- Lineare Algebra II -

- Kuhlmann -

- 24. Vorlesung -

Am 13. 07. 2012.

Wir wollen nun den Spektralsatz anwenden im Fall $K = \mathbb{R}$. Dann sind die p_i entweder linear $p_i = (x - r_i)$ $r_i \in \mathbb{R}$ oder quadratische irreduzible d.h aus der Form

$$(x-a)^2 + b^2 \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0.$$

Beispiel. sei $r > 0$; $\theta \in \mathbb{R}$; $\theta \neq n\pi$ $n \in \mathbb{Z}$
(i.e θ erfüllt $\sin\theta \neq 0$)

$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit Matrix (bzgl standard orthonormale Basis $\{e_1, e_2\}$)

$$A = r \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

A ist normal: $AA^t = A^t A$.

Sei $p = \text{Char Pol}(T) = \det(xI - A)$

$= (x - r\cos\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta$

setze $a := r\cos\theta \quad b := r\sin\theta \quad b \neq 0$

also ist

$$p = (x-a)^2 + b^2 \quad b \neq 0; \text{ irreduzibel in } \mathbb{R}[x].$$

Also ist

$$\text{Min Pol } T = p.$$

Wir zeigen nun die Umkehrung.

<u>Satz:</u> Sei $\dim V = n$; $T \in \mathcal{L}(V, V)$ normal, mit

$$\text{Min Pol } T := p = (x-a)^2 + b^2; \quad a, b \in \mathbb{R}, \ b \neq 0.$$

Es gilt: es existieren 2 dimensionale T-invariante Unterräume $V_1, \dots, V_s$ $\left(s = \frac{n}{2}\right)$ so daß:

(i) V_i ist orthogonal zu V_j für $i \neq j$

(ii) $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$

(iii) V_j hat eine orthonormale Basis $\{\alpha_j, \beta_j\}$ so daß:

$$T\alpha_j = a\alpha_j + b\beta_j$$

$$T\beta_j = -b\alpha_j + a\beta_j$$

(Das heißt: $[T/V_j]_{\{\alpha_j, \beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

wobei $\{\alpha_j, \beta_j\}$ die geordnete orthonormale Basis ist), und

(iv) Char pol $(T) = p^s$ (vi) $TT^* = (a^2+b^2) I$.

(Also setze $r := \sqrt{a^2+b^2}$ wähle θ mit

$a = r\cos\theta$ und $b = r\sin\theta$

Dann ist V die orthogonale direkte Summe von 2. dim. Unterräume, und die Beschränkung T/V_i ist "r mal eine Drehung um die Winkel θ".

Wir brauchen eine Bemerkung und eine Hilfslemma bevor wir den Satz beweisen.

Bemerkung:

(i) Sei $K = \mathbb{R}$ $\quad U \in \mathcal{L}(V, V)$.

Es gilt

$$(U\alpha \mid \beta) = (U^*\beta \mid \alpha) \qquad \text{für } \alpha, \beta \in V$$

(ii) Sei nun U normal; es gilt

$$\| U\alpha \| = \| U^*\alpha \| \qquad \forall \alpha \in V$$

Beweis:

(i) $(U^*\beta \mid \alpha) = (\beta \mid U\alpha) = \overline{(U\alpha \mid \beta)} = (U\alpha \mid \beta)$

(ii) $\| U\alpha \|^2 = (U\alpha \mid U\alpha) = (\alpha \mid U^*U\alpha) = (\alpha \mid UU^*\alpha)$

$= (U^*\alpha \mid U^*\alpha) = \| U^*\alpha \|^2.$ ∎

Hilfslemma. Sei $K = \mathbb{R}$; S normal sodaß

$$S^2 + I = 0$$

Sei $\alpha \in V$ und setze $\beta := S\alpha$.

