Lineare Algebra II.

– Kuhlmann –

22. Vorlesung.

Am 06.07.2012

Unser Ansatz ist weiterhin: V endl. dim. Inneres Produkt Raum

Satz 1. Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ Hermite'sch.
Es gelten: $(Tx \mid x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in V$
und alle Eigenwerte von T sind reell.

Beweis: $(Tx \mid x) = \overline{(x \mid T(x))} = \overline{(Tx \mid x)}$

Sei nun $Tx = cx$ mit $x \neq 0$, dann ist

$$\underbrace{(Tx \mid x)}_{\in \mathbb{R}} = (cx \mid x) = c \underbrace{\|x\|^2}_{\in \mathbb{R}}$$

also $c \in \mathbb{R}$. ∎

Erinnerung: T^* ist definiert durch $(Tx \mid y) = (x \mid T^* y)$ oder
$(x \mid Ty) = (T^* x \mid y)$. ∎

§ Isometrie.

Definition: Sei $U \in \mathcal{L}(V, V)$ so daß

$$U^* = U^{-1}, \text{ dann heißt } U \text{ eine } \underline{\text{Isometrie}}.$$

Wenn $K = \mathbb{R}$ und $U^t = U^{-1}$ heißt U orthogonal
Wenn $K = \mathbb{C}$ und $U^* = U^{-1}$ heißt U unitär.

Satz 2. $U \in \mathcal{L}(V,V)$. Sind äquivalent

(1) $U^* U = U U^* = I_d$

(2) $(Ux \mid Uy) = (x \mid y) \ \forall x, y$ [U erhält $(\mid)$]

(3) $\|Ux\| = \|x\| \ \forall x$ [U erhält die Norm]

Beweis (1) $\Rightarrow$ (2):

$$(Ux \mid Uy) = (x \mid U^* U y) = (x \mid y). \ \forall x, y \in V.$$

(2) $\Rightarrow$ (3): (2) anwenden mit $x = y$.

(3) $\Rightarrow$ (1) $(Ux \mid Ux) = (U^* Ux \mid x) = (x \mid x)$

also $\big([U^* U - Id] x \mid x \big) = 0 \quad \forall x \in V.$

Nun ist aber $T := U^* U - Id$ Hermite'sch

und $(Tx \mid x) = 0 \ \forall x$ impliziert $T = 0$

(dazu siehe üB # 12) ∎

Bemerkungen.

(i) (3) impliziert U erhält Distanz:

$$(4) \quad \|Ux - Uy\| = \|x - y\| \quad \forall x, y \in V$$

(ii) Isometrien sind invertierbar und erhalten das Innere Produkt also $\mathcal{U} : (V, (\,|\,)) \xrightarrow{\sim} (V, (\,|\,))$

ist eine <u>Automorphismus</u> des Inn. Produkt

Vektorraum $(V, (\,|\,))$. ▣

<u>Satz 3</u>. Eigenwerte von Isometrien haben absolut Betrag gleich 1.

<u>Beweis</u>. Sei $\mathcal{U}x = cx$ $\quad x \neq 0 \quad c \in \mathbb{C}$.

Es ist: $\|\mathcal{U}x\| = \|x\|$ und $\|\mathcal{U}x\| = \|cx\| = |c|\,\|x\|$

also $\|c\| = 1$. ▣

§ <u>Orthonormal Basis Wechseln</u>.

<u>Satz 4</u>. Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ orthonormal Basis

und $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(V, V)$ eine Isometrie.

Dann ist $\mathcal{U}\mathcal{X} := \{\mathcal{U}x_1, \dots, \mathcal{U}x_n\}$ eine Orth. Basis.

Umgekehrt ist $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(V, V)$

$\mathcal{X}$ orth. Basis so daß

$\mathcal{U}\mathcal{X}$ wieder orth. Basis ist,

dann ist $\mathcal{U}$ eine Isometrie.

<u>Beweis</u>: "$\Rightarrow$" $(Ux_i \mid Ux_j) = (x_i \mid x_j) = \delta_{ij}$

also $U\mathcal{X}$ orth. und $U\mathcal{X}$ ist eine Basis

weil U invertierbar ist.

"$\Leftarrow$" Sei $U\mathcal{X}$ orth. Es gelt also

$$(Ux_i \mid Ux_j) = \delta_{ij} = (x_i \mid x_j) \quad \forall\, 1 \leq i, j \leq n$$

und damit durch linearität gelt

$$(Ux \mid xy) = (x \mid y) \quad \forall\, x, y \in V. \qquad \square$$

Matrix Version.

<u>Definition</u> $A \in M_{n \times n}(K)$ ist <u>orthogonal</u> $(K = \mathbb{R})$ oder <u>Unitär</u> $(K = \mathbb{C})$ falls $AA^* = A^*A = I_n$.

Bemerkungen.

(i) U Isometrie und $\mathcal{X}$ orthon. Basis implizieren

$$A := [U]_{\mathcal{X}} \text{ ist unitär (bzhw. orthogonal)}$$

(üA) (üB 12).

(ii) Matrix Version von Satz 4:
Sei $\mathcal{X}$ orthonormal Basis und $\mathcal{B}'$ eine beliebige Basis.

Dann ist $\mathcal{B}'$ orthonormal gdw die Basiswechsel matrix unitär ist. ÜA ÜB # 12. $\boxdot$

§ Spektral Theorie. Sei wie immer $\dim V < \infty$.

Bisher haben wir 3 wichtige Klassen von Operatoren studiert

(a) Hermite'sche (b) schief Hermite'sche (c) Unitäre

$T^* = T$ $\quad$ $T^* = -T$ $\quad$ $T^* = T^{-1}$

Alle erfüllen die folgende Eigenschaft.

Definition. $T \in \mathcal{L}(V,V)$ ist normal falls

$$T^* T = T T^*.$$

Wir werden die Struktur von normalen Operatoren genau untersuchen. Wir brauchen

Lemma 1. Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$, $W \subseteq V$ T-invariant, dann ist $W^\perp \subseteq V$ T^*-invariant.

Beweis. Sei $u \in W^\perp$, $w \in W$ und berechne

$$(w \mid T^* u) = (Tw \mid u) = 0 \qquad \forall w \in W$$

also ist W $W^\perp$

$T^* u \in W^\perp$, $\square$

Wir wollen unser Hauptsatz beweisen:

<u>Satz (Spektralsatz für normale Operatoren).</u>

Sei $\dim V < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V, V)$ normal.

$p := \text{Min Pol}(T)$. Es gilt

$$p = p_1 \cdots p_k$$

wobei $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ und p_i normiert und irreduzible ist (d.h $\deg p_i = 1$ oder $\deg p_i = 2$).

Setze $W_i := \ker p_i(T)$, $W_i \subseteq V$ ist T-invariant.

Dann ist: W_i orthogonal zu W_j für $i \neq j$ und

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k \quad \text{(orthogonale direkte Summe).}$$

Wir brauchen noch ein Lemma.