18.10.2011

Lineare Algebra I. Vortrag 1.

Definition (i) Eine Verknüpfung (auf eine Menge G) ist (oder binäre Operation) eine Funktion:

$$* : G \times G \longrightarrow G.$$

Bezeich.: $*(g,h) := g * h$

(ii) Sei $G \neq \emptyset$

Das Paar $(G,*)$ ist eine Gruppe wenn

Assoziativ. • $(g*h)*k = g*(h*k) \quad \forall g,h,k \in G$

Neutrales Element • $\exists\, e \in G$ s.d.

$$e*g = g = g*e \qquad \forall g \in G$$

∃Z von Inversen • $\forall g \in G \;\; \exists\, h \in G$ s.d.

$$g*h = e = h*g$$

NB: Eindeutigkeit von neutralem Element und Inversen; siehe ÜB.

kommutativ oder abelsch • $g*h = h*g \qquad \forall h, g$

Bezeich: $\mathbb{Z} :=$ Menge der ganzen Zahlen, $\mathbb{Q}$ (rationale), Bezeich. $\mathbb{R} :=$ die Menge der reellen Zahlen.

Beisp. I) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ $\blacksquare$

II) $(\mathbb{Q}^\times, \cdot)$, $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ $\blacksquare$

Bezeich. $\mathbb{Q}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R}^\times = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

III) $\mathcal{F} := \{ f \mid f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \}$

Verknüpfung: $f, g \in \mathcal{F}$ definiere

$f+g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$(f+g)(r) := f(r) + g(r) \quad \forall r \in \mathbb{R}$.

Neutrales. $Z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$Z(r) = 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}$.

Inverse $-f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(-f)(r) := -(f(r)) \quad \forall r \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

Diese sind abelsche (siehe ÜB für nicht abelsche) und unendliche Gruppen.

Wir konstruieren nun Beispiele von endlichen Gruppen.

Bezeich. $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, \dots\} = \{0\} \cup \mathbb{N}$.

$\mathbb{Z} :=$ die Menge der natur. Zahlen

Divisionsalgorithmus:

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$; $b > 0$.

$\exists!\ q, r \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq r < b$

und $a = bq + r$.

Beweis Betrachte zunächst den Fall $a > 0$

Falls $0 < a < b$ setze $r := a$ ✓

sonst $a \geq b$ betrachte die Menge

$$S := \{s \in \mathbb{N} ; sb \leq a\}$$

$1 \in S$ also $S \neq \emptyset$; und S ist endlich.

Setze $q := \max S$.

$r := a - qb$.

(also $r = 0$ gdw $a = qb$)

18.10.2011

Beh $0 \leq r < b$. Widerspruchsbeweis:

$r \geq 0$ gilt per Definition ✓

Wenn $r \geq b$ dann

$$a - qb \geq b$$

i.e. $a \geq qb + b$

i.e. $a \geq (q+1)b$

also $q+1 \in S$ aber

$q+1 > q$. ↯.

Eindeutigkeit:
$$\left.\begin{array}{l} a = q_1 b + r_1 \\ b = q_2 b + r_2 \end{array}\right\} (\dagger)$$

Also von $(\dagger)$: $0 = (q_2 - q_1) b + (r_2 - r_1)$

Widerspruchsbeweis: Wenn $r_1 > r_2$

dann $(r_1 - r_2) > 0$

Also $0 < (r_1 - r_2) \underset{\text{aus } (\dagger)}{=} (q_2 - q_1) b$ (*)

$b > 0$

also $(q_2 - q_1) > 0$

also $(q_2 - q_1) b \geq b$

andererseits:

$r_1 < b$ und $r_2 < b$ also

$(r_1 - r_2) < (b - r_2) \leq b$

mit (*) erhält man einen Widerspruch:

linke Seite in (*): $< b$

rechte Seite in (*): $\geq b$. ↯. $\boxed{}$

Also $r_1 = r_2$ und mit (†) bekommt man auch
$q_1 = q_2$. $\boxed{}$

Sei nun $c \in \mathbb{Z}$; $c \leq 0$

Wenn $c = 0$ setze $q := 0$ und $r := c$

$c = 0 = 0b + 0$ ✓.

Wenn $c < 0$ setze $a := (-c)$ $a > 0$

Also $\exists!\ q, r$ mit $0 \leq r < b$ und

$a = bq + r$

$r = 0 \Rightarrow c = -a = b(-q)$ ✓

$r \neq 0 \Rightarrow c = -a = b(-q) + (-r)$
$= b(-q) - b + (b - r)$

$$= b(-q-1) + (b-r)$$

$$= b[-(q+1)] + \underbrace{(b-r)}$$

$$0 \leq r < b$$

also $0 \geq -r > -b$

also $b > (b-r) > 0$ $\blacksquare$

2. Vorlesung ~~21.10.11~~.

Aus Divisionsalgorithmus: sei $n \in \mathbb{N}$; $n > 1$

$\mathbb{Z}_n := \{0, \dots, n-1\}$ ist die Menge der "Reste" für die Division durch n.

Bezeichnung: $a \in \mathbb{Z}$; $\bar{a} :=$ Rest der Division von a durch n

i.e $\quad a = qn + \bar{a} \quad 0 \leq \bar{a} < n$

i.e $\quad$ mit $\bar{a} \in \{0, \dots, n-1\}$.

Wir definieren eine Verknüpfung:

$x, y \in \mathbb{Z}_n$

definiere

$$x +_n y := \overline{x+y}$$

Behauptung: $(\mathbb{Z}_n, +)$ ist eine abelsche Gruppe

Fall 1: $n = 1 \quad \mathbb{Z}_n = \{0\}$ die triviale Gruppe.

Fall 2 Sei $n \geq 2$. Die Verknüpfung ist wohldefiniert. ✓

Kommutativ? Seien $x, y \in \mathbb{Z}_n$.

$$x +_n y \underset{?}{=} y +_n x$$

l.S berechnen:

$$x +_n y \underset{\text{Def. von } +_n}{=} \overline{x+y} \underset{\text{weil } (\mathbb{Z}, +) \text{ abelsche Gruppe}}{=} \overline{y+x} \underset{\text{Def. von } +_n}{=} y +_n x \checkmark$$

Assoziativ? Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}_n$

$$(x +_n y) +_n z \underset{?}{=} x +_n (y +_n z)$$

Berechne l. S:

Setze: $\overline{x+y} = r_1$ und $\overline{r_1 + z} := r_2$

Also: $x+y = q_1 n + r_1$ und $\overline{r_1+z} = q_2 n + r_2$

Also $(x + y - q_1 n) + z = q_2 n + r_2$

Also $(x+y) + z = (q_1 + q_2) n + r_2$ ⊛

Berechnung der R. S.:

Setze $\overline{y+z} := r_2$ und $\overline{x+r_3} := r_4$

Also $y+z = q_3 n + r_3$ und $x + r_3 = q_4 n + r_4$

Also $x + (y+z) - q_3 n = q_4 n + r_4$

Also $x + (y+z) = (q_3 + q_4) n + r_4$ (**)

Nun vergleiche (*) und (**) und beachte

dass $(x+y)+z = x+(y+z)$ in $\mathbb{Z}$.

Also $(x+y)+z = (q_1+q_2) n + r_2 =$
$x+(y+z) = (q_3+q_4) n + r_4$

Eindeutigkeit von Rest in DA $\Rightarrow$

$r_2 = r_4$

i.e. $\overline{\overline{x+y}+z} = \overline{x+\overline{y+z}}$

i.e.

$(x +_n y) +_n z = x +_n (y +_n z)$

wie erwünscht. ∎

• $\exists^z$ von neutralem Element $0 \in \mathbb{Z}_n$

Sei $x \in \mathbb{Z}_n$

$$x +_n 0 \underset{?}{=} x$$

$$x +_n 0 = \overline{x+0} = \overline{x}$$

Aber für $x \in \mathbb{Z}_n$ gilt: $\overline{x} = x$

Also $x +_n 0 = x$. □

• $\exists^z$ von additiven Inversen

Sei $x \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

Falls $x = 0$ setze $-x = 0$.

Sei nun $x \neq 0$ und setze

$$-x := (n-x) \in \mathbb{Z}_n$$

Es gilt:

$$x +_n (-x) = \overline{x + (-x)}$$

$$= \overline{n} = 0$$ wie erwüscht. ■

— " 21.10.201

Definition 1: Ein Triple $(R, +, \cdot)$ ist ein Ring mit Eins falls:

- R ist eine nichleere menge, und
- $+$, $\cdot$ sind Verknüpfungen auf R

und

- $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element $0 \in R$,

und

$(R, \cdot)$ ist ein monoid d.h:

- $\cdot$ ist assoziativ und

es existiert $1 \in R$ mit

$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x \quad \forall x \in R$

und

- $1 \neq 0$

- und die distributivität Gesetze gelten:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Links:} & x \cdot (y+z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \text{ und} \\ \text{Rechts:} & (y+z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x) \end{array}\right\} \forall x, y, z \in R$$

Definition 2 Ein Ring $(R, +, \circ)$ ist kommutativ falls: $x \circ y = y \circ x \quad \forall x, y \in R$.

Beispiele: $(\mathbb{Z}, +, \circ)$, $(\mathbb{Q}, +, \circ)$, $(\mathbb{R}, +, \circ)$.

Gibt es endliche Beispiele?

Auf $\mathbb{Z}_n$ definieren wir:

$$x \circ_n y := \overline{xy}$$

ÜA: Prüfe daß $(\mathbb{Z}, +_n, \circ_n)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.

Bezeichnung: $F^\times := F \setminus \{0\}$.

Definition 3 $(F, +, \circ)$ ist ein Körper falls $F \neq \emptyset$, $(F, +)$ und $(F^\times, \circ)$ sind abelsche Gruppen mit 0, bzw. 1 als neutrale Elemente, $1 \neq 0$ und die distributivitätsgesetze gelten.

<u>Bemerkung</u>: Also $(F, +, \cdot)$ ist ein Körper falls $(F, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring und alle $x \in F^\times$ sind <u>multiplikativ</u> <u>invertierbar</u>, d.h.: $\exists\, x^{-1} \in F^\times$ mit $x \cdot x^{-1} = 1$.

<u>Beispiele</u>: $(\mathbb{Q}, +, \cdot) \subseteq (\mathbb{R}, +, \cdot)$ und später $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind Körper.

<u>Frage</u>: Gibt es endliche Körper?

Insbesondere betrachten wir nun die Frage: ist der Ring $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ein Körper?

Wir werden zeigen: $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ist ein Körper genau dann wenn $n = p$

3. Vorlesung 1. Teil 25/10/2011

Am Freitag 21/10 haben wir gesehen daß für $n>1$

$(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ ist ein kommutativer

Ring mit Eins. Wir wollen nun zeigen,

daß $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ ist ein Körper

genau dann wenn $n = p$ eine Primzahl ist.

"$\Rightarrow$":

Lemma 1. Jeder Körper ist ein Integritätsbereich, d.h aus $xy = 0$ folgt $x=0$ oder $y=0$ $\forall x, y$.

Beweis Sei $xy = 0$ und $x \neq 0$.

Also $x^{-1}(xy) = x^{-1}0 = 0$

d.h $(x^{-1}x)y = 1.y = y = 0$. $\blacksquare$

Bemerkung: Hier haben wir benutzt:

$\forall z \ (z.0) = 0$. ÜA. $\blacksquare$

Sei nun $n > 1$, wir zeigen:

Korollar 1. Sei $n > 1$,

$$(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n) \text{ Körper} \Rightarrow$$

$$n = p \text{ ist eine Primzahl.}$$

Beweis: Annahme: n ist **keine** Primzahl,

also $n = xy$ mit $1 < x < n$
$1 < y < n$

Also $x, y \in \mathbb{Z}_n$, $x \neq 0$, $y \neq 0$

aber $x \cdot_n y = \overline{xy} = 0$.

Also ist $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ **kein** Körper. ∎

— // —

"$\Leftarrow$" Wir wollen nun zeigen daß

$n = p$ Primzahl $\Rightarrow (\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$

ist ein Körper.

— // —

Dafür wollen wir explizit die multiplikative Inversen berechnen: Der Euklidische Algorith

25. 10. 2011

3. Vorlesung · ~~2. Teil~~

Definition 1 (i) (positive) Divisoren:

i.e $b \in \mathbb{N}$

$a, b \in \mathbb{Z}$; $b > 0$; $a = bq + r$. Falls

$r = 0$: b teilt a ; b / a ; ← Bezeichnung

b ist ein Divisor von a oder

a ist ein Vielfach von b.

(ii) $p \in \mathbb{N}$ (also $p > 1$) ist eine Primzahl

falls die einzigen (positive) Divisoren von

p sind 1 und p.

(iii) $\mathbb{N} \ni d$ ist ein gemeinsamer Teiler

von a und b falls

d / a und d / b.

} schreibe: d is gT(a, b)

(iv) $\mathbb{N} \ni d$ ist der größte gemeins. Teiler von a und b (Bezeich: $d = ggT(a, b)$)

falls d gemeins. Teiler und

d ist die größte natürliche

mit dieser Eigenschaft.

Äquivalent:

$\forall d'$; $d' \in \mathbb{N}$ und d' gemeins. Teiler von a und b

gilt: $d' \mid d$.

Der Euklidische Algorithmus (Zum berechnen von $ggT(a, b)$).

$a, b \in \mathbb{Z}$; $b > 0$; $b / a \Rightarrow ggT(a, b) = b$.

Sonst:

$$a = b\, q_1 + r_1 \qquad 0 < r_1 < b$$

$$b = r_1\, q_2 + r_2 \qquad 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2\, q_3 + r_3 \qquad 0 < r_3 < r_2$$

$\vdots$

(P) Rekursion:

$$r_{j-1} = r_j\, q_{j+1} + r_{j+1} \qquad 0 < r_{j+1} < r_j$$

$\vdots$

$$r_{n-3} = r_{n-2}\, q_{n-1} + r_{n-1} \qquad 0 < r_{n-1} < r_{n-2}$$

$$r_{n-2} = r_{n-1}\, q_n + \boxed{r_n} \qquad 0 < r_n < r_{n-1}$$

letzte $\neq 0$

absteigende Folge von natürlichen Zahlen <u>muss</u> anhalten nach

$$0 < r_n < r_{n-1} < \dots < r_2 < r_1 < b$$

endlich vielen Schritten.