Es ist:

(†) $\quad S^*\alpha = -\beta$ und $S^*\beta = \alpha$ und

$$(\alpha \mid \beta) = 0 \quad \text{und} \quad \| \alpha \| = \| \beta \|$$

Beweis: $S\alpha = \beta$ und $S\beta = S^2\alpha = -\alpha$

also $0 = \| S\alpha - \beta \|^2 + \| S\beta + \alpha \|^2 =$

$$= \|S\alpha\|^2 - 2(S\alpha|\beta) + \|\beta\|^2 +$$
$$\|S\beta\|^2 + 2(S\beta|\alpha) + \|\alpha\|^2 .$$

Da S normal ist folgt (Bemerkung + Hilfslemma)

$$0 = \|S^*\alpha\|^2 - 2(S^*\beta|\alpha) + \|\beta\|^2 +$$
$$\|S^*\beta\|^2 + 2(S^*\alpha|\beta) + \|\alpha\|^2$$
$$= \|S^*\alpha + \beta\|^2 + \|S^*\beta - \alpha\|^2 .$$

Daraus folgt $(+)$.

Berechne nun:

$$(\alpha|\beta) = (S^*\beta|\beta) = (\beta|S\beta)$$
$$= (\beta|-\alpha) = -(\alpha|\beta),$$

also $(\alpha|\beta) = 0$.

Schliesslich:

$$\|\alpha\|^2 = (S^*\beta|\alpha) = (\beta|S\alpha) = (\beta|\beta) = \|\beta\|^2 . \ \blacksquare$$

<u>**Beweis vom Satz**</u>. Sei $\{V_1, \dots, V_s\}$ eine maximale Menge von 2. dim. Unterraume mit den

den Eigenschaften:

(i) V_i ist orth. zu V_j

(iii) und

(v): $$T^* \alpha_j = a \alpha_j - b \beta_j \qquad 1 \leq j \leq s$$
$$T^* \beta_j = b \alpha_j + a \beta_j$$

Setze $W := V_1 \oplus \dots \oplus V_s$.

<u>Beh.</u> $W = V$.

Sonst ist $W^\perp \neq \{0\}$ und (iii) + (v) implizieren

außerdem daß W ist T und T^* invariant

also ist $W^\perp$ T^* und $T^{**} = T$ invariant.

Setze $S := b^{-1}(T - aI)$.

Bemerke daß

$$S^* = b^{-1}(T^* - aI)$$

so $S^* S = S^* S$ (S normal) und

$W^\perp$ ist auch S und S^* invariant und $(T - aI)^2 + b^2 I = 0$ impliziert

$$S^2 + I = 0 .$$

Also können wir Hilfslemma für S und $W^\perp$ anwenden, wir bekommen:

$\alpha \in W^\perp$, $\|\alpha\| = 1$

$\beta := S\alpha$, $\beta \in W^\perp$ und

$S\beta = -\alpha$.

Da $T = aT + bS$ haben wir außerdem

$$\left.\begin{aligned} T\alpha &= a\alpha + b\beta \\ T\beta &= -b\alpha + a\beta \end{aligned}\right\} \text{(iii)}$$

Darüberhinaus:

$S^* \alpha = -\beta$
$S^* \beta = \alpha$
$(\alpha | \beta) = 0$ und $\|\beta\| = 1$.

Nun ist $T^* = a I + b S^*$

also

$$\left.\begin{aligned} T^*\alpha &= a\alpha - b\beta \\ T^*\beta &= b\alpha + a\beta \end{aligned}\right\} \text{(V)} \checkmark$$

Widerspruch zum maximale Wahl von

$\{V_1, \ldots, V_s\}$, also $W = V$. ∎

Nun $\det\begin{pmatrix} x-a & b \\ -b & x-a \end{pmatrix} = (x-a)^2 + b^2$

Es folgt aus (i), (ii), (iii) nun daß

$$\det(xI - T) = \left[(x-a)^2 + b^2\right]^s. \quad ∎$$

(vi) T ist invertierbar und

$$T^* = (a^2+b^2)\, T^{-1}$$

Beweis: Aus $\left\{\begin{matrix}\text{(iii)} \\ \text{(V)}\end{matrix}\right\}$ haben wir

$$[T \mid V_j]_{\{\alpha_j, \beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$[T^* \mid V_j]_{\{\alpha_j, \beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Nun ist aber:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$= [T^* \mid V_j]_{\{\alpha_j, \beta_j\}} \, [T \mid V_j]_{\{\alpha_j, \beta_j\}}$$

$$= [T^* T \mid V_j]_{\{\alpha_j, \beta_j\}} = (a^2+b^2)\, I_2;$$ Also $\underset{= (a^2+b^2) I}{T^* T}$. ∎