Lineare Algebra II

- Kuhlmann -

4. Vorlesung

am 27. 04. 2012

Korollar 1. $f \in K[x]$, $c \in K$. Es gilt:
$(x-c)$ teilt f gdw $f(c)=0$

Beweis: DA $\Rightarrow$ $f=(x-c)q+r$ $r=0$ oder $\deg r<1$
i.e. r ist Skalarpolynom.

Also
$f(c)=r(c)=r$.

Also $r=0$ gdw $f(c)=0$. ∎

Definition 1. $c \in K$ ist eine Nullstelle wenn $f(c)=0$.
Abbreviation: "NS von f in K".
(Also c NS von f gdw $(x-c)$ teilt f).

Korollar 2. Sei $f \in K[x]$, mit $\deg f = n$.
Dann hat f höchstens n NS in K.

Beweis. $\deg f = 0$ also OE $\deg f \geq 1$.
$\Rightarrow$ $f \neq 0$ skalarpol
$\Rightarrow$ keine NS in K.

$\deg f = 1 \Rightarrow f = ax + c \quad a \neq 0$

und $ax + c = 0$ gdw $x = \frac{-c}{a}$ eindeutig.

Induktionsannahme für $n-1$ gelte.

Sei a NS von f in K, also

$$f = (x-a)\, q \qquad \deg q = n-1.$$

Nun ist $f(b) = 0$ gdw $b = a$ oder b NS von q in K.

IA $\Rightarrow$ q has höstens $(n-1)$ NS, also hat damit
f " n NS. $\boxtimes$

---

§ Formale Ableitungen

$$f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n := f^{(0)} \text{ (Konvention)}$$

$$f^{(1)} := f' = c_1 + 2c_2 x + \dots + n c_n x^{n-1} := Df$$

<u>Bemerkung 1.</u> $D(f + cg) = D(f) + c\, D(g) \qquad f, g \in K[x]$
So D linear Operator. $\qquad c \in K$
$D : K[x] \longrightarrow K[x]$

<u>Notation</u> $f^{(2)} = f'' = D^2 f := D(D(f))$
$f^{(3)} := D^3 f$

etc..., D^n alle lineare Operatoren.

Satz 1. (Taylor's Formel)

Seien $\mathrm{Char}(K) = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$; $a \in K$; $p \in K[x]$, $\deg p \leq n$.

Es gilt: $p = \sum_{i=0}^{n} p^{(i)}(a) \frac{1}{i!} (x-a)^i$ (*)

Beweis Sei (wieder wie in LIS) V der K-VR der Poly. von deg $\leq n$ (und das 0 Poly.)

Betrachte: $l_i : V \longrightarrow K$

$$l_i(p) := p^{(i)}(a)$$

$l_i \in V^*$ $\quad i = 0, \dots, n$

Setze $p_i := \frac{1}{i!} (x-a)^i$.

Es gilt $l_j(p_i) = \delta_{ij}$ (siehe ÜB).

Also sind $\left.\begin{matrix} p_0, \dots, p_n \\ l_0, \dots, l_n \end{matrix}\right\}$ zueinander Dualebasen von V und V^*.

Also $p = \sum_{i=0}^{n} l_i(p)\, p_i$ ∎

Bemerkungen:

(1) $1, (x-a), \dots, (x-a)^n$ sind l. u.

also ist diese lineare Kombination (*) eindeutig.

(2) $\mathrm{Char}(K) = 0$ wird vorausgesetzt damit $i! \neq 0$.

Definition 2. Sei $f \neq 0$, $c \in K$ eine NS von f in K.
Die Vielfachheit von c ist die größte $\mu \in \mathbb{N}$ so daß $(x-c)^\mu$ teilt f.

Bemerke: $1 \leq \mu \leq \deg f$.

Satz 2. $\mathrm{Char}(K) = 0$, $f \neq 0$, $\deg f \leq n$
$c \in K$ NS von f
Es gilt:

c hat Vielfachheit μ gdw

$$(\dagger)\quad \begin{cases} f^{(k)}(c) = 0 & 0 \leq k \leq \mu-1 \\ f^{(\mu)}(c) \neq 0 \end{cases}$$

Beweis. "$\Rightarrow$" $(x-c)^\mu$ teilt f und $(x-c)^{\mu+1}$ teilt nicht f.

Es gibt also $g \neq 0$ mit $f = (x-c)^\mu g$.

Bemerke: $\deg g \leq n-\mu$ und $g(c) \neq 0$.

Taylor Formel liefert:

$$f = (x-c)^{\mu} \left[\sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \, \frac{(x-c)^{m}}{m!} \right]$$

Also

$$f = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \, \frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!}$$

Da die Koeffizienten von f als lineare Kombination von $(x-c)^k$ $(0 \leq k \leq n)$ eindeutig sind, ein <u>Vergleich ergibt</u>:

$$(\dagger\dagger) \qquad f = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(c) \, \frac{(x-c)^{k}}{k!}$$

$$= \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \, \frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!}$$

$$= g^{(0)}(c) \, \frac{(x-c)^{\mu}}{0!} + \dots + g^{(n-\mu)} \, \frac{(x-c)^{n}}{(n-\mu)!}$$

$$\begin{cases} \dfrac{f^{(k)}}{k!}(c) = 0 & \text{für } 0 \leq k \leq \mu - 1 \\ \qquad \text{und} & \\ \dfrac{f^{(k)}}{k!}(c) = \dfrac{g^{(k-\mu)}}{(k-\mu)!}(c) & \mu \leq k \leq n \end{cases}$$

Insbesonders für $\mu = k$ erhalten wir

$$f^{(\mu)}(c) = g(c) \neq 0.$$

"$\Leftarrow$" (+) und (++) liefern

$$f = \sum_{k=\mu}^{n} f^{(k)}(c) \frac{(x-c)^k}{k!}$$

Also

$$f = (x-c)^{\mu} \underbrace{\left[\frac{f^{\mu}(c)}{\mu!} + \frac{f^{(\mu+1)}(c)}{\mu+1!}(x-c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^{n-\mu} \right]}_{:= g}$$

$$g(c) = \frac{f^{\mu}(c)}{\mu!} \neq 0$$

Also $f = (x-c)^{\mu} g$ mit $g(c) \neq 0$.

Wir behaupten nun daß $(x-c)^{\mu+1}$ teilt nicht f,

sonst hätten wir $h \in K[x]$ mit

$$f = (x-c)^{\mu+1} h = (x-c)^{\mu} (x-c) h$$
$$= (x-c)^{\mu} g$$

$K[x]$ Integritätsbereich $\Rightarrow$

$$g = (x-c) h$$

also $g(c) = 0$. $\lightning$ $\blacksquare$