<u>Behauptung</u> $r_n = ggT(a, b)$.

Die Behauptung folgt aus:

<u>Lemma 1:</u> $a = bq + r \Rightarrow$

$$ggT(a, b) = ggT(b, r)$$

<u>Beweis</u> setze $d := ggT(b, r)$

1. $d \mid b$ und $d \mid r \Rightarrow d \mid a$

   also d ist $gT(a, b)$.

2. Ferner: $d' \mid a$ und $d' \mid b$

   $\Rightarrow d' \mid a - bq$ i.e. $d' \mid r$

   also $d' \mid d$.

Also: $d = ggT(a, b)$ wie behauptet. ∎

und ferner:

Bemerkung 1 $r_n = ggT(r_{n-1}, r_{n-2})$

weil: $\left.\begin{array}{c} r_n \mid r_{n-1} \\ \text{und} \\ r_n \mid r_n \end{array}\right\} \Rightarrow r_n \mid r_{n-2}$

und $d' \mid r_{n-1}, \quad d' \mid r_{n-2}$

$$\Rightarrow$$

$$d' \mid (r_{n-2} - r_{n-1} q_n)$$

i.e $d' \mid r_n$. ∎

Also (in (P)) $ggT(a, b) = ggT(b, r_1) = ggT(r_1, r_2) = \cdots = ggT(r_{n-1}, r_{n-2}) = r_n$ ∎

Definition 2: eine lineare Kombination von a und b (über $\mathbb{Z}$) ist eine ganze Zahl γ aus der Gestalt

$$\gamma := \alpha a + \beta b \qquad \text{wobei } \alpha, \beta \in \mathbb{Z}.$$

Bemerkung 2 Wir haben ständig die folgende Tatsache benutzt:

$d' \mid a$ und $d' \mid b \Rightarrow$

d' teilt jede lineare Kombination

von a und b.

Beweis: $\gamma = \alpha d'a' + \beta d'b' = d'(\alpha a' + \beta b')$. ∎

Bemerkung 3: Rückwärts EA:

$ggT(a,b) = r_n$ ist eine lineare Kombination

(über $\mathbb{Z}$) von a und b:

Rekursion:

$$r_n = \boxed{r_{n-2}} - \underbrace{\boxed{r_{n-1}}\, q_n}$$

aber hier nur r_{n-1}, r_{n-2} werden benötigt

$$\boxed{r_{n-1}} = \boxed{r_{n-3}} - \boxed{(r_{n-2})}\, q_{n-1}$$

also

$$r_n = \boxed{r_{n-2}} - \underbrace{\left[\boxed{r_{n-3}} - \boxed{(r_{n-2})}\, q_{n-1}\right]}\, q_n$$

hier nur

r_{n-2}, r_{n-3} werden benötigt

Verfahre so weiter. ∎

Für numerische Beispiele und

Berechnungen siehe $\boxed{\text{ÜB}}$.

Bemerkung 4: $ggT(a,b) = ggT(b,a)$ $(a, b > 0)$

Korollar 2: $n = p$ eine Primzahl

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ ist ein Körper.

Bezeichnung: $\mathbb{F}_p$

Beweis $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins. Sei nun

$x \in \mathbb{Z}_p$, $x \neq 0$. Wir wollen zeigen:

$\exists\, y \in \mathbb{Z}_p$ mit $\overline{xy} = x \cdot_p y = 1$

Nun $x \in \{1, \ldots, p-1\}$ und p prim $\Rightarrow$

$ggT(x, p) = 1$.

Also $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha \neq 0$

$$\alpha x + \beta p = 1 \qquad (*)$$

also $\alpha x = (-\beta) p + 1$

A priori $\alpha \in \mathbb{Z}$, nehme $\overline{\alpha} \in \{1, \ldots, p-1\}$

(bemerke daß $\overline{\alpha} \neq 0$ sonst $p \mid \alpha$ aber dann in $(*)$ $p \mid 1$, Unsinn) also

$$\alpha = qp + \bar{\alpha} \qquad (**)$$

(**) in (*) ergibt:

$$(qp + \bar{\alpha})\, x + \beta p = 1$$

also

$$\bar{\alpha} x + q x p + \beta p = 1$$

also

$$\bar{\alpha} x + (q x + \beta) p = 1$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\alpha} x = -(q x + \beta)\, p + 1 \qquad (***)$$

mit $\bar{\alpha} \in \mathbb{Z}_p$

Setze $\bar{\alpha} := y$

Berechne $x \cdot_p y = \overline{xy} = 1$

aus (***) und Eindeutigkeit von Rest in DA. ▣

ÜA für ÜB: Zeige folgende

Proposition Sei p eine Primzahl, $a, b \in \mathbb{N}$.
Wenn $p \mid ab$ dann $p \mid a$ oder $p \mid b$. ▣

Frage: Gibt es andere endliche Körper?

— 28.10.2011

Definition (Charakteristik)

Sei K ein Körper

definiere

$$\mathrm{Char}(K) := \begin{cases} \text{die kleinste natürliche Zahl } (n \geq 2) \text{ wofür } \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ mal}} = 0 & \text{falls existiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bezeichnung:

$$\underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ mal}} := n.1$$

i.e. $\mathrm{Char}(K) = 0$ falls

$$\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ mal}} \neq 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Lemma 1: $\mathrm{Char}(K) \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Char}(K) = p$ eine Primzahl.

Beweis: Sei $n \neq 0$ $n = \mathrm{Char}(K)$

n nicht prim $\Rightarrow n = n_1 n_2$ mit

$1 < n_i < n$ für $i = 1, 2$

Also

$$0 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n_1 n_2 \text{ mal}} = (\underbrace{1+\dots+1}_{n_1 \text{ mal}})(\underbrace{1+\dots+1}_{n_2 \text{ mal}}) = 0$$

Also $(\underbrace{1+\dots+1}_{n_1 \text{ mal}}) = 0$ oder $(\underbrace{1+\dots+1}_{n_2 \text{ mal}}) = 0$. $\lightning$

$\blacksquare$

Beispiele 2 $\operatorname{Char}(\mathbb{F}_p) = p$

$\operatorname{Char}(\mathbb{Q}) = \operatorname{Char}(\mathbb{R}) = 0$

[weil $1 > 0$

also $1+1 > 0+1 = 1 > 0$

$\vdots$

$$\underbrace{1+1+\dots+1}_{(n+1) \text{ mal}} = (\underbrace{1+\dots+1}_{n \text{ mal}})+1 > (\underbrace{1+\dots+1}_{n \text{ mal}}) > 0$$]

Bemerkung und Definition $k \subset K$ ist ein Teilkörper

falls $0, 1 \in k$, k abgeschlossen unter $x+y$, xy, $-x$, x^{-1} für $x \neq 0$.

Bemerke: $\operatorname{char}(k) = \operatorname{char}(K)$. $\blacksquare$

Lemma 3:

K endlich $\Rightarrow$

$$\begin{cases} ① \ \mathrm{Char}(K) = p > 0 & \text{und} \\ ② \ |K| = p^{\ell} & \ell \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Beweis: ① wir zeigen die Kontraposition:

$\mathrm{Char}(K) = 0 \Rightarrow K$ unendlich

Wir behaupten: $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 \neq n_2 \Rightarrow$

$$\underbrace{1+\cdots+1}_{n_1 \text{ mal}} \neq \underbrace{1+\cdots+1}_{n_2}$$

Ohne Einschränkung (OE) $n_1 > n_2$; $(n_1 - n_2) > 0$

$$\underbrace{(1+\cdots+1)}_{n_1} - \underbrace{(1+\cdots+1)}_{n_2} = \underbrace{(1+\cdots+1)}_{n_1-n_2} = 0 \ ↯.$$

Die Umkehrung gilt i.a. nicht!

② Dafür brauchen lineare Algebra! Also später! (Basis und Dimension)

Example 4: $K = \mathbb{F}_p(t)$ the field of rational functions over the finite field $\mathbb{F}_p$.

K unendlich; aber $\mathrm{char}(K) = p > 0$!

• Dafür brauchen wir Polynomringe. Später!

Kapitel I: §1 Körper. Beendet!

Kapitel I: §2 Lineare Gleichungssysteme.

Definition 1: (i) Sei $n \in \mathbb{N}$, ~~und~~ K ein Körper. Eine lineare Gleichung über K in den Variablen $x_1, \dots, x_n$ und Koeffizienten in K ist eine Gleichung der Form:

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b \qquad (*)$$

wobei $a_1, \dots, a_n, b \in K$.

Terminologie: a_i ist der Koeffizient der Variab. x_i.

(ii) Ein n-Tuple $c := (c_1, \dots, c_n) \in K^n$ ist eine Lösung der Gleichung $(*)$ falls die Identität:

$$a_1 c_1 + \dots + a_n c_n = b$$

gilt in K.

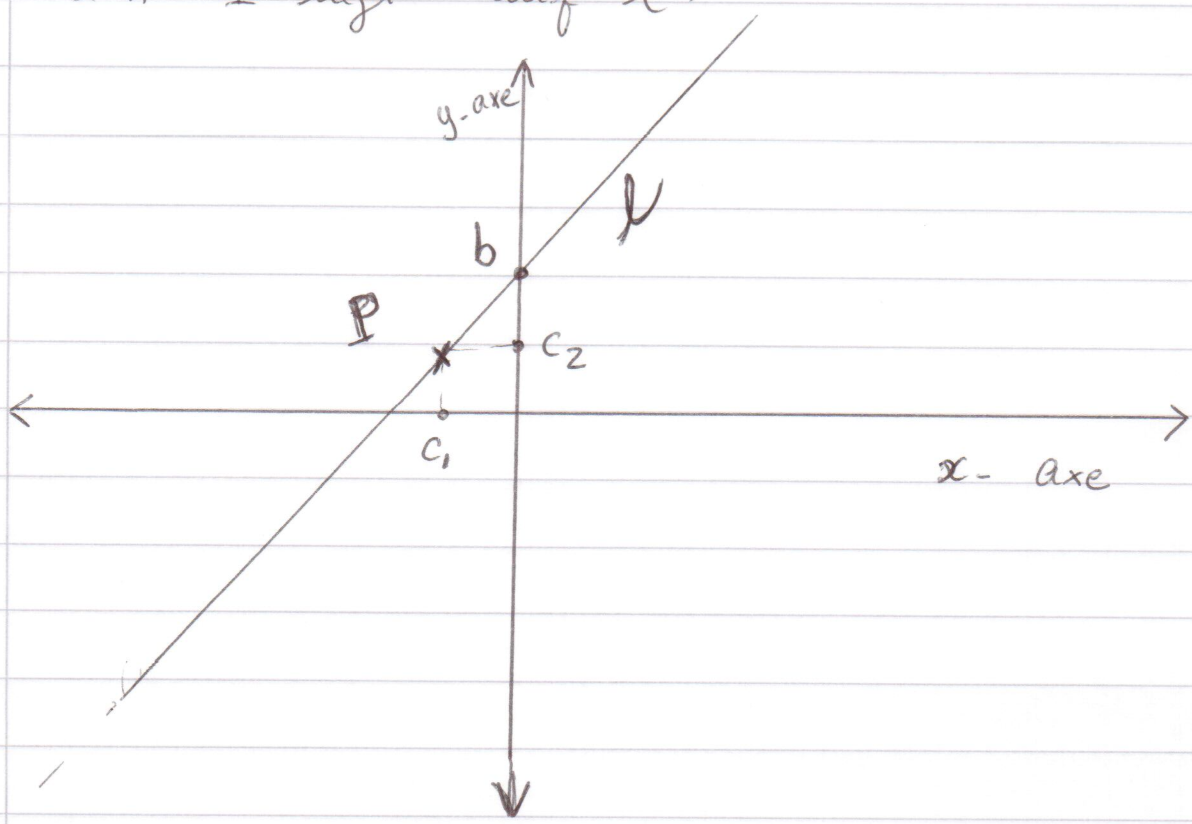
<u>Beispiele</u> a) $\sqrt{2}\,x_1 + \pi x_2 = e$ ist eine l. G. über $\mathbb{R}$

b) $2\sqrt{x_1} + \pi x_2^2 = e$ ist keine l. G. über $\mathbb{R}$

c) Linie: $y = ax + b$ ist die Gleichung
$a, b \in \mathbb{R}$
(a := Steigung ; b := Y- intersect)
einer Gerade (in der Ebene $\mathbb{R}^2$): l.

<u>Umschreiben</u>: $x_2 - a x_1 = b$.

<u>Lösung</u>: P : Punkt in $\mathbb{R}^2$ $P = P(c_1, c_2)$
mit Koordinaten c_1 und c_2
ist eine Lösung gdw $P \in l$
d.h P liegt auf l.



Lineare Algebra. 5. Vorlesung. 4/11/11

Definition 1. (i) Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ein <u>lineares Gleichungssystem</u> mit m Gleichungen und n Variablen über K ist:

$$(S)\quad \left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn} = b_m \end{array}\right\} \begin{array}{l} G_1 = b_1 \\ G_2 = b_2 \\ \vdots \\ G_m = b_m \end{array}$$

(ii) Eine <u>Lösung für (S)</u> ist $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ ein n-Tuple ~~so~~ daß:

$\underline{x}$ ist eine (simultane) Lösung für alle Gleichungen in (S).

<u>Notation</u>: $\mathcal{L}(S) := \{\underline{x} \in K^n;\ \underline{x} \text{ ist Lösung}\}$

$\mathcal{L}(S)$: die Lösungsmenge.

1. $\boxed{\text{Ziel}}$: Finde und beschreibe $\mathcal{L}(S)$.

(iii) (S) ist <u>homogen</u> falls $b_i = 0\ \forall i = 1, \ldots, m$.

(iv) (S) ist <u>konsistent</u> falls $\mathcal{L}(S) \neq \emptyset$

(S) ist ansonsten <u>inkonsistent</u> $(\mathcal{L}(S) = \emptyset)$.

(v) (S) homogen $\Rightarrow$ $\underline{x} = \underline{0} := (0, .., 0) \in \mathcal{L}(S)$

(die <u>triviale Lösung</u>). Also insbesonders

(S) homogen $\Rightarrow$ (S) konsistent.

