 \mid y) = y^*(y_0) \quad . \quad \blacksquare$$

§ Hermite'sche Operatoren.

<u>Definition</u> (i) $T \in \mathcal{L}(V, V)$ ist <u>Hermite'sch</u> (oder selbst adjungiert) falls $T = T^*$ i.e. $(Tx \mid y) = (x \mid Ty)$ $\forall\, x, y \in V$

(ii) $K = \mathbb{R}$ $\quad T = T^*$, T heißt auch

<u>reell symmetrisch.</u>

(iii) $K = \mathbb{C}$ $\quad T = T^*$ heißt auch

<u>komplex Hermite'sch.</u>

Matrizen Darstellung von Hermite'sche Operatoren.

Sei $\mathcal{X}$ orthon. Basis, ~~also~~ $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$

($\mathcal{X}$ ist selbst-dual, siehe ÜB # 11).

Also $T = T^*$ impliziert A ist <u>Hermite'sch</u>, wobei

$$A := [T]_{\mathcal{X}} = [T^*]_{\mathcal{Y}} = [T^*]_{\mathcal{X}} = \overline{A^t} := A^*$$

Das heißt $\quad a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, und im reellem Fall ($A$ ist <u>komplex Hermite'sch</u>)

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{i.e} \quad A = A^t \quad (A \text{ ist } \underline{\text{symmetrisch}}).$$

<u>Bemerkungen.</u> (ÜA) $\left\{ \begin{array}{l} \text{weitere} \\ \text{Eigenschaften von Hermite'sche Oper.} \end{array} \right\}$

(i) Umgekehrt sei A Hermite'sch und $\mathcal{X}$ orth.

Basis für V; $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Definiere $T\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right) := A \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$.

Dann ist T Hermite'sch.

(ii) T_1, T_2 Hermite'sch $\Rightarrow T_1 + T_2$ Hermite'sch.

(iii) $T \neq 0$ Hermite'sch, $d \in K$, $d \neq 0$,

dann ist dT Hermite'sch gdw $d \in \mathbb{R}$.

(iv) T invertierbar, und Hermite'sch

gdw T^{-1} Hermite'sch.

__Satz 1.__ Seien T_1, T_2 Hermite'sch.

Es gilt: $T_1 T_2$ ist Hermite'sch gdw

$$T_1 T_2 = T_2 T_1.$$

__Beweis.__ $T_1 T_2 = T_2 T_1 \Leftrightarrow (T_1 T_2)^* = (T_2 T_1)^*$

$$\Leftrightarrow T_2^* T_1^* = T_1^* T_2^* \Leftrightarrow T_2 T_1 = T_1 T_2. \qquad \square$$

__Satz 2.__ (i) Sei T_1 Hermite'sch, dann ist $T_2^* T_1 T_2$ Hermite'sch.

(ii) Umgekehrt ist $T_2^* T_1 T_2$ Hermite'sch und T_2 invertierbar, dann ist T_1 Hermite'sch.

Beweis (i) $(T_2^* T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^* T_2^{**} = T_2^* T_1 T_2$.

(ii) $T_2^* T_1 T_2 = (T_2^* T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^* T_2$

Multiplizieren links mit $(T_2^*)^{-1}$ und rechts mit T_2^{-1}

ergibt $\quad T_1 = T_1^*$. ∎

Definition. $T \in \mathcal{L}(V, V)$ ist <u>schief-Hermite'sch</u>

falls $T^* = -T$. [wenn $K = \mathbb{C}$

heißt es "komplex schief-Hermite'sch",

und wenn $K = \mathbb{R}$ heißt es "schief-Symmetrisch".]

---

§ Cartesische Zerlegung eines Operators

Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$ schreibe $T = T_1 + T_2$ wobei

$$T_1 := \frac{T + T^*}{2} \quad \text{und} \quad T_2 := \frac{T - T^*}{2}$$

Berechne: $T_1^* = T_1$ und $T_2^* = -T_2$

Also T_1 ist Hermite'sch und
T_2 ist schief-Hermite'sch.

Ferner T_2 schief-Hermite'sch und $K = \mathbb{C} \Leftrightarrow T_2 = iT_3$ mit
T_3 komplex Hermite'sch. Also $T = T_1 + iT_3$. ∎