Lineare Algebra II

\- Kuhlmann -

\- 3. Vorlesung -

am 23.04.2012

Definition 1. Seien $\mathcal{A}$ und $\tilde{\mathcal{A}}$ Algebren über K.
Eine Bijektion

$$\sim : \mathcal{A} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}$$
$$\alpha \longmapsto \tilde{\alpha}$$

ist eine Algebren Isomorphie falls:

$$\widetilde{(c\alpha + d\beta)} = c\tilde{\alpha} + d\tilde{\beta}$$

und

$$\widetilde{(\alpha\beta)} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta} \qquad \forall\, \alpha, \beta \in \mathcal{A},\ c, d \in K$$

gelten.

Lagrange Interpolation.

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Sei K Körper, $t_0, t_1, \dots, t_n$ $n+1$ verschiedene $\in K$.

Sei $V :=$ der K-VR der Polynomen mit $\deg \leq n$ (zusammen mit 0 Polym)

N.B: $\dim V = n+1$ (weil e.g. $x^0, \dots, x^n$ Basis bildet)

Sei $L_i := L_{t_i}$ $\qquad L_i \in V^*$

$0 \leq i \leq n$ $\qquad L_i(f) := f(t_i)$.

__Beh 1.__ $\{L_0, \dots, L_n\}$ is Basis für V^*.

Bew.

Es genügt eine duale Basis $\{P_0, \dots, P_n\}$ von V zu finden.

Solche eine Basis ist durch die Gleichungen

$$(*) \qquad L_j(P_i) = \delta_{ij} \qquad 0 \le i, j \le n$$

bestimmt. Wir wollen also $P_0, \dots, P_n$ konstruieren, die $(*)$ erfüllen. Wir definieren

$$P_i := \prod_{j \neq i} \left(\frac{x - t_j}{t_i - t_j} \right)$$

(siehe ÜB) ∎

Die Dualität liefert wie immer:

$$\forall f \in V: \quad f = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) P_i$$

"Lagrange Interpolation Formel".

__Satz 1.__ Die Abbildung

$$K[x] \longrightarrow \widetilde{K[x]} \qquad (\text{für } K \text{ unendlich})$$
$$f \longmapsto \tilde{f}$$

ist eine K-Algebren Isomorphie.

__Beweis__ Es ist unmittelbar zu prüfen daß

$$\widetilde{f+cg} = \tilde{f} + c\tilde{g} \quad \text{und} \quad \widetilde{fg} = \tilde{f}\,\tilde{g}.$$

Die Abbildung ist per Definition surjektiv.

Injektiv? $\tilde{f} = 0 \Rightarrow f = 0$?

Sei $\deg f = n$; $t_0, \dots, t_n$ verschieden in K.

Seien $P_0, \dots, P_n$ wie in $\mathcal{L}IF$; und

Schreibe $f = \sum f(t_i)\, P_i$.

$\tilde{f} = 0 \Rightarrow f(t_i) = 0 \Rightarrow f = 0$. ∎

§ Ideale.

$K[x]$ ist ein Integritätsbereich, es gilt:

$$f, g, h \in K[x];\ f \neq 0 \text{ und } fg = fh \Rightarrow g = h.$$

Wir wollen Divisionsalgorithm in $K[x]$ beweisen:

__Divis. Alg:__ Seien $f, g \neq 0$; $\deg g \leq \deg f$.

$\exists!\, q \in K[x]$, $r \in K[x]$ s.d. $f = qg + r$, $r = 0$ oder $\deg r < \deg g$

Lemma 1. Seien $f, d \neq 0 \in K[x]$;

mit $\deg d \leq \deg f$.

Es gibt $g \in K[x]$ so daß

$$f - dg = 0 \quad \text{oder} \quad \deg(f - dg) < \deg f.$$

Beweis. schreibe $\deg f := m \geq n := \deg d$

$$f = a_m x^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i \qquad a_m \neq 0$$

$$d = b_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \qquad b_n \neq 0$$

Betrachte

$$\frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d = \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} \left(b_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i\right)$$

$$= a_m x^m + \cdots$$

Also ist $f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d \neq 0$

und $\deg\left(f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d\right) < \deg f$.

Setze also $g := \left(\frac{a_m}{b_n}\right) x^{m-n}$ $\square$

Satz 2 (DA). $f, d \in K[x]$, $d \neq 0$
$\exists\, q, r \in K[x]$ s.d.
(i) $f = dq + r$ (ii) $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$.

Ferner: q, r mit (i) und (ii) sind eindeutig.

Bew $\exists$: Sei $f \neq 0$. Lemma 1 $\Rightarrow$

$\exists\ g \in K[x]$ s.d

$$f - dg = 0 \text{ oder } \deg(f - dg) < \deg f$$

Wenn $f - dg \neq 0$ und $\deg(f - dg) \geq \deg d$

Lemma 1 $\Rightarrow$

$\exists\ h \in K[x]$ s.d

$$(f - dg) - dh = 0 \text{ oder } \deg\left(f - d(g+h)\right) < \deg(f - dg)$$

Fortsetzung ergibt

$$\ldots < \deg\left(f - d(g+h)\right) < \deg(f - dg) < \deg f$$

die Prozedur muss nach endlich vielen Schritten anhalten. Wir bekommen also $q \in K[x]$ und $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$ mit
$$f = dq + r.$$

Eindeutigkeit:

Sei $f = dq_1 + r_1 = dq + r \Rightarrow d(q - q_1) = (r_1 - r)$

mit $r_1 = 0$ oder $\deg r_1 < \deg d$

$q - q_1 \neq 0 \Rightarrow \quad d(q-q_1) \neq 0$ und

$$\deg(r_1 - r) = \deg d + \deg(q - q_1)$$

Aber

$$\deg(r_1 - r) \leq \max(\deg r_1, \deg r) < \deg d \ \lightning$$

So $q - q_1 = 0$ und $r_1 - r = 0$
damit ∎

<u>Definition 2.</u> $f, d \in K[x]$; $d \neq 0$

d <u>teilt f</u> oder <u>f ist durch d teilbar</u>

oder <u>f ist Vielfach von d</u> wenn $r = 0$

in (DA): $f = dq + 0$. In dem Fall heißt q Quotient.