(vi) <u>Beispiel!</u> 3 Gl. in 3 Var. über $\mathbb{R}$

$$(S_1) \begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 4 \\ x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \end{cases}$$

(TYP1) Vertauschen der ersten mit der dritten Gl. ergibt

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 \qquad &= 4 \\ 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

(TYP3) Addition des (-2)-fachen der ersten Gl. zur zweiten:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 1 \\ 2x_2 \qquad &= 2 \\ 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

(TYP2) Multiplikation der zweiten und der dritten Gl. mit $1/2$ ergibt schliesslich:

Elementare Gleichung Umformung

$$(S_2)\quad \begin{cases} x_1 \qquad\qquad = 1 \\ \qquad x_2 \quad = 1 \\ \qquad\quad x_3 = 3 \end{cases}$$

Damit ist $(1,1,3)$ eine Lösung

(prüfe durch Einsetzen) ☒

Ist $\mathcal{L} = \{(1,1,3)\}$; die Frage ist ob man durch obige Gl. Umformungen keine Lösungen verloren hat!

Wir wollen zeigen daß die Lösungsmenge unter den elementaren Gleichungsumformungen invariant ist. Wir untersuchen die nun.

TYP I: Vertauschen

$$(S_1)\ \left\{\begin{array}{l} G_1 = b \\ \vdots \\ G_i = b_i \\ \updownarrow \\ G_j = b_j \\ \vdots \\ G_m = b_m \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Typ I}} \left\{\begin{array}{l} \vdots \\ G_j = b_j \\ \vdots \\ G_i = b_i \\ \vdots \end{array}\right\}\ (S_2)$$

<u>Bemerkung I</u> (1) $(S_2) \xrightarrow{\text{Typ I}} (S_1)$

(2) $\underline{x}$ Lösung von $(S_1) \Rightarrow \underline{x}$ Lösung von (S_2)

Typ 2 : multipl. eine Gl. mit $\lambda \in K^\times$

$$(S_1)\left\{\begin{array}{l} G_1 = b_1 \\ \vdots \\ G_i = b_i \\ \vdots \\ G_m = b_m \end{array}\right. \xrightarrow{\text{Typ 2}} \left.\begin{array}{l} G_1 = b \\ \vdots \\ \lambda G_i = \lambda b_i \\ \vdots \\ G_m \end{array}\right\} (S_2)$$

Bemerkung II (i) $(S_2) \xrightarrow{\text{Typ 2}} (S_1)$

(mult. durch λ^{-1})

(ii) $G_i = b_i \Rightarrow \lambda G_i = \lambda b_i$

(folgt aus Körperaxiome), also:

$\underline{x}$ Lösung von $(S_1) \Rightarrow \underline{x}$ Lösung von (S_2).

Typ 3 : $i \neq j$; $\lambda \in K$

addiere des λ-fachen der iten Gl. zur jten Gl.

$$(S_1)\left\{\begin{array}{l} G_1 = b_1 \\ G_i = b_i \\ \vdots \\ G_j = b_j \\ \vdots \\ G_m = b_m \end{array}\right. \xrightarrow{\text{Typ 3}} \begin{array}{l} G_1 = b_1 \\ G_i = b_i \\ \vdots \\ \lambda G_i + G_j = \lambda b_i + b_j \\ \vdots \\ G_m = b_m \end{array}$$

Bemerkung III (i) $(S_2) \xrightarrow{\text{Typ}^3} (S_1)$

(addiere $(-\lambda)$-fach. der i^{ten} Gl zur j^{ten}).

(ii) $G_i = b_i \Rightarrow \lambda G_i = \lambda b_i$

und $\quad + \quad G_j = b_j$ addiere

also

(Körperaxiome) $\lambda G_i + G_j = \lambda b_i + b_j$

Also $\underline{x}$ Lösung von $(S_1) \Rightarrow \underline{x}$ Lösung von (S_2).

Definition 2: (S_2) ist äquivalent zu (S_1) falls man (S_2) aus (S_1) erhält durch endlich vielen elementaren Gleichung umfor.

Bemerkung IV: Durch Bemk. $I^{(i)}$, $II^{(i)}$, $III^{(i)}$ bekommt man sofort: (S_2) äquivalent $(S_1) \Rightarrow$

(S_1) " (S_2)

Also sagen wir: (S_1) und (S_2) sind äquivalent.

Satz 1: Äquivalente Systeme haben die gleiche Lösungsmengen.

Beweis: Aus Bemk. I (ii), Bemk. II (ii), Bemk III (ii) haben wir:

$$\mathcal{L}(S_1) \subseteq \mathcal{L}(S_2).$$

Aus Bemk I (i), Bemk. II (i), Bemk. III (i) bekommt man nun umgekehrt

$$\mathcal{L}(S_2) \subseteq \mathcal{L}(S_1).$$

Also $\mathcal{L}(S_1) = \mathcal{L}(S_2)$. ∎

Bemerkung: Wir werden die Umkehrung ~~vom~~ Satz später studieren!

Also wollen wir die Gl. Umf. um "einfachere" Systeme zu bekommen. Wir müssen den Begriff "einfacher" formalisieren. Dafür führen wir nun Matrizen ein.

Kapitel 1 § 3 Matrizen.

Definition 3 (i) Eine $m \times n$ Matrix über K ist eine Familie in K der Gestalt
$m, n \in \mathbb{N}$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

wobei $a_{ij} \in K \quad \forall i, j$.

Darstellung:

$S_j := j^{te}$ Spalte

m Zeilen

$R_i := i^{te}$ Reihe

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

n Spalten.

(ii) die Koeffizienten matrix zum System (S) ist

$$A(S) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} ;$$ und die

erweiterte Koeffizienten matrix ist

$$(A, \underline{b}) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Matrix Darstellung von (S) ist:

$$A \underline{x} = \underline{b}$$

wobei $\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ (eine $n \times 1$ Matrix mit Variablen als Koeffizienten)

und $\underline{b} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ (eine $m \times 1$ Matrix über K).

(iii) Die <u>elementare Zeilenumformungen</u> von Typ 1, Typ 2, Typ 3 entsprechen genau die elementare Gleichungumform.

(iv) Seien A, B $m \times n$ Matrizen. A und B sind <u>Zeilenäquivalent</u> falls man B aus A durch endlich vielen Zeilenumf. erhält (und / oder umgekehrt).

matrix analog von Definition 2 für Systeme

 4/11/11

Satz 2 (Matrixanalog von Satz 1)

Bei elementaren Zeilenumformungen (auf die erweiterte Koeffizientenmatrix) ändert sich die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem nicht.

Nun wollen wir endlich beschreiben, was wir mit "einfacher" meinen.

Definition 4 Eine $m \times n$ Matrix A ist in
Abkürzung: r. Z. F
reduzierte Zeilenform falls:

Bedeutung von $R_i \equiv 0$: eine Reihe der Matrix heißt "Nullreihe" falls alle Koeffiz. die darin vorkommen gleich Null sind.

(a) der erste Koeffizient $\neq 0$ in einer Reihe $R_i \not\equiv 0$ ist 1

(dieser erste verschieden von Null Koeffizient heißt Hauptkoeffizient, bzw. Haupteins.)

(b) jede Spalte von A wo sich eine Haupteins befindet hat alle andere Koeffizienten gleich Null.

Beispiel 1 (Matrix Form): Erweiterte Matrix von (S_1):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ <u>nicht</u> in r.Z.F

Erweiterte Matrix von (S_2) dagegen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

6. Vorlesung 08/11/11

Beispiel 1 (i) Die Identitäts (quadratische) Matrix I_n wird so definiert:

$$(I)_{ij} = \underbrace{\delta_{ij}}_{\text{Kronecker Delta}} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I_n ist in r. Z. F

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

sind <u>nicht</u> in r. Z. F

(iii) die $0^{m \times n}$ Matrix $\left(a_{ij} = 0 \quad \forall \begin{array}{l} i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n \end{array} \right)$

ist in r. Z. F.

Definition 1 Eine $m \times n$ Matrix A ist in (r. Z. S. F)

(reduzierten) Zeilenstufen Form falls die folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(a)
} Axiome für r. Z. F und
(b)

(c) jede identisch Null Zeile erscheint (falls vorhanden) nach jeder nicht identisch Null Zeile

(d) Seien $Z_1, \dots, Z_r$ die nicht identisch Null Zeilen $(r \le m)$
und k_i die Spalte wo die Haupteins der $i$ten Zeilen erscheint $(i = 1, \dots, r)$.

Dann gilt: $k_1 < k_2 < \dots < k_r$.

Satz 1: jede $m \times n$ Matrix A ist Zeilenäquivalent zu einer Matrix B in r. Z. S. F

Beweis: gleich ..., siehe Seite 4

Zweck: Aus der r. Z. S. F kann man $\mathcal{L}(S)$ sofort ablesen:

Beispiel 2: Über $\mathbb{Q}$: Erweiterte Koeff. M:

(i) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 7 \\ x_3 = -1 \end{array}$

(ii) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ ← inkonsistent.

(iii) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right)$

x_1, x_2, x_3 Hauptvariablen

x_4 freie Variable.

$$\begin{array}{l} x_1 + 4x_4 = -1 \\ x_2 + 2x_4 = 6 \\ x_3 + 3x_4 = 2 \end{array} \;\Bigg|\; \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -1 - 4x_4 \\ x_2 = 6 - 2x_4 \\ x_3 = 2 - 3x_4 \end{array}$$

$x_4 = q \in \mathbb{Q}$ also

$$\mathcal{L}(S) = \{(-1-4q,\ 6-2q,\ 2-3q,\ q) \in \mathbb{Q}^4;\ q \in \mathbb{Q}\}.$$

Beweis von Satz 1: Fall $A = O^{m \times n}$ dann ist A bereits in r. Z. S. F. Ansonsten:

Typ1 Bei wiederholten Anwendung von TYP 1 können wir OE annehmen daß die Zeilen

$z_1, z_2, \ldots, z_r$ nicht Null sind $(r \leq m)$

und $z_{r+1}, \ldots, z_m$ Null sind (wobei $r = m$ vorkommen kann!)

- Wir betrachten z_1:

Sei $0 \neq a_{1k_1}$ Hauptkoeffizient $(1 \leq k_1 \leq n)$

Typ2 • multipliziere z_1 durch $a_{1k_1}^{-1}$; und

~~dann~~ für jede $2 \leq i \leq r$:

Typ3 • addiere $(-a_{ik_1})$-fach von (~~der~~ neue erhaltene Zeile) z_1

zur i^{te}-Zeile: Spalte k_1

$$\begin{array}{c} z_1 \\ \\ \\ \\ z_r \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 \ldots 0 & 1 & * & \ldots & * \\ & 0 & & & \\ & \vdots & & & \\ & 0 & & & \\ - - - & & - & - - - & - \\ 0 \ldots & \vdots & & \ldots & 0 \\ 0 \ldots & 0 & & \ldots & 0 \end{pmatrix} := A_1$$

Nun betrachte z_2 der Matrix A_1 wieder

TYP 1 OE $z_2 \neq 0$

Sei $a_{2k_2} \neq 0$ Hauptkoeffizient von z_2. <u>Bemerke</u>: $k_2 \neq k_1$!

Also haben wir

$$\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 \cdots 0 & a_{2k_2} & \cdots 0 & * & \cdots & * \\ & & \vdots & & & \\ & & 0 & & & \end{pmatrix} = A_1 \quad (\text{Fall } 1) \quad (k_2 < k_1)$$

oder

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots * \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_{2k_2} \cdots & * \\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix} = A_1 \quad (\text{Fall } 2) \quad (k_1 < k_2)$$

Typ2 • Wiederhole: multipliziere z_2 durch $a_{2k_2}^{-1}$.
Dann

Typ3 • Im Fall 1 $(k_2 < k_1)$: addiere $(-a_{ik_2})$-Fach von z_2 zur i-ten Zeile für $3 \leq i \leq m$

Im Fall 2 $(k_1 < k_2)$

Typ3 addiere $(-a_{i k_2})$ - fach von Z_2 zur

i^{ten} Zeile (für $i = 1$ und $3 \leq i \leq m$). ■

Achtung: wichtig ist es zu bemerken, daß wir

die Koeffitienten

$a_{1j} = 0 \qquad j = 1, \ldots, k_1 - 1$ und

$a_{1k_1} = 1$ und

$a_{ik_1} = 0 \qquad i = 2, \ldots, m$

von A_1 in beiden Fällen $k_2 < k_1$ oder $k_1 < k_2$

(also aufjedenfall) nicht geändert

haben!

Per Induktion wiederholen wir diese

Prozedur für $i = 3, \ldots, r$.

Wir erhalten eine Matrix A_r

die nun (a), (b), (c) genügt. Schließlich

Typ I bei wiederholten Anwendung von Typ I
erhalten wir eine Matrix B die auch
(d) genügt, also B ist in r.Z.S.F. $\blacksquare$

Typ I bei wiederholten Anwendung von Typ I erhalten wir eine Matrix B die auch (d) genügt, also B ist in r. Z. S. F. ∎

---

§4 Kapitel I: 7. Vorlesung 11/11/11

Beispiel 1: Sei R folgende Matrix (über $\mathbb{Q}$)

$$R = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \end{array} \; ; \text{ finde } \mathcal{L}(S)$$

wobei (S) das homogene System

$$R\underline{X} = \underline{0}$$ ist.

Lösung: R ist in r. Z. S. F. Beobachte:

$r :=$ Anzahl der $\neq 0$ Zeilen $= 2 =$ Anzahl Hauptvariab.

$$(S) \quad \begin{aligned} x_2 - 3x_3 \quad + \tfrac{1}{2} x_5 &= 0 \\ x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

also $x_2 = 3x_3 - 1/2\, x_5$
$x_4 = \quad -2x_5$

x_1, x_3, x_5 freie Variablen, setze:
$x_1 = a$
$x_3 = b$
$x_5 = c$

also $\mathcal{L}(S) = \{ (a, 3b - 1/2\, c, b, -2c, c) \in \mathbb{Q}^5 ; a, b, c \in \mathbb{Q} \}$

Bemerke: x_1 freie Var. setze $a = 1$, $b = c = 0$

Fortsetzung 7. Vorlesung. Freitag 11/11/11.

