- Lineare Algebra II -

- Kuhlmann -

- 9. Vorlesung am 14.05.2012. -

Korollar 1. $\mathrm{Dim}\,(\mathrm{alt}^{(n)}(K^n)) = 1$.
Das heißt:
$\delta(A) = \det(A)\,\delta(I_n)$ für $A \in M_{n\times n}(K)$ und $\delta \in \mathrm{alt}^{(n)}$

Beweis: Da $\det \in \mathrm{alt}^{(n)}$, $\det \neq 0$ ist $\mathrm{Dim}\,(\mathrm{alt}^{(n)}) = 1$.

Sei $\delta \in \mathrm{alt}^{(n)}$; also ist $\delta = d \det$ für $d \in K$. Nun $\delta(I_n) = d\det(I_n)$ muss gelten, also $d = \delta(I_n)$. ∎

Bemerkung: Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

$\delta \in \mathrm{alt}^{(n)}(R^n)$ ist analog definiert.

Der Hauptsatz gilt auch in diesem erweitertem Rahmen: Sei $A \in M_{n\times n}(R)$; $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$

Definiere: $\det(A) := \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$

Dann ist det die eindeutige Funktionale $\delta \in \mathrm{alt}^{(n)}(R^n)$ mit der Eigenschaft $\delta(I_n) = 1$.

Beispiel $R = K[x]$

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & -x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$$

Sei $\delta \in \mathrm{alt}^{(3)}(M_{3\times 3}(R))$:

$$\delta(A) = \delta(x\varepsilon_1 - x^2\varepsilon_3, \ \varepsilon_2, \ \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3)$$

wobei $\varepsilon_1 = (1,0,0)$, $\varepsilon_2 = (0,1,0)$, $\varepsilon_3 = (0,0,1)$

(die standard Vektoren).

$$\delta(A) = x\,\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3) - x^2\delta(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3)$$

$$= x\,\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1) + x^4\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) - x^2\delta(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1) - x^5\delta(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

$$= (x^4 + x^2)\,\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

Satz 1: Sei $A \in M_{n\times n}(R)$. Es gilt:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Erinnerung

$(A^T)_{ji} = A_{ij}$ oder

$a^T_{ji} = a_{ij}$

Beweis. Betrachte $\prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} = \prod_{\substack{i,j=1 \\ j=\pi(i)}}^{n} a_{ij}$

für $\pi \in S_n$

$$= \prod_{\substack{i,j=1 \\ i=\pi^{-1}(j)}}^{n} a_{ij} = \prod_{j=1}^{n} a_{\pi^{-1}(j)j} = \prod_{j=1}^{n} a^{T}_{j\pi^{-1}(j)}$$

Wir berechnen nun:

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} =$$

$$\sum_{\pi^{-1} \in S_n} \operatorname{sign}(\pi^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{j\pi^{-1}(j)} = \det(A^T). \quad \blacksquare$$

<u>Satz 2.</u> $\det(AB) = \det(A)\det(B) \qquad A, B \in M_{n\times n}(R)$

<u>Beweis.</u> Fixiere $B \in M_{n\times n}(R)$. Definiere

$$\delta_B(A) := \det(AB) \qquad A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \hline \cdots \\ \hline z_n \end{pmatrix}$$

Also $\delta_B(z_1, \ldots, z_n) = \det(z_1 B, \ldots, z_n B)$

n linear? $\delta_B(z_1 + cz_1', z_2, \ldots, z_n) =$
$\det((z_1 + cz_1')B, \ldots, z_n B) =$
$\det(z_1 B, z_2 B, \ldots, z_n B) +$
$c \det(z_1' B, z_2 B, \ldots, z_n B).$

Alternierend?
$\delta_B(z_1, z_1, \ldots, z_n) = \det(z_1 B, z_1 B, \ldots, z_n B) = 0.$

$\operatorname{Dim}(\operatorname{Alt}^{(n)}) = 1 \Rightarrow \delta_B(A) = \det(A)\,\delta_B(I_n) = \det(A)\det(B). \quad \blacksquare$

Korollar: Sei A invertierbar, es gilt

$$\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$$

Beweis: $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$
$= \det(I_n) = 1$. ∎

Notation Sei $A \in M_{n\times n}(R)$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ fixiert.

