Lineare Algebra II.

- Kuhlmann -

23. Vorlesung.

Am 09.07.2012

Erinnerung. Lemma 1 06.07.2012 :

$W \subseteq V$ T-invariant $\Rightarrow$ $W^\perp \subseteq V$ T^*-invariant

(oder $W \subseteq V$ T^* invariant $\Rightarrow$ $W^\perp$ T-invariant).

Damit können wir ein Analog zum

Satz 2 S. 8 14. Vorlesung am 4.6.2012 zeigen.

Satz 1. (orthonormale Trigonalisierung).

Sei $K = \mathbb{C}$, V endl. dim. inneres Produkt K-VR;

$T \in \mathcal{L}(V,V)$. Dann gibt es eine orth. Basis $\mathcal{X}$

so daß $[T]_{\mathcal{X}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis. Induktion nach $n := \dim V$.

Sei $c \in \mathbb{C}$ und $x \neq 0$ mit $T^* x = c x$.

$W := (\mathrm{span}\{x\})^{\perp}$ $\quad$ $\dim W = \dim V - 1 = n-1$

Lemma 1 06.07.2012 impliziert: W ist T-invariant, also ist $T\restriction_W$ wohldefiniert. Per Induktionsannahme: Setze: $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ orth Basis für W wofür die Matrix Darstellung von $T\restriction_W$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Setze $x_n := x/\|x\|$

Dann ist $\mathcal{X} := \{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ die gesuchte

Basis. $\boxtimes$

<u>Korollar 1:</u> Für jede $n \times n$ Matrix über $\mathbb{C}$ A gibt es eine unitäre Matrix U so daß

$U^{-1} A U$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis:
wähle $\mathcal{X}$ eine orth. Basis und definiere

$$T(x) = A \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad x = \sum \varepsilon_i x_i$$

für $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Finde $\mathcal{Y}$ wie in Satz 1.

Set $U :=$ Matrix der Basis Wechsel.

Dann ist $U = U^*$ und $U^{-1} A U = B$ ist obere Dreiecks. $\boxtimes$

§ Orthonormale Diagonalisierung.

Lemma 2. Sei T normal, $g(x) \in K[x]$

$$W := \ker g(T).$$

Dann ist $W^\perp$ T-invariant.

Beweis. **Beh.** W ist T^*-invariant:

Sei $u \in W$ berechne

$$g(T)(T^*(u)) = T^*(g(T)(u)) = T^*(0) = 0.$$

(weil T^* kommutiert mit T also auch mit $g(T)$.) ▪

Lemma 1 impliziert nun: $W^\perp$ ist T-invariant ▪

Spektralsatz: sei T normal, $T \in \mathcal{L}(V, V)$
$p = \text{Min pol}(T)$.

Es gilt (i) $p = p_1 \cdots p_k$

wobei $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$; p_i irreduzible

und normiert.

(ii) $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ und W_i ist orthogonal zu W_j für $i \neq j$

für $W_i = \ker p_i(T)$.

<u>Hilfsbemerkung</u>: Ist g ein Faktor von Min Pol(T) dann ist $g(T)$ <u>nicht</u> invertierbar.

Beweis: $p = gh$ wäre $g(T)$ invertierbar
$\deg h < \deg p$
dann hätten wir

$$0 = g(T)^{-1} p(T) = g(T)^{-1} g(T)\, h(T)$$

und damit $h(T) = 0$ ↯ $\deg p$ ist minimal. ∎

<u>Beweis vom Spektralsatz.</u> Per Induktion:

Lemma 2 impliziert: $W_1^\perp$ ist T-invariant.

Betrachte $T\restriction_{W_1^\perp}$ und bemerke dass

$$p_1\left(T\restriction_{W_1^\perp}\right) = \{0\} \quad \left(x \in W_1^\perp \text{ und } x \in \ker p_1(T) = W_1 \Rightarrow x = 0. \right)$$

Also ist $p_1(T\restriction_{W_1^\perp})$ invertierbar und damit

ist p_1 <u>kein</u> Faktor vom Min Pol $(T\restriction_{W_1^\perp}) = p_2 \cdots p_k$

Aber $p_1 = $ Min Pol $(T\restriction W_1)$;

und p_1 teilt nicht $p_2 \cdots p_k$. Also $p_1 \neq p_j$

$j = 2, \ldots, k$. $\left\{ \begin{matrix} \text{Argument.} \\ \text{Fortsetzung per Induktion} \end{matrix} \right\}$. ∎

Korollar 2. $K = \mathbb{C}$.

T normal $\Rightarrow$ es existiert eine orthonormale Basis bestehend aus Eigenvektoren von T.

Beweis. p_i linear über $\mathbb{C}$ also W_i = Eigenraum zum Eigenwert c_i.
$p_i = (x - c_i)$

G-S: wähle orthormale Basis X_i für W_i $(i = 1, \dots, k)$

X_i besteht aus EigenV. zum EigenW. c_i.

Also ist $X = (X_1 \cup \dots \cup X_k)$ die gewünschte Basis. $\square$

Definition: $B, A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$.

(i) A ist normal falls $A A^* = A^* A$

(ii) A ist unitär äquivalent zu B falls es eine unitäre $U \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ gibt mit
$$B = U^{-1} A U.$$

Korollar 3. (Matrix version vom Korollar 2).

Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$; A normal $\Rightarrow$ A ist unitär äquiv.

zu einer diagonaler Matrix $D \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. $\boxtimes$

§ Anwendungen vom Spektralsatz. V endl. dim.

Korollar 4. $K = \mathbb{C}$, T normal. Es ist:

T ist Hermite'sch $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte $\in \mathbb{R}$.

Beweis. "$\Rightarrow$" schon bewiesen worden.

"$\Leftarrow$" Seien alle EigenW. reell, und $\mathcal{Y}$ eine orthonorm. Basis bestehend aus EigenV. Also ist

$$D := [T]_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \qquad d_i \in \mathbb{R}.$$

Es ist klar daß D Hermite'sch ist ($D^* = \overline{D^t} = D^t = D$), also ist auch T Hermite'sch. (ÜB). $\boxtimes$

Korollar 5: $K = \mathbb{C}$, T normal. Es ist:

T ist unitär $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte haben Absolutbetrag 1.

Beweis. "$\Rightarrow$" schon bewiesen.

"$\Leftarrow$" Seien die EigenW. $z_1, \ldots, z_n$, und $\mathcal{Y}$ orthon.

Basis bestehend aus EigenV. so daß

$$[T]_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix} = D.$$

__Bh:__ D ist unitär:

Berechne: $A^* = \overline{A}^t = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z}_n \end{pmatrix}$

Also $AA^* = \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z}_n \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} z_1 \overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \overline{z}_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Also ist auch T unitär (ÜB). $\square$