Fortsetzung: Homogene Systeme (§4 Kapitel I).

Korollar 1: Sei R eine $m \times n$ Matrix in r.Z.S.F und setze $r :=$ die Anzahl der $\neq 0$ Zeilen von R.

Falls $r < n$ dann hat das homogene System

$$R\underline{X} = \underline{0} \qquad (*)$$

nicht triviale Lösungen.

Beweis: r = Anzahl der $\neq 0$ Zeilen in r.Z.S.F
= Anzahl der Haupteins
= Anzahl der Hauptvariablen

Also $n - r$ = Anzahl der freien Variablen.

Und $r < n \Rightarrow n - r \neq 0 \Rightarrow$
es existiert mindestens eine freie Variable x_j, wir erhalten eine nichttriviale Lösung für $(*)$ indem wir z.B setzen

$$x_j = 1.$$

$\blacksquare$

Korollar 2: Sei A eine (beliebige) $m \times n$ Matrix mit $m < n$.

Dann hat das homogene System

(S) $$A \underline{x} = \underline{0}$$

nicht triviale Lösungen.

Beweis. Sei R in r. Z. S. F zeilenäquivalent zu A. (R ist immernoch eine $m \times n$ Matrix).

Setze $r :=$ Anzahl der $\neq 0$ Zeilen von R.

Also $r \leq m < n$.

Also $\xRightarrow{\text{Kor. 1}}$

$$R \underline{x} = \underline{0} \quad (*)$$

hat nichttriviale Lösungen, und damit auch (S). ∎

Bemerkung 1: Sei R $n \times n$ in r. Z. S. F und ohne Nullzeilen (also jede Zeile hat eine Haupt 1). Dann ist $R = I_n$.

Beweis: r. Z. S. F $\Rightarrow$

$$1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq n$$

(wobei k_j ist die Spalte wo die Haupteins der Zeile z_j erscheint).

Also $k_j = j \quad \forall j = 1, \dots, n$.

Also $a_{jj} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n$

Sei $i \neq j$, dann ist a_{ij} in der

k_j te Spalte $\xrightarrow{\text{r.Z.S.F}}$ $a_{ij} = 0$ (weil $a_{ij} \neq a_{jj}$). ∎

Korollar 3: Sei A $n \times n$ Matrix.
Es gilt: A zeilenäquivalent zu I_n
$\Longleftrightarrow$ $A \underline{x} = \underline{0}$ hat nur die triviale Lösung

Beweis: "$\Rightarrow$" klar weil $I_n \underline{X} = \underline{0}$ nur die triviale Lösung hat.

"$\Leftarrow$" Sei R $n \times n$ in r. Z. S. F und Zeilenäquiv. zu A. Sei $r :=$ Anzahl der $\neq 0$ Zeilen von R. Korollar 2 $\Rightarrow$ $r \geq n$. Andererseits $r \leq n$. Also $r = n$. Also hat R keine Nullzeilen $\Rightarrow R = I_n$ ∎

Kapitel I § 5: 7. Vorlesung Fortsetzung.

Matrix Multiplikation.

Definition 1. Seien A eine $m \times n$ und B eine $n \times p$ Matrizen über $\mathbb{K}$.

Wir definieren eine neue Matrix

$C := AB$, das <u>Produkt</u>, als die

folgende $m \times p$ Matrix:

$$C_{ij} := \sum_{r=1}^{n} A_{ir} B_{rj}$$

Also: Zeilen mal Spalten !

Beispiel 1: (1)

$$\underset{m \times n}{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \underset{n \times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} =$$

$$\underset{m \times 1.}{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}}$$

(2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+0+0 & a_{12}+0+0 & a_{13}+0+0 \\ 0+a_{21}+0 & 0+a_{22}+0 & 0+a_{23}+0 \\ 0+0+a_{31} & 0+0+a_{32} & 0+0+a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(3) **Allgemeiner:** Sei A $n \times n$; es gilt:

$$C = A I_n = I_n A = A$$

Beweis: wir zeigen $A I_n = A$

($I_n A$ wird analog behandelt).

$$(A I_n)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} A_{ir} (I_n)_{rj} \qquad (*)$$

Fall 1: $r \neq j$ $(I_n)_{rj} = 0$ in $(*)$ einsetzen

Fall 2 $r = j$ $(I_n)_{rj} = 1$ bekomme eine Summe:

$$\sum_{r=1}^{n} A_{ir} (I_n)_{rj} = A_{ij} (I_n)_{jj} = A_{ij} . \qquad \blacksquare$$

(4) über $\mathbb{F}_7$:

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} (1\cdot_7 5)+(2\cdot_7 0) & (1\cdot_7 6)+(2\cdot_7 1) \\ (3\cdot_7 5)+(4\cdot_7 0) & (3\cdot_7 6)+(4\cdot_7 1) \end{pmatrix}$$

$$= \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$\blacksquare$

(5) $\overbrace{\text{Die } j^{\text{te}} \text{ Spalte von } AB}^{\text{als } m\times 1 \text{ Matrix}} =$

$\underbrace{A}_{m\times n} \underbrace{[j^{\text{te}} \text{ Spalte von } B]}_{\text{als } n\times 1 \text{ Matrix}}$

und

$\underbrace{\text{Die } i^{\text{te}} \text{ Zeile von } AB}_{\text{als } 1\times p \text{ Matrix}} =$

$\underbrace{[i^{\text{te}} \text{ Zeile von } A]}_{\text{als } 1\times n \text{ Matrix}} \underbrace{B}_{n\times p}$

$\blacksquare$

Satz 1: Seien A, B, C Matrizen über K so daß die Produkte BC und $A(BC)$ definiert sind; dann sind auch die Produkte AB und $(AB)C$ definiert, und es gilt:

$$A(BC) = (AB)C$$

Beweis: Sei B $n \times p$, also hat C p Zeilen und BC n Zeilen,
also (weil $A(BC)$ definiert ist)
Œ ist A eine $m \times n$ Matrix.

Also AB ist eine wohldefinierte $m \times p$ Matrix
und $(AB)C$ auch wohldefiniert.
damit
ist

Wir wollen nun zeigen daß die zwei Matrizen $A(BC)$ und $(AB)C$ gleich sind. Dafür müssen wir zeigen daß alle ihre Koeffizienten gleich sind.

Wir berechnen also:

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_r A_{ir} (BC)_{rj}$$

$$= \sum_r A_{ir} \left(\sum_s B_{rs} C_{sj} \right)$$

distributivität in K

$$\overset{\downarrow}{=} \sum_r \sum_s A_{ir} B_{rs} C_{sj}$$

Kommutativität und Assoziativität in K

$$\overset{\downarrow}{=} \sum_s \sum_r A_{ir} B_{rs} C_{sj}$$

$$= \sum_s \left(\sum_r A_{ir} B_{rs} \right) C_{sj}$$

$$= \sum_s (AB)_{is} C_{sj}$$

$$= [(AB)C]_{ij} \,. \qquad \blacksquare$$

Bezeichnung: A $n \times n$ und $k \in \mathbb{N}$

$$A^k := \underbrace{A \ldots A}_{k \text{ Mal}} \qquad \text{(wohldefiniert)}.$$

Ende § 5 Kapitel I.

Lineare Algebra. Kuhlmann.

8. Vorlesung 15/11/11
(Fortsetzung)

Kapitel I. § 6 Elementare Matrizen.

Notation: Sei e eine elementare Zeilenumformung auf eine $m \times n$ Matrix A.
Bezeichne mit $e(A)$ die $m \times n$ Matrix die wir somit erhalten.

Untersuchung:

Typ 1 Umtauschen von Zeilen Z_r und Z_s von A:

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r, i \neq s \\ A_{sj} & \text{für } i = r \\ A_{rj} & \text{für } i = s \end{cases}$$

Typ 2 Multipl. Z_r durch Skalar $c \neq 0$, $c \in K$:

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ cA_{rj} & \text{für } i = r \end{cases}$$

Typ 3. ersetzen von Z_r durch $Z_r + c\,Z_s$
$c \in K$; $r \neq s$

$$e(A)_{ij} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ A_{rj} + c A_{sj} & \text{für } i = r. \end{cases}$$

Definition 1:
Eine $m \times m$ Matrix ist elementar falls sie aus der Form $e(I_m)$.

Beispiel 1. die 2×2 elem. Matrizen über K:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Typ 1}$$

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} ; \; c \neq 0, \; c \in K \qquad \text{Typ 2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} ; \; c \in F \qquad \text{Typ 3.}$$

Satz 1: Sei e eine elem. Z. Umf. und E die elementare Matrix

$$E := e(I_m).$$

Sei A eine $m \times n$ Matrix über K.
Es gilt:

$$e(A) = EA.$$

Beweis: $e \in$ Typ 1: $r \neq s$

(i) $E_{ik} = \delta_{ik}$ für $i \neq r$; $i \neq s$

und

(ii) $E_{rk} = \delta_{sk}$ für $i = r$

und

(iii) $E_{sk} = \delta_{rk}$ für $i = s$

Nun:

$$(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik} A_{kj}$$

Fall (i) $i \neq r$, $i \neq s$: $(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} A_{kj}$

$$= \delta_{ii} A_{ij} = A_{ij}$$

Fall (ii) $i = r$: $(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{rk} A_{kj}$

$$= \sum_{k=1}^{m} \delta_{sk} A_{kj} = \delta_{ss} A_{sj} = A_{sj}$$

Fall (iii) $i = s$: $(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{sk} A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{rk} A_{kj}$

$$= \delta_{rr} A_{rj} = A_{rj} \qquad \blacksquare$$

e ist von Typ 2: ÜA.

e ist von Typ 3: $\boxed{r \neq s}$ $E_{ik} = \begin{cases} \delta_{ik} & \text{für } i \neq r \\ \delta_{rk} + c\,\delta_{sk} & \text{für } i = r \end{cases}$

Also: $(EA)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} E_{ik} A_{kj}$

Fall ①: $\boxed{i \neq r}$

dann $$\sum_{k=1}^{m} E_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} A_{kj}$$

$$= \delta_{ii} A_{ij} = A_{ij}$$

Fall ②: $\boxed{i = r}$

dann
$$\sum_{k=1}^{m} E_{rk} A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} (\delta_{rk} + c\,\delta_{sk}) A_{kj}$$

Hier ~~be~~bekommen wir nur zwei Terme (die möglich Ungleich Null sind), und zwar nur für $k = r$ oder $k = s$:

$\boxed{k = r} \Rightarrow$ also $k \neq s$ so $c\,\delta_{sk} = 0$ so

$$(\delta_{rk} + c\,\delta_{sk}) A_{kj} = (\delta_{rr} + 0) A_{rj} = A_{rj}$$

$\boxed{k = s} \Rightarrow$ also $k \neq r$ also $\delta_{rk} = 0$ also

$$(\delta_{rk} + c\,\delta_{sk}) A_{kj} = (0 + c\,\delta_{ss}) A_{sj} = c A_{sj} \quad \square$$

Also
$$\sum E_{rk} A_{kj} = \begin{cases} A_{ij} & \text{für } i \neq r \\ A_{rj} + c A_{sj} & \text{für } i = r. \end{cases} \quad \square$$

- Lineare Algebra - Kuhlmann.

9. Vorlesung. 18/11/11

Korollar 1 Seien A und B $m \times n$ Matrizen über K.
Es gilt:
B ~~ist~~ zu A zeilenäquivalent gdw
$B = PA$
wobei P Produkt von $m \times m$ elem. Matrizen

Beweis "$\Leftarrow$" Sei $P = E_\ell \dots E_2 E_1$

wobei E_t elementare $m \times m$ Matrix.

Also $E_1 A$ ist zeilenäquiv. zu A

und $E_2(E_1 A)$ " " " $E_1 A$

Also $E_2 E_1 A$ " " " A

So weiter fortsetzen:

⋮

$E_\ell \dots E_1 A$ " " " A

i.e B " " " A.

"$\Rightarrow$" Sei B zeilenäquiv. zu A und $e_1, \dots, e_\ell$ die elementare Zeilenumformungen mit

$$A \xrightarrow[e_1]{} \cdots \xrightarrow[e_\ell]{} B .$$

Also $\quad E_\ell \cdots E_2 E_1 A = B$

wobei $\quad E_t$ die elementare Matrix

$e_t(I_m)$ ist, für $t = 1, \dots, \ell$

Setze $\quad P := E_\ell \dots E_2 E_1 .$ $\blacksquare$

Definition 1 Eine $n \times n$ Matrix A ist invertierbar falls es eine $n \times n$ Matrix B gibt so daß:

$$AB = I_n \quad \text{und} \quad BA = I_n .$$

Im diesem Fall heißt B eine Inverse von A.

Proposition 1. Sei A invertierbar. Dann gibt es eine eindeutige Inverse

Beweis Seien B_1, B_2 beide Inverse von A. Es gilt

$$AB_1 = I_n = AB_2$$

also $\quad B_2(AB_1) = B_2(AB_2) \qquad$ (Multiplik.)

also $\quad (B_2 A) B_1 = (B_2 A) B_2$

also $\quad I_n B_1 = I_n B_2$, i.e. $B_1 = B_2$. $\blacksquare$

Notation: Wir bezeichnen mit A^{-1} die eindeutige Inverse der invertierbaren Matrix A.

Proposition 2 Seien A, B $n \times n$ über K. Es gilt:

(i) Wenn A invertierbar, so auch A^{-1}, und

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

(ii) Wenn A und B beide invertierbar, so auch AB, und

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Beweis. (i) Wir berechnen

$A A^{-1} = A^{-1} A = I_n$, also ist A die Inverse von A^{-1}.

(ii) Wir berechnen

$$B^{-1}A^{-1}(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_n B$$

$$= B^{-1}B = I_n$$

Analog $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n$. $\blacksquare$

Korollar 2. Seien $A_1, \dots, A_\ell$ $n \times n$ invertierbare Matrizen, dann ist das Produkt

$A_1 \cdots A_\ell$ auch invertierbar und es gilt

$$(A_1 \cdots A_\ell)^{-1} = A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1} \qquad (*)$$

Beweis: Induktion nach ℓ. $\ell = 1$ ✓

Induktionsannahme: $(*)$ gilt für ℓ

Induktionsschritt: $(*)$ gilt für $\ell+1$:

Beweis:
$$(A_1 \cdots A_\ell A_{\ell+1})^{-1} =$$
$$[(A_1 \cdots A_\ell) A_{\ell+1}]^{-1} \overset{\text{Prop. 2 (ii)}}{=}$$
$$A_{\ell+1}^{-1} (A_1 \cdots A_\ell)^{-1} \overset{\text{Induktionsannahme}}{=}$$
$$A_{\ell+1}^{-1} (A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1}) \overset{\text{Assoziativität.}}{=}$$
$$A_{\ell+1}^{-1} A_\ell^{-1} \cdots A_1^{-1}. \qquad \blacksquare$$

~~Korollar 3~~

Proposition 3. Elementare Matrizen sind invertierbar

Beweis. Sei $E = e(I_n)$ eine elementare Matrix

Sei e^* die umgekehrte Zeilenumformung

(auf die Zeilen von I_n).

und $E^* := e^*(I_n)$.

Wir berechnen:

$$E^* E = e^*(I_n)\, e(I_n) = I_n \text{ und}$$

$$E^* E = EE^* = I_n.$$

D. h $E^* = E^{-1}$. ∎

Beispiel 1 2×2 elementare Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix}$$

$c \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}.$$

Satz 1. Sei A $n \times n$ Matrix. Sind äquivalent:

(i) A ist invertierbar

(ii) $A\underline{x} = \underline{b}$ ist konsistent für jede $n \times 1$ Spaltenmatrix $\underline{b}$

(iii) $A\underline{x} = \underline{0}$ hat nur die triviale Lösung

Beziehung zwischen homogene und allgemeine (quadratische) Systeme.

(iv) A ist zeilenäquivalent zu I_n

(v) A ist Produkt von elementaren Matrizen.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii)

Setze $\underline{x} := A^{-1}\underline{b}$. Es gilt

$$A\underline{x} = A(A^{-1}\underline{b}) = (AA^{-1})\underline{b} = I_n \underline{b} = \underline{b}.$$

(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) schon bewiesen (Korollar 3 7. Vorlesung i.e. (Korollar 7.3)

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Wenn $A\underline{x} = \underline{0}$ nichttriviale Lösungen hätte dann ist die r. Z. S. F R von A nicht I_n, also muss eine Nullzeile haben.

Also ist zum Beispiel das System

$$(S) \quad R\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ inkonsistent.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} - & - & - & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Nun $\boxed{R = PA}$ wobei P Produkt von elementaren Matrizen (Korollar 1), also ist P invertierbar (Korollar 2 und Prop. 3).

Also multipliziere (S) durch P^{-1}:

$$(S) \quad (PA)\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist inkonsistent also}$$

$$P^{-1}(PA)\underline{x} = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist inkonsistent}$$

also

$$A\,\underline{x} = \underbrace{\underset{n\times n}{P^{-1}}\;\underset{n\times 1}{\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}}}_{n\times 1} \qquad \text{inkonsistent}$$

setze $\underline{b} = P^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$; wir bekommen

$$A\,\underline{x} = \underline{b} \qquad \text{inkonsistent. Widerspruch.}$$

(IV) $\Rightarrow$ (V) $\quad A = P' I_n = P'$

wobei P' Produkt von elem. Matrizen.

(Korollar 1).

(V) $\Rightarrow$ (i) Folgt aus Korollar 2 und Prop 3. $\blacksquare$

Korollar 3 Seien A und B $m \times n$ Matrizen.

B ist zeilenäquivalent zu A gdw

$B = PA$ mit P invertierbare $m \times m$ Matrix. $\blacksquare$

Lineare Algebra

10. Vorlesung 22. 11. 2011

– Kuhlmann –

<u>Kor 1:</u> Sei A $n \times n$ invertierbar. Eine Folge von elementaren Zeilenumformungen die A zur Identitätsmatrix I_n reduzieren, reduziert I_n zu A^{-1}.

<u>Beweis:</u> Die elementare Z. U werden durch Multiplikation (links) mit elem. matriz erreicht: d. h

$$\underbrace{E_\ell \dots E_1}\, A = I_n$$

Aber dann gilt:

$$A^{-1} = E_\ell \dots E_1 = E_\ell \dots E_1 I_n. \blacksquare$$

<u>Beispiel 1.</u>

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-1)Z_1 + Z_3]{(-2)Z_1 + Z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2 Z_2 + Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-1) Z_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[(-3) Z_3 + Z_1]{3 Z_3 + Z_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{(-2) Z_2 + Z_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

—— // ——

Kapitel 2. 10. Vorlesung Fortsetzung. 22.11.2011

§1 Vektorräume.

Definition 1. Sei K ein Körper, $V \neq \emptyset$ eine nichtleere Menge, versehen mit zwei Verknüpfungen:

(i) $\cdot : K \times V \longrightarrow V$

$(c, v) \longmapsto cv$

(Skalarmultiplikation)

und

(ii) $+ : V \times V \longrightarrow V$

$(v_1, v_2) \longmapsto v_1 + v_2$

(Vektorsumme).

Das Tripel $(V, \cdot, +)$ ist ein <u>K-Vektorraum</u> (K-VR) oder <u>ein Vektorraum über K</u> (VR / K) falls die folgende Axiome erfüllt sind:

$(V,+)$ ist eine abelsche Gruppe

$1 \cdot \alpha = \alpha \qquad \forall \alpha \in V$

$$\left.\begin{array}{l} (c_1 c_2)\alpha = c_1(c_2\alpha) \\ c(\alpha_1+\alpha_2) = c\alpha_1 + c\alpha_2 \\ (c_1+c_2)\alpha = c_1\alpha + c_2\alpha \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall c_1, c_2 \in K \\ \forall \alpha \in V \\ \forall \alpha_1, \alpha_2 \in V \\ c \in K \end{array}$$

Beispiel 1. $V = K^n$ mit koordinatenweise Verknüpfungen.

Beispiel 2:

Allgemeiner:

$K^{m \times n} := Mat_{m \times n}(K) :=$

die Menge aller $m \times n$ Matrizen

mit Koeff. aus K und Matrizensumme

und Skalarvielfach.

Beispiel 3: Sei S eine Menge

$V := \{f ; \ f : S \to K ; f \text{ Abbild.}\}$

$V := K^S$ mit Funktionensummen und Skalarvielfach.

Beispiele 1, 2 sind Sonderfälle von Beispiel 3.

Beispiel 4: Der VR der Polynomialefunktionen über K

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$$

$$c_i \in K$$

Beispiel 5: $K \mid k$ eine Körpererweiterung

Proposition 1:

für $c \in K$
$\alpha \in V$

(1) $c \cdot 0 = 0$

(2) $0 . \alpha = 0$

(3) $c\alpha = 0 \Rightarrow c = 0$ oder $\alpha = 0$

(4) $(-1)\alpha = -\alpha$

$\boxtimes$

Definition 2. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V$; $\alpha \in V$ ist

lineare Kombination davon wenn es

$c_1, \ldots, c_n \in K$ gibt mit

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} c_i \alpha_i$$

Proposition 2

$$\sum c_i \alpha_i + \sum d_i \alpha_i = \sum (c_i + d_i) \alpha_i$$

$$c \sum c_i \alpha_i = \sum (c c_i) \alpha_i .$$

$\boxtimes$

Lineare Algebra 25. 11. 2011

Kuhlmann

11. Vorlesung

(Dr. Merlin Carl in Vertretung).

Kapitel 2.

§2 Unterräume.

<u>Definition 1.</u> Sei V ein K-VR und $W \subseteq V$ eine Teilmenge. W ist ein <u>Teilraum</u> falls $(W, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum ist (mit der Einschränkung der Verknüpfungen von V auf W i.e

$+ : W \times W \longrightarrow W$ und

$\cdot : K \times W \longrightarrow W$ sollen gelten

und die VR-Axiome auch).

Dazu sind nachzurechnen:

$0_V \in W$; $\alpha, \beta \in W \Rightarrow \alpha + \beta \in W$

$c \in K, \alpha \in W \Rightarrow c\alpha \in W$

(insbesondere $\alpha \in W \Rightarrow -\alpha \in W$)

Also es gibt ein einfacheres Kriterium:

Satz 1 Sei V ein K-VR, $\emptyset \neq W \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann ist W ein Unterraum von V gdw für alle $\alpha, \beta \in W$, $c \in K$: $\alpha + c\beta \in W$. ∎

Beispiele (1) Ist V ein K-VR, so sind V und $\{0_V\}$ Unterräume von V.

(2) $V = K^n$

$W := \{(x_1, .., x_n) \in K^n \mid x_1 = 0\}$ ist Unterraum

aber

$X := \{(x_1, .., x_n) \in K^n \mid x_1 = 1 + x_2\}$ nicht!

(e.g $(0, .., 0) \notin X$).

(3) die symmetrischen $n \times n$ Matrizen über K ($A_{ij} = A_{ji}$ für $1 \leq i, j \leq n$)

Seien $A, B \in Sym_{n \times n}(K)$; $c \in K$

Dann ist

$$(A + cB)_{ij} = A_{ij} + (cB)_{ij} = A_{ij} + c\,B_{ij}$$

$$= A_{ji} + c\,B_{ji} = A_{ji} + (cB)_{ji}$$

$$= (A + cB)_{ji}$$

Also $A + cB \in Sym_{n\times n}(K)$ wie gewünscht. $\square$

(4) <u>Sehr wichtiges Beispiel.</u>

Der Lösungsraum eines homogenen LGS:

A sei eine $m \times n$ Matrix über K.

Dann ist

$$\{ x \in Mat_{n\times 1}(K) \mid Ax = 0 \}$$

ein Unterraum von $Mat_{n\times 1}(K)$.

Beweis Wir zeigen allgemeiner

Ist $A \in Mat_{m\times n}(K)$, $B, C \in Mat_{n\times p}(K)$

$d \in K$, so ist

$$A(B + dC) = AB + d\,AC$$

Denn

$$[A(B+dC)]_{ij} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik} \; (B + d\,C)_{kj}$$

$$= \sum A_{ik} \; (B_{kj} + (d\,C)_{kj})$$

$$= \sum A_{ik} B_{kj} + \sum A_{ik} \; (d\,C)_{kj}$$

$$= \sum A_{ik} \; B_{kj} + \sum d \, A_{ik} \, C_{kj} =$$

$$(A\,B)_{ij} + d \sum A_{ik} C_{kj} =$$

$$(AB)_{ij} + d\,(AC)_{ij} \, . \qquad \blacksquare$$

Insbesonders:

Ist $A X_1 = A X_2 = 0$ so auch

$$A(X_1 + d\,X_2) = 0 \, . \qquad \blacksquare$$

Definition 2. Sei V ein K-VR, $X \subseteq V$.

Eine Linearekombination von Elementen aus X ist eine (endliche) Summe $\sum_{v \in X} c_v \, v$

mit $c_v \in K$; wobei

$c_v = 0$ für alle bis auf endl. viele v.

Damit können wir nun definieren

Definition 3: Sei V ein K-VR, $X \subseteq V$.

Dann ist $\mathrm{span}(X)$, der von X

aufgespannte oder erzeugte

Unterraum, definiert als

$$\mathrm{span}(X) :=$$

$$\left\{ \sum_{v \in X} c_v v \;\middle|\; c_v \in K \text{ und } c_v = 0 \text{ für alle bis auf endl. viele } v \in X \right\}$$

Konvention: $\mathrm{span}(\emptyset) = \{0\}$.

Proposition: Für jede $X \subseteq V$ ist $\mathrm{span}(X)$

ein Unterraum

Bew. $\mathrm{Span}\, \emptyset = \{0\}$ ✓

Sonst $X \neq \emptyset \Rightarrow \mathrm{span}(X) \neq \emptyset$

$\alpha, \beta \in \mathrm{span}(X)$ etwa $\alpha = \sum_{v \in X} c_v v \quad \beta = \sum_{v \in X} d_v v$

sei $c \in K$:

also $\alpha + c\beta = \sum_{v \in X} (c_v + c d_v) v \quad \in \mathrm{Span}(X)$. ∎

Es ist sogar der „kleinste"

Unterraum der X enthält. Das ist

unser nächstes Ziel.

Satz 2. Sei V ein K-VR, X eine Menge

von Unterräumen.

Dann ist $\bigcap X$ ein Unterraum von V.

Beweis: $\bigcap X := \bigcap_{W \in X} W$.

$0_V \in W$ für alle $W \in X$ also $0_V \in \bigcap X \neq \emptyset$

Sind $\alpha, \beta \in \bigcap X$, $c \in K$, so sind für

jeden $W \in X$ $\alpha, \beta \in W$, also

$\alpha + c\beta \in W$. Damit folgt

$\alpha + c\beta \in \bigcap X$. ∎

Es sei nun für $X \subseteq V$

$\mathcal{L}(X)$ definiert als

$$\mathcal{L}(X) := \bigcap \{ W \subseteq V \,/\, W \text{ ist Unterraum und } X \subseteq W \}.$$

<u>Satz 3.</u> Für $X \subseteq V$ ist $\mathcal{L}(X) = \text{span}(X)$

<u>Bew.</u> $X = \emptyset$ $\mathcal{L}(X) := \bigcap \{ W \subseteq V \,/\, W \text{ Unterraum} \}$

$= \{0\} = \text{span}(\emptyset)$.

$X \neq \emptyset$

(1) $\mathcal{L}(X) \subseteq \text{Span}(X)$:

Es ist $\text{Span}(X) \subseteq V$ Unterraum und $X \subseteq \text{span}(X)$.

Also $\text{Span}(X) \in \{ W \subseteq V \,/\, W \text{ UR und } X \subseteq W \}$

Also $v \in \mathcal{L}(X) \Rightarrow v \in \bigcap \{ W \,/\, W \text{ UR und } X \subseteq W \}$

$\Rightarrow v \in \text{Span}(X)$.

(2) $\text{span}(X) \subseteq \mathcal{L}(X)$

Sei $v \in \text{Span}(X)$, $W \subseteq V$ UR und $X \subseteq W$

Da $v \in \operatorname{span}(X)$ ex. $(c_x ; x \in X)$

$(c_x \in K$ für alle $x \in X)$

mit $v = \sum_{x \in X} c_x x$

wobei $c_x = 0$ für alle bis auf endl. viele x.

Da W UR ist $\sum_{x \in X} c_x x = v \in W$
und $X \subseteq W$

Da W beliebig war, ist v Element jeden Unterraumes mit diesen Eigenschaften also auch des Durchschnittes. $\blacksquare$

Wir können auch mehrere UR zusammenfassen:

Definition 4. Seien $S_1, \dots, S_k \subseteq V$, V ein K-VR.

Dann ist

$$S_1 + \dots + S_k := \{ x_1 + \dots + x_k \mid x_i \in S_i ;\quad 1 \leq i \leq k \}$$

kurz auch $\sum_{i=1}^{k} S_i := \{ \sum_{i=1}^{k} x_i \mid x_i \in S_i ;\quad 1 \leq i \leq k \}$

Korollar 4 Seien $W_1, \ldots, W_k$ UR von V.

Dann ist $W := \sum_{i=1}^{k} W_i$

UR von V und $W_i \subseteq W$ für $1 \le i \le k$.

Bew. ÜA. $\square$

Korollar 5. Sind $W_1, \ldots, W_k$ Unterräume von V, so ist

$$\sum_{i=1}^{k} W_i = \operatorname{span}\left(\bigcup_{i=1}^{k} W_i\right).$$

Bew: „$\subseteq$": Sei $v \in \sum W_i$

also ex. w_i ; $i \in \{1, \ldots, k\}$ mit $w_i \in W_i$ und

$v = \sum w_i$. Dann $w_i \in \bigcup_{j=1}^{k} W_j$ für

jedes $1 \le i \le k$.

Also $v = \sum w_i \in \operatorname{Span}\left(\bigcup_{j=1}^{k} W_j\right)$.

„$\supseteq$" Sei $v \in \operatorname{Span}\left(\bigcup W_i\right)$.

Dann ex $(c_i \,;\, i \le k)$ und $(w_i \mid i \le k)$

mit $c_i \in K$; $w_i \in W_i$ so daß $v = \sum c_i w_i$

(**Bem:** Aus jedem W_i können mehrere Elemente stammen. Die müssen wir dann erst zusammenfassen!).

Da W_i UR sind, ist mit $w_i \in W_i$ auch $c_i w_i \in W_i$. Also ex. $(w_i' \mid i \leq k)$ mit $w_i' \in W_i$ und

$$v = \sum w_i' \quad (\text{nämlich } w_i' := c_i w_i).$$

Also $v \in \sum W_i$ qed. $\blacksquare$

Beispiel Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ Teilkörper, ferner

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 := (1,2,0,3,0) \\ \alpha_2 := (0,0,1,4,0) \\ \alpha_3 = (0,0,0,0,1) \end{array}\right\} \in K^5$$

$\alpha \in \mathrm{Span}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\})$ gdw ex. $c_1, c_2, c_3 \in K$ mit

$$\alpha = \sum_{i=1}^{3} c_i \alpha_i,$$ also hat α damit die Form $(c_1, 2c_1, c_2, 3c_1 + 4c_2, c_3)$.

$\mathrm{Span}(\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in K^5;\ x_2 = 2x_1,\ x_4 = 3x_1 + 4x_2\}$.

Lineare Algebra

- Kuhlmann - -

12. Vorlesung . 29. 11. 2011

Kapitel 2 § 3 Basen und Dimension

Definition 1. Sei V ein K- VR.

$S \subseteq V$ ist <u>linear abhängig (l.a)</u> über K

falls ex. verschiedene $v_1, \dots, v_n \in S$

und skalaren $c_1, \dots, c_n \in K$ nicht alle Null

mit $c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$.

S is linear <u>unabhängig</u> (l.u) über K

falls S nicht linear abhängig ist

(e.g. $\emptyset$ ist linear unabhängig).

Konvention $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ endlich : wir sagen

$v_1, \dots, v_n$ l. u / l.a.

Bem: 1. $S_1 \subseteq S_2$ und S_1 l. a $\Rightarrow S_2$ l.a also
2. $S_1 \subseteq S_2$ und S_2 l. u $\Rightarrow S_1$ l.u

Beispiel 1. 3. (i) $0 \in S \Rightarrow S$ l. a (weil $1.0 = 0$)

(ii) $\{v\}$ is l. a. gdw $v = 0$

(iii) $\{v_1, v_2\}$ l. a gdw $v_1 = c v_2$ $c \in K$

4. S l. u. gdw jede endliche Teilmenge von S l. u, d. h gdw für verschiedene Vektoren $v_1, \dots, v_n \in S$ und alle $c_1, \dots, c_n \in K$ aus $\sum c_i v_i = 0$ folgt $c_i = 0$ für $1 \leq i \leq n$.

Beispiel 2

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= (3, 0, -3) \\ v_2 &= (-1, 1, 2) \\ v_3 &= (4, 2, -2) \\ v_4 &= (2, 1, 1) \end{aligned}\right\} \in \mathbb{R}^3$$

$$2v_1 + 2v_2 - v_3 + 0.v_4 = 0$$

$\Rightarrow$ l. a. über $\mathbb{R}$

Beispiel 3 Seien $\beta_1 = (1, 1, 2)$, $\beta_2 = (1, 0, 1)$, $\beta_3 = (2, 1, 3)$

Ist $\mathrm{Span}(\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}) = \mathbb{R}^3$?

Sei $\underline{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ können wir $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ finden mit

$$(b_1, b_2, b_3) = c_1 (1,1,2) + c_2 (1,0,1) + c_3 (2,1,3)$$

d. h hat das LGS

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + 2c_3 &= b_1 \\ c_1 \qquad + c_3 &= b_2 \\ 2c_1 + c_2 + 3c_3 &= b_3 \end{aligned}$$

eine Lösung für **jede** $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$?

Satz 1 9. Vorlesung $\Rightarrow$

dies ist der Fall gdw $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

invertierbar ist. $\square$

Beispiel 4. $v_1 = (1, -2, 3) \quad v_2 = (5, 6, -1) \quad v_3 = (3, 2, 1)$

l. a ?

Betrachte $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$

Also homogene LGS

$$\left.\begin{array}{l} c_1 + 5c_2 + 3c_3 = 0 \\ -2c_1 + 6c_2 + 2c_3 = 0 \\ 3c_1 - c_2 + c_3 = 0 \end{array}\right\}$$ v_1, v_2, v_3 l. a gdw es nicht triviale Lösungen gibt

also v_1, v_2, v_3 l. u gdw

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ invertierbar ist (Satz 1 9. Vorl.).

Definition 2. Sei V ein K-VR.

Eine <u>Basis</u> für V ist eine l. u Teilmenge die V erzeugt.

V ist <u>endlich</u> <u>dimensional</u> falls es eine endliche Basis für V gibt.

i.e $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ mit

(i) S l. u

(ii) $\mathrm{span}(S) = V$.

Beispiel 5. $V = K^n$ die standard Basis ist

$\{e_i \; ; \; i = 1, .., n\}$ wobei $e_i = (0, .., \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ite Stelle}}}{1}, 0, 0)$

Satz 1 Sei V ein K-VK so daß V endlich erzeugt ist:
ex. $\beta_1, .., \beta_m \in V$ mit $\text{span}(\{\beta_1, .., \beta_m\}) = V$.

Dann ist jede l. u Teilmenge endlich und

hat höchstens m Elemente.

Bew. Wir zeigen: hat $S \subseteq V$ mehr als m Elemente dann ist S l. a.

Seien $v_1, .., v_n \in S$; $n > m$

Span $S = V$ also $\forall j = 1, .., n$

$v_j \in \text{span}(\{\beta_1, .., \beta_m\})$, also für $j = 1, ..., n$

ex. $A_{1j}, ..., A_{mj} \in K$ mit

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} \beta_i$$

Wir analysieren nun lineare Kombinationen

der v_j ; $1 \le j \le n$:

Für $x_1, \dots, x_n \in K$ berechne:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j v_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij} \beta_i$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \left(A_{ij} x_j\right) \beta_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \right) \beta_i \qquad (*)$$

Betrachte das homogene LGS in m Gleich. und n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = 0 \qquad 1 \le i \le m \qquad (**)$$

$n > m$ also Satz (7. Vorlesung Kor 2.)

impliziert es gibt nicht triviale Lösungen.

Also ex. $x_1, \dots, x_n \in K$ nicht alle Null

so daß $$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = 0 \qquad \forall\ 1 \le i \le m.$$

Zurück in $(*)$ ergibt l. a. der v_j; $1 \le j \le n$. ∎

 29.11.2011

Lineare Algebra

Kuhlmann

13. Vorlesung 02. 12. 2011

Kapitel 2 § 3 Fortsetzung:

Korollar 1. Sei V endl. dim VR über K. Es gilt:
Jede Basen haben dieselbe Kardinalität.

Bew. Seien Basen

$\mathcal{B}_1 = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ erzeugt / l. u.

$\mathcal{B}_2 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ linear unabhängig / erzeugt

Satz impliziert $n \leq m$ und auch
$m \leq n$; also $m = n$ $\boxtimes$

Wir können nun eindeutig $\dim V$ definieren:

Definition 1. Sei V endl. dim. K-VR.

$\dim V := |\mathcal{B}|$ $\quad$ $\mathcal{B}$ eine Basis für V.

Wir können nun den Satz umformulieren:

Korollar 2: Sei V endl. dim VR, $n := \dim V$.

(a) jede Teilmenge mit mehr als n Elementen

is l. a (eine l. u Teilmenge hat $\leq n$ Elemente).

(b) jede Teilmenge mit weniger als n Elementen ist nicht erzeugend
(eine erzeugende Teilmenge hat $\geq n$ Elemente).

Beispiel 1 (a) $V = \{0\}$ $\mathcal{B} = \emptyset$ $\dim V = |\emptyset| = 0$.

(b) $\dim K^n = n$ weil die standard Basis

$\mathcal{E} := \{e_1, \dots, e_n\}$ hat $|\mathcal{E}| = n$.

(c) $K^{m \times n} = Mat_{m \times n}$

hat Dimension mn : die mn Matrizen

mit eine 1 in der ij^{te} Stelle und 0 sonst

ist eine Basis.

Korollar3 (d) $V = K^{\mathbb{N}} := \{f \mid f : \mathbb{N} \to K\}$

ist <u>nicht</u> endl. dim weil die Elemente:

$$f_i : \mathbb{N} \to K$$
$$f_i(n) := \begin{cases} 1 & n = i \\ 0 & n \neq i \end{cases}$$

definieren eine unendliche l. u

Teilmenge, nämlich $S := \{ f_i \mid i \in \mathbb{N} \}$:

Seien $i_1 < \dots < i_k$

und $c_1 f_{i_1} + \dots + c_k f_{i_k} = 0$ so

$$(c_1 f_{i_1} + \dots + c_k f_{i_k})(i_l) = c_l = 0$$

$$\forall\, l = 1, \dots, k.$$

<u>Lemma 1.</u> (Fortsetzung Lemma). Sei V K-VR.

Sei S l. u in V und $\beta \notin \operatorname{span}(S)$.

Dann ist $S \cup \{\beta\}$ l. u.

<u>Bew</u> Seien $c_1, \dots, c_m, b \in K$ mit

$$c_1 \alpha_1 + \dots + \alpha_m \alpha_m + b\beta = 0$$

<u>Beh:</u> $b = 0$ sonst $b\beta = (-c_1)\alpha_1 + \dots + (-c_m)\alpha_m$
$b \neq 0$
also $\beta = [(-c_1) b^{-1}]\alpha_1 + \dots + [(-c_m) b^{-1}]\alpha_m$

$$\Rightarrow \beta \in \operatorname{span}(S) \quad ↯$$

Also $b = 0$ also $\sum c_i \alpha_i = 0$ und S l. u $\Rightarrow c_i = 0$
$1 \leq i \leq m$. ∎

Satz 1. Sei V endl. dim K-VR und

$W \subseteq V$ UR.

Jede l. u Teilmenge von W ist endlich und is Teil einer (endl.) Basis für W.

Bew sei $S \subseteq W$ l. u. und beobachte:
$S \subseteq V$ is l. u also $|S| \leq \dim V$.

Sei nun $S_0 \subseteq W$ l. u.

Wir setzen S_0 zu einer Basis fort wie folgend:

betrachte $\operatorname{span}(S_0) \underset{UR}{\subseteq} W$.

- Falls $=$ ✓
- Falls $\subsetneq$ sei $\beta_1 \in W$; $\beta_1 \notin \operatorname{span}(S_0)$

setze $S_1 := S_0 \cup \{\beta_1\}$ l. u (Lemma 1).

wiederhole: $S_1 \cup \{\beta_2\} := S_2$ l. u, usw.

In höchstens dim V viele Schritte erreichen wir $S_m = S_0 \cup \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ wofür

$\mathrm{span}(S_m) = W$ sein muss!

Ferner S_m l. u also S_m Basis für W. ☒

<u>Korollar 4</u>. Sei W ein <u>echter</u> UR vom endl. dim K-VR V. (i.e $W \subsetneq V$).

Dann ist W endl dim und $\dim W < \dim V$.

Bew: Setze $S_0 = \emptyset$ und setze fort wie im Beweis von Satz; wir erhalten eine Basis S_m von W; $\mathrm{span}(S_m) = W$ in $m \leq \dim V$ viele Schritte.

Also $m := \dim W \leq \dim V$.

Aber W echt; ex. $\beta \notin W$ ie $\beta \notin \mathrm{Span}(S_m)$.

Also $S_m \cup \{\beta\}$ l. u; so $m+1 \leq \dim V$

also $m < \dim V$. $\blacksquare$

Korollar 5. Sei V endl. dim VR über K.

Jede l. u Teilmenge ist Teil einer Basis. $\blacksquare$

Korollar 6. Seien W_1, W_2 endl. dim. K-VR. ($W_1 \subseteq V$ und $W_2 \subseteq V$ UR.)

Es gilt

$W_1 + W_2$ ist endl. dim und

$$\dim W_1 + \dim W_2 =$$

$$\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2).$$

Bew: Satz und Korollare implizieren $W_1 \cap W_2$ hat endl. Basis

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$;

und $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m\}$ Basis für W_1

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ Basis für W_2

für geeignete $\underbrace{\beta_1, \dots, \beta_m}_{\in W_1}$, $\underbrace{\gamma_1, \dots, \gamma_n}_{\in W_2}$.

Der UR $W_1 + W_2$ wird von

$\alpha_1, \dots, \alpha_k \,;\, \beta_1, \dots, \beta_m \,;\, \gamma_1, \dots, \gamma_n$

erzeugt.

<u>Beh</u>: diese Vektoren sind l.u.

<u>Bew</u>: $\sum x_i \alpha_i + \sum y_j \beta_j + \sum z_r \gamma_r = 0$ (*)

$\Rightarrow \quad -\sum z_r \gamma_r = \sum x_i \alpha_i + \sum y_j \beta_j$

Also $\sum z_r \gamma_r \in W_1$. Aber auch

$\in W_2$ per Definition

also $\in W_1 \cap W_2$.

Also $\sum z_r \gamma_r = \sum c_i \alpha_i$ für geeignete $c_1, \dots, c_k \in K$

Aber $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ l.u $\Rightarrow z_r = 0$ $1 \le r \le n$

Also $\sum x_i \alpha_i + \sum y_j \beta_j = 0$ in (*)

und $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m\}$ l.u $\Rightarrow$

$x_i = 0$ und $y_j = 0$ $1 \le i \le k$, $1 \le j \le m$ ∎

Also $\dim W_1 + \dim W_2 = (k+m) + (k+n) = k + (m+k+n)$. ∎

Lineare Algebra

– Kuhlmann –

14. Vorlesung. 06. 12. 2011.

Kapitel 2. § 4 Koordinaten.

Definition 1. Sei V endl. dim. K-VR., $\dim V = n$

Eine <u>geordnete Basis</u> ist ein n-Tupel

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; $\alpha_i \in V$

so daß $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ist eine Basis.

Notation und Terminologie:

Wir schreiben $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ist eine geordnete Basis (wir werden nicht $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ schreiben).

Lemma 1. Sei V endl. dim. K-VR ; $\alpha \in V$,

ex. eindeutiges n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$

mit $\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i$

Bew: $\alpha = \sum z_i \alpha_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)\, \alpha_i = 0$

$\Rightarrow x_i - z_i = 0 \Rightarrow x_i = z_i \qquad 1 \leq i \leq n$. ◻

Definition 2. (1) x_i ist die i^{te} Koordinate von α bzgl $\mathcal{B}$

(2) $(x_1, .., x_n)$ ist das Koordinaten Tupel von α bzgl $\mathcal{B}$.

Definition 3 V, W K-VR

(1) $T : V \longrightarrow W$ ist eine lineare Abbildung (oder Transformation) falls:

(i) $T(\alpha + \beta) = T(\alpha) + T(\beta)$

(ii) $T(c\alpha) = c\, T(\alpha)$

$\alpha, \beta \in V$; $c \in K$

oder äquivalent

(iii) $T(c\alpha + \beta) = c\,T(\alpha) + T(\beta)$.

Bem: $\left.\begin{array}{l} T(0) = T(0+0) \\ \quad = T(0) + T(0) \end{array}\right\} \Rightarrow T(0) = 0$. ◻

(2) T eine Isomorphie oder ein Isomorphismus falls T ferner bijektiv ist.

Notation: $V \overset{T}{\simeq} W$

oder $V \simeq W$

Terminologie V und W sind Isomorph.

Lemma 2. Sei T lineare Transformation.

Dann ist T injektiv gdw

$\forall \alpha \; (T(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0)$.

Bew. "$\Rightarrow$" T injektiv und $T(\alpha) = 0 = T(0)$ also $\alpha = 0$.

"$\Leftarrow$" Sei $T(\alpha_1) = T(\alpha_2)$ dann

$T(\alpha_1) - T(\alpha_2) = 0$; i.e $T(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$

also $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ und $\alpha_1 = \alpha_2$. $\boxminus$

Satz. $\left.\begin{array}{l}\dim V = n \\ V \quad K\text{-VR}\end{array}\right\} \Rightarrow V \cong K^n$

Beweis Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ geord. Basis

definiere

$$T : V \longrightarrow K^n$$

$$\alpha \longmapsto \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}$$

$:=$ koordinaten Tupel von α bzgl $\mathcal{B}$

$$T(\alpha + \beta) \stackrel{?}{=} T(\alpha) + T(\beta)$$

Sei $\alpha = \sum x_i \alpha_i \qquad \beta = \sum y_i \alpha_i$

$\alpha + \beta = \sum (x_i + y_i) \alpha_i$ eindeutig $\Rightarrow$

$T(\alpha + \beta) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) =$

$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = T(\alpha) + T(\beta)$

Anlog $T(c\alpha) = cT(\alpha)$

$T(\alpha) = (0, \dots, 0) \Rightarrow \alpha = 0$ weil $x_1 = \dots = x_n = 0$

so T injektiv.

• Sei $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$

setze $\alpha := \sum x_i \alpha_i \in V$

es gilt: $T(\alpha) = (x_1, \ldots, x_n)$

so T surjektiv. ☒

Notation:

Koordinaten Spaltenmatrix von α

bzgl $\mathcal{B}$:

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$ ☒

– Lineare Algebra –

– Kuhlmann –

15. Vorlesung 9. 12. 2011.

Beispiel 1. $V = \mathbb{R}^3$

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= (1,2,1) \\ \alpha_2 &= (2,9,0) \\ \alpha_3 &= (3,3,4) \end{aligned}\right\} \text{ eine Basis weil}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ invertierbar}$$

Finde (i) $\alpha \in \mathbb{R}^3$ mit $[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

und finde

(ii) $[\alpha]_{\mathcal{B}}$ für $\alpha = (5, -1, 9)$

zu (i): $\alpha = -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = (11, 31, 7)$

zu (ii) finde x_1, x_2, x_3 mit

$\alpha = \sum_{i=1}^{3} x_i \alpha_i$ d.h

$(5,-1,9) = x_1(1,2,1) + x_2(2,9,0) + x_3(3,3,4)$

Löse LGS:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$$

$$2x_1 + 9x_2 + 3x_3 = -1$$

$$x_1 \qquad + 4x_3 = 9.$$

Lösung $x_1 = 1 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = 2$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Was ist der Zusammenhang zwischen

$[\alpha]_{\mathcal{B}}$ und $[\alpha]_{\mathcal{B}'}$

für $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ geord. Basen?

Bem. $[\alpha]_{\mathcal{B}} = 0 \iff [\alpha]_{\mathcal{B}'} = 0$. $\boxminus$

Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ $\qquad \mathcal{B}' = \{\alpha_1', \ldots, \alpha_n'\}$

schreibe $\alpha_j' = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\, \alpha_i$ $\qquad P_{ij} \in K$ eindeutig

d.h $[\alpha_j']_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} P_{1j} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{pmatrix}$

9.12.2011

Nun sei $\alpha \in V$ beliebig

und $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$

also $\alpha = \sum_{j=1}^{n} x_j' \alpha_j' = \sum_{j=1}^{n} x_j' \sum_{i=1}^{n} P_{ij} \alpha_i$

$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (P_{ij} x_j') \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} P_{ij} x_j' \right) \alpha_i$. (*)

Es folgt aus (*) dass die $i$te Koordinate von α bzgl $\mathcal{B}$ ist

(**) $\quad x_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} x_j' \qquad 1 \leq i \leq n$

Sei P die $n \times n$ Matrix mit ijten Koeffizient P_{ij}; wir schreiben (**) um:

$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P [\alpha]_{\mathcal{B}'}$ d.h

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} P_{1j} x_j' \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} P_{nj} x_j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

9.12.2011

Ferner aus

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = 0 \Leftrightarrow [\alpha]_{\mathcal{B}'} = 0$$

folgt daß das homogene LGS

$$PX' = 0$$

nur die triviale Lösung $X' = 0$ hat,

also ist P invertierbar.

Wir bekommen also dual

$$[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} [\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

Wir haben bewiesen:

Satz 1. Sei $\dim(V) = n$ über K.

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ geord. Basen;

P die eindeutig definierte invertierbare Matrix mit Spalten $P_j := [\alpha_j']_{\mathcal{B}}$ für $j = 1, \dots, n$.

Es gelten:

9.12.2011

$\forall\ \alpha \in V$

(i) $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P\,[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ und

(ii) $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}\,[\alpha]_{\mathcal{B}}$. $\boxed{}$

Satz 2. Sei P $n \times n$ invertierbar (über K)

V n-dim K-VR

$\mathcal{B}$ geord Basis.

Es gibt eine eindeutig definierte (eindeutig bestimmte) Basis $\mathcal{B}'$ von V so daß $\forall\ \alpha \in V$:

(i) $[\alpha]_{\mathcal{B}} = P\,[\alpha]_{\mathcal{B}'}$ und

(ii) $[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}\,[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Bew: Wenn $\mathcal{B}' = \{\alpha_1', \dots, \alpha_n'\}$ (i) erfüllen sollte, dann gilt notwendigerweise

$$[\alpha_j']_{\mathcal{B}} = P\,[\alpha_j']_{\mathcal{B}'} = P \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{1j} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{pmatrix}$$

J. 9.12.2011

also $\alpha_j' = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\, \alpha_i$

Nun zeigen wir daß die so definierte α_j' eine Basis bilden.

Sei $Q := P^{-1}$. Wir berechnen:

$$\sum_j Q_{jk}\, \alpha_j' = \sum_j Q_{jk} \sum_i P_{ij}\, \alpha_i$$

$$= \sum_j \sum_i P_{ij}\, Q_{jk} \quad \alpha_i$$

$$= \sum_i \underbrace{\Big(\sum_j P_{ij}\, Q_{jk} \Big)}_{(PQ)_{ik}} \alpha_i$$

$$= \sum_i (\delta_{ik})\, \alpha_i = \alpha_k \,, \quad \text{für } 1 \le k \le n$$

Also $\operatorname{span}(\mathcal{B}') \supseteq \mathcal{B}$

So $\operatorname{Span}(\mathcal{B}') = V$ $\boxminus$

(siehe HL 1 und HL 2).

üB 8

Hilfslemma 1: $\dim V = n$

$X \subseteq V$ $\quad |X| = n$ und X l. u $\Rightarrow$

X eine Basis

Hilfslemma 2: $\dim V = n$

$X \subseteq V$ $\quad |X| = n$ und X erzeugt $\Rightarrow$

X eine Basis.

---

korollar: P $n \times n$ ist invertierbar

$\Longleftrightarrow$

Die Spalten von P sind l. u. in K^n

Beweis: $P\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P X = 0$ hat nur die triviale

Lösung $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i P_i = 0$

eine triviale lineare Kombination ist,

wobei P_i die ite Spalte von P ist. $\blacksquare$

---

korollar: P $n \times n$ ist invertierbar, $\dim(V) = n$

gdw

die Spalten von P bilden eine Basis für V. $\blacksquare$

Beispiel Eine parametrische Familie von geord. Basen.

$K = \mathbb{R}$ $\qquad \theta \in \mathbb{R}$

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

invertierbar mit

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

So für jede $\theta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{B}_\theta := \{ (\cos\theta, \sin\theta) \; ; \; (-\sin\theta, \cos\theta) \}$$

ist eine Basis für $\mathbb{R}^2$.

Sei $\alpha = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Es gilt

$$[\alpha]_{\mathcal{B}_\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta \\ -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \end{pmatrix} . \qquad \boxminus$$

Lineare Algebra

- Kuhlmann -

16. Vorlesung 13.12.2011

Erinnerung (i) $y = [y_1 \; \ldots \; y_m]$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} \qquad \alpha_i : i^{te} \text{ Zeile}$$

Es gilt: $yA = y_1\alpha_1 + \ldots + y_m\alpha_m$.

(ii) i^{te} Zeile von $BA =$
$[i^{te}$ Zeilenmatrix von $B]\; A =$

$$[B_{i1} \ldots B_{im}] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \underset{(i)}{=} \sum_{j=1}^{n} B_{ij}\,\alpha_j$$

$1 \leq i \leq n$.

Also ist die i^{te} Zeile von BA eine lineare Kombination der Zeilen von A.

Korollar 1. A $n \times n$ über K, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Zeilen vektoren von A l. u $\Rightarrow$ A invertierbar

Beweis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ ist eine Basis für K^n, also schreibe

standard Basis vektor: $e_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ij}\,\alpha_j \qquad 1 \leq i \leq n$

Sei B die $n \times n$ Matrix mit B_{ij} als Koeffizienten.

Betrachte die Matrix BA.

die i^{te} Zeile von $BA = [i^{te}$ Zeile von $B]\, A$

i.e. $(B_{i1} \ldots B_{in})\, A = \sum_{j=1}^{n} B_{ij}\, \alpha_j = e_i$

Also $BA = I_n$. $\blacksquare$

Für die Umkehrung siehe ÜB.

§ 2.5 Zeilenraum.

Definition 1. Sei $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ $m \times n$ über K

$\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in K^n$ Zeilen von A.

Der Zeilenraum von A ist $\operatorname{span}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \underset{UR}{\subseteq} K^n$

Der Zeilenrang von A ist die Dimension davon.

Satz 1 Zeilenäquivalente Matrizen haben denselben Zeilenraum.

Beweis $B = PA$ $\quad P$ invertierbar $\quad A, B$ $m \times n$

A $m \times n$
P $m \times m$
B $m \times n$

So $B = PA$ $\Leftarrow$ jede B-Zeile l. K von A-Zeilen
also $A = P^{-1} B$ $\Leftarrow$ " A-Zeile l. K " B-Zeilen

Also ~~jede~~ B-Zeile im $\mathrm{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$
und umgekehrt

Also Zeilenraum von A = Zeilenraum von B. ☒

Wir werden auch die Umkehrung von Satz 1 zeigen. ...

Dafür studieren wir den Zeilenraum von Matrizen in r. Z. S. F

Satz 2. Sei $R \neq 0$ in r. Z. S. F.
Dann bilden die Zeilenvektoren von R die ungleich 0 sind, eine Basis für den Zeilenraum von R.
(also Zeilenrang von R = # der Zeilen die ungleich 0 sind)

Beweis. Seien $\rho_1, \dots, \rho_r$ die Zeilen $\neq 0$

$$R = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_r \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Es ist klar daß $\rho_1, \dots, \rho_r$ den Zeilenraum erzeugen. Wir zeigen nun l. u. (Analog Beispiel 1 (d) in 13. Vorlesung).