$A[i|j] :=$ die $(n-1)\times(n-1)$ Matrix die man bekommt nach Entfernung der i^{ten} Zeile und j^{ten} Spalte von A.

$D_{ij}(A) := \det(A[i|j])$.

Satz 3 Fixiere j; $1 \leq j \leq n$. Betrachte

$$\delta(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} D_{ij}(A).$$ Es ist:

$\delta \in alt^{(n)}$ und $\delta(I_n) = 1$.

Korollar (Spaltenentwicklung). Sei $A \in M_{n\times n}(R)$.
Für jedes $1 \leq j \leq n$ gilt

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} D_{ij}(A).$$

Beweis um Satz 3:
Für $A = I_n$ $\underset{i\neq j}{A_{ij} = 0}$ also betrachte nun $i = j$ ie $A_{jj} = 1$

wir bekommen $\delta(I_n) = (-1)^{2j} \cdot A_{jj} \; \det(I_{n-1})$

$$= (-1)^{2j} \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

- alternierend? Sei $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

Seien $z_k = z_\ell$ für $k < \ell$

Falls $i \neq k$ und $i \neq \ell$ hat $A[i|j]$ zwei gleiche Zeilen, so $D_{ij}(A) = 0$

Also betrachten wir nur $i = k$ oder $i = \ell$:

$$\delta(A) = (-1)^{k+j} A_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{\ell+j} A_{\ell j} D_{\ell j}(A)$$

$$= \left.\begin{matrix} (-1)^{k+j} A_{kj} D_{kj}(A) + \\ (-1)^{\ell+j} A_{kj} D_{\ell j}(A) \end{matrix}\right\} (*)$$

weil $A_{\ell j} = A_{kj}$ ist.

Betrachte:

$$A[k|j] = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_{k-1} \\ \bar{z}_{k+1} \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A[\ell, j] = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_k \\ \vdots \\ \bar{z}_{\ell-1} \\ \bar{z}_{\ell+1} \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$$

$\bar{z}_\ell = \bar{z}_k$ ist hiervon die $(\ell-1)^{te}$ Zeile

$\bar{z}_\ell = \bar{z}_k$ ist hiervon die k^{te} Zeile

I

II

Vergleichen von (I) und (II) ergibt:

$A[k|j]$ und $A[l|j]$ haben die gleichen Zeilen <u>bis auf Permutation der Zeilen</u> !!

Man kann aber $A[l|j]$ aus $A[k|j]$ erhalten durch wiederholte Zeilenumformungen aus Typ 1, in dem man die $(l-1)^{te}$ Zeile in (I) bis zur k^{te} Zeile in (II) rückt. Dafür benötigt man $(l-1)-k$ Transpositionen [:= Permutationen der Gestalt

$(l-1 \;\; l-2)$ dann

$(l-2 \;\; l-3)$ ... bis

$(l-(l-k-1) \;\; l-(l-k))$

i.e. bis

$(k+1 \;\; k)$]

<u>Zusammefassend</u>: Setze $\pi := (k+1 \;\; k) \cdots (l-1 \;\; l-2)$

$\pi \in S_{n-1}$

$\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^{(l-1)-k}$. Also $D_{lj}(A) = (-1)^{(l-1)-k} D_{kj}(A)$.

Zurück in (*):

$$\delta(A) = (-1)^j \left[\overbrace{(-1)^k A_{kj} D_{kj}(A)}^{1.\ \text{Term}} + \overbrace{(-1)^{2l-1-k} A_{kj} D_{kj}(A)}^{2.\ \text{Term}} \right]$$

Aber $(-1)^k = -\left[(-1)^{2l-1-k}\right] = (-1)^{2(l-1)-k}$

Also kürzen sich 1. Term und 2. Term ab

und damit ist $\delta(A) = 0$ wie behauptet.

- n-linear? Hinweis:

  üA, üB } zeige: für i, j fixiert

  ist $A_{ij} D_{ij}(A)$ eine n-lineare Funktion

  in A. Eine lineare Kombination

  von n-linearen ist n-linear.

  Also is δ n-linear. ∎