Seien $k_1 < \dots < k_r$ die Spalten Indexe (wo die Haupteinse der ρ_i erscheinen)

$$c_1\rho_1 + \dots + c_r\rho_r =$$

$$c_1(0 \dots \underset{k_1}{1}, \dots, 0) + c_2(\dots 0, 0, \underset{k_2}{1}, \dots 0) + \dots +$$

$$c_r(0, \dots, 0, \underset{k_r}{1}, \dots 0) = (0, \dots, 0)$$

impliziert $c_1 = \dots = c_r = 0$. ∎

Hilfslemma ~~[illegible]~~. Seien R und R' $m \times n$ in r. Z. S. F.

Es gilt: R und R' haben denselben Zeilenraum impliziert $R = R'$

Beweis $k_1 < \dots < k_r$ $\to$ Haupteins Spalten | $k_1' < \dots < k_r'$ Index wie oben $\leftarrow$

Beobachte: ρ_i ist l. K von $\{\rho_1', \dots, \rho_r'\}$ gdw $k_i = k_i'$ $\forall i = 1, \dots, r$. ∎

Satz 3. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper.
Sei W ein U. R. von K^n;
$\dim W \le m$.

Es gilt: $\exists!$ $m \times n$ matrix in r. z. s. F R

mit Zeilenraum $R = W$.

Beweis. $\exists$: $\dim W \le m$. Seien
$\alpha_1, \dots, \alpha_m \in W$ $\quad \operatorname{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} = W$

setze $A := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ $m \times n$ Matrix

Zeilenraum $A = W$.

A z. ä. zu R in r. z. s. F

und Zeilenraum $A =$ Zeilenraum $R = W$.

Eindeutigkeit: Sei R' eine Matrix in r. z. s. F
mit
Zeilenraum $R' = W$.

Also dann gilt: Zeilenraum R = Zeilenraum R'

$\Longrightarrow$ $R = R'$. $\blacksquare$

H. L.

Korollar 1. Jede $m \times n$ Matrix ist Zeilenäquiv. zu einer **eindeutige** Matrix in r.Z.S.F.

Beweis. A z. ä. zu R
A z. ä. zu R'

$$\Rightarrow \text{Zeilenraum } R = \text{Zeilenraum } A = \text{Zeilenraum } R'$$

$$\Rightarrow R = R'. \qquad \blacksquare$$

Korollar 2. A, B $m \times n$ über K

Es gilt: A z. ä. zu B

gdw

Zeilenraum A = Zeilenraum B.

Beweis. "$\Rightarrow$" ✓

"$\Leftarrow$" $\left.\begin{array}{l}\text{Zeilenraum } A = \text{Zeilenraum } R \\ = \text{Zeilenraum } B = \text{Zeilenraum } R'\end{array}\right\} \Rightarrow R = R'$

Also $\underbrace{A \text{ z.ä. zu } R \text{ und } B \text{ z.ä. zu } R}$

$\Downarrow$

A z. ä. zu B. $\blacksquare$

Korollar 3. A, B $m \times n$ Matrizen über K.

Folgende sind äquivalent:

(1) A und B sind z.ä.

(2) A und B haben denselben Zeilenraum

(3) $B = PA$ $\quad P$ invertierbar $m \times m$. $\square$

(I) **Zusammenfassung:** Verfahren zum Berechnen von Basis und Dim. von Zeilenraum von A

- Reduziere A zu R in r. Z. S. F
- eine Basis für Zeilenraum A =

$$\{\rho_1, \ldots, \rho_r\} \quad \text{(die nicht Null Zeilen von } R\text{)}.$$

(II) Nun betrachten wir den Lösungsraum $\underset{\text{u.R}}{\subseteq} K^n$

zu $\quad AX = 0 \quad$ wobei A $m \times n$

Setze $S :=$ Lösungsraum.

Wir berechnen eine Basis und die Dimension

- Reduziere A zu R in r. Z. S. F

S ist auch Lösungsraum für $RX = 0$

- Seien $\rho_1, \ldots, \rho_r$ die nicht Null Zeilen von R
$k_1, \ldots, k_r$ die Spalten Indexe wo die Haupteins der Zeilen erscheinen

Erinnerung: Lösungsverfahren:

$\{x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}\}$ Hauptvariablen

$J = \{1, \ldots, n\} \setminus \{k_1, \ldots, k_r\}$

$\{x_j \ ; \ j \in J\}$ freie Variablen, $|J| = n-r$

Löse:

$$\left.\begin{aligned} x_{k_1} &= \sum_{j \in J} c_{1j} x_j \\ &\vdots \\ x_{k_r} &= \sum_{j \in J} c_{rj} x_j \end{aligned}\right\} \quad (*) \qquad \begin{aligned} c_{ij} &\in K \\ 1 \leq i &\leq r \\ j &\in J \end{aligned}$$

- Alle Lösungen bekommt man durch Einsetzen <u>beliebige</u> Werte für x_j; $j \in J$.

- Also sei E_j die Lösung die man bekommt durch Einsetzen

$x_j = 1$ und $x_i = 0 \ \forall i \in J \setminus \{j\}$.

Beh. Die $(n-r)$ Vektoren

$$\{ E_j \ ; \ j \in J \}$$

sind eine Basis für S.

Bew: (1) l. u wie oben

(die Spaltenmatrix E_j hat eine 1 in der j^{the} Zeile und 0 in den anderen Zeilen die durch Elementen aus J indiziert sind).

(2) Erzeugen: folgt aus (*).

Details: Ü. A . Also $\{E_j \ ; \ j \in J\}$ Basis.

Es gilt also: $\dim S = n - r$.

$\boxed{\equiv}$

- Lineare Algebra -

- Kuhlmann -

- 17. Vorlesung - 16.12.2011

Kapitel 3. Lineare Transformationen.
Fortsetzung.

Beispiel 1. (i) $T = 0$
(ii) $I(\alpha) = \alpha$ Identitäts.

Beispiel 2. $V :=$ Poly. Fkt. über K

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k$$

$$(Df)(x) = c_1 + 2 c_2 x + \dots + k c_k x^{k-1}$$

Ableitung Operator

Beispiel 3. (a) $T : K^{n \times 1} \longrightarrow K^{m \times 1}$

Sei A $m \times n$ über K

$$T(X) := AX$$

(b) $U : K^m \longrightarrow K^n$

$$U(\alpha) = \alpha A.$$

Beispiel 4: P $m \times m$
Q $n \times n$

$$T : K^{m\times n} \longrightarrow K^{m\times n}$$

$$T(A) := P\,A\,Q$$

ist linear Operator.

<u>Beispiel 5.</u> $V = \{ f ; \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig} \}$

$$T : V \longrightarrow V$$

$$f \longmapsto Tf, \text{ wobei}$$

$$(Tf)(x) := \int_0^x f(t)\,dt$$

für $x \in \mathbb{R}$.

<u>Bem 1:</u> Lineare Abbildungen erhalten l. K:

$$T\left(\sum_{j=1}^n c_j \alpha_j\right) = \sum_{j=1}^n c_j\, T(\alpha_j).$$

<u>Satz 1.</u> Sei V endl. dim. V. R $| K$

Sei $\mathcal{B} = \{ \alpha_1, \dots, \alpha_n \}$ eine geord. Basis für V.

Seien $\beta_1, \dots, \beta_n$ beliebige Vektoren in W.

$\exists!\ T: V \longrightarrow W$ l. A

mit $T(\alpha_j) = \beta_j \quad 1 \leq j \leq n$ (*).

Beweis. $\exists$ Z: Sei $\alpha \in V$

$$\alpha = \sum x_j \alpha_j$$

Definiere
$$T(\alpha) := \sum x_j \beta_j$$

Insbesondere ist (*) erfüllt.

Ist T linear?

sei $\gamma = y_1 \alpha_1 + \ldots + y_n \alpha_n$; $c \in K$

$$c\alpha + \gamma = (cx_1 + y_1)\alpha_1 + \ldots + (cx_n + y_n)\alpha_n$$

Also:

$$T(c\alpha + \gamma) = (cx_1 + y_1)\beta_1 + \ldots + (cx_n + y_n)\beta_n$$

$$= [c x_1 \beta_1 + y_1 \beta_1] + \ldots + [c x_n \beta_n + y_n \beta_n]$$

$$= (c x_1 \beta_1 + \ldots + c x_n \beta_n) + (y_1 \beta_1 + \ldots + y_n \beta_n)$$

$$= c(x_1 \beta_1 + \ldots + x_n \beta_n) + (y_1 \beta_1 + \ldots + y_n \beta_n)$$
$$= c\,T(\alpha) \qquad + \qquad T(\gamma).$$ ✓

Eindeutigkeit.

Seien $T, \mathcal{U} : V \to W$ linear

mit $T(\alpha_j) = \beta_j = \mathcal{U}(\alpha_j)$

z.z: $T(\alpha) = \mathcal{U}(\alpha) \quad \forall \alpha \in V$

Berechne:

$$\mathcal{U}(\alpha) = \mathcal{U}\left(\sum c_j \alpha_j\right) = \sum c_j \, \mathcal{U}(\alpha_j)$$

$$= \sum c_j \, T(\alpha_j) = T\left(\sum c_j \alpha_j\right) = T(\alpha). \blacksquare$$

Bem 1. Wir haben gezeigt:

① $T, \mathcal{U} : V \to W$ l. A

Es gilt: $T = \mathcal{U}$ gdw $T(\alpha_j) = \mathcal{U}(\alpha_j)$ $1 \leq j \leq n$ für eine Basis von V $\{\alpha_j ; \ 1 \leq j \leq n\}$.

② Wenn wir die Werte $T(\alpha_j)$ kennen dann können wir "T per Linearität fortsetzen".

Beispiel 6. $V = \mathbb{R}^2$ $W = \mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = (1,2) \\ \alpha_2 = (3,4) \end{array}\right\} \text{ Basis für } V$$

$\beta_1 = (3,2,1)$

$\beta_2 = (6,5,4)$

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(1,2) = (3,2,1)$$

$$T(3,4) = (6,5,4)$$

$T(e_1) = ?$

$$e_1 = (1,0) = (-2)(1,2) + (3,4)$$

$T(e_1) = (-2)(3,2,1) + (6,5,4) = (0,1,2).$ $\blacksquare$

Beispiel 7 (mehr dazu in Abschnitt 3.4).

$T : K^m \to K^n$ ist eindeutig bestimmt

durch $T(e_i) := \beta_i$ $\quad i = 1, .., m$

$\beta_i \in K^n$

Sei $\alpha = (x_1, \dots, x_m) \in K^m$

$T(\alpha) = x_1 \beta_1 + \dots + x_m \beta_m$

Setze $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \hline \hline \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(e_1) \\ \hline \dots \\ \hline T(e_m) \end{pmatrix}$

$m \times n$ Matrix

berechne

$$\alpha B = (x_1 \dots x_m) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = x_1 \beta_1 + \dots + x_m \beta_m$$

$1 \times m \qquad m \times n \qquad 1 \times n$

Also $T(\alpha) = \alpha . B$ $\blacksquare$

Bild und Nullraum (Kern).

Lemma 8 sei $T : V \to W$ l. A.

(1) $T(V) := R_T = \{ T(\alpha) ; \alpha \in V \}$

$= \{ w \mid w \in W \text{ und } \exists \alpha \in V \text{ mit } T(\alpha) = w \}$

ist ein U-R. von W

(2) $N := T^{-1}\{0\} := \{ \alpha \mid \alpha \in V \text{ und } T(\alpha) = 0 \}$

$N := \ker(T)$ ist ein U.R. von V

Beweis:

(1) $\beta_1, \beta_2 \in R_T$; $c \in K \Rightarrow$

$$c\beta_1 + \beta_2 \in R_T \,?$$

$\beta_1 = T(\alpha_1) \qquad \beta_2 = T(\alpha_2)$

$T(c\alpha_1 + \alpha_2) = cT(\alpha_1) + T(\alpha_2) = c\beta_1 + \beta_2$ ✓

$T(0) = 0 \in R_T$ also $R_T \neq \emptyset$

R_T U.R.

(2) $\alpha_1, \alpha_2 \in N$

$T(c\alpha_1 + \alpha_2) = c \cdot 0 + 0 = 0$

also $c\alpha_1 + \alpha_2 \in N$.

Auch $0 \in N$ so $N \neq \emptyset$. ∎

---

sei V endl. dim ; $T: V \to W$ l.A

Definition: $\operatorname{rang}(T) := \dim R_T$.

∎

– Lineare Algebra –

– Kuhlmann –

– 18. Vorlesung – 20.12.2011

Bemerkung. V endl. dim $T: V \to W$ l. A

Es gilt: $R_T = T(V) \underset{UR}{\subseteq} W$

ist endlich erzeugt, weil:

Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Basis für V

$$T(\alpha) = T\left(\sum c_i \alpha_i\right) = \sum c_i \, T(\alpha_i)$$
$$:= \sum c_i \, \beta_i$$

$\alpha \in V$

$\Rightarrow$ $T(\alpha) \in \operatorname{span}\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$.

Also $R_T = \operatorname{span}\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$. ∎

Satz 1. V endl. dim $T: V \to W$

Es gilt: $\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \operatorname{rang} T$

Beweis: Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ eine Basis für $N := \operatorname{Ker} T$
Sei $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in K$ s.d. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$

eine Basis für V.

Beh: $\{T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)\}$ bilden eine Basis

für R_T.

Beweis: Bem 1 $\Rightarrow$ $\{\underbrace{T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_k)}_{=0}, T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)\}$

erzeugen R_T

Also $\{T(\alpha_{k+1}), \dots, T(\alpha_n)\}$ erzeugen R_T.

Sei nun $\sum_{i=k+1}^{n} c_i \,(T(\alpha_i)) = 0$

also $T\Big(\underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} c_i \alpha_i}_{:=\alpha}\Big) = 0$

Also $\alpha \in N$; es ex. $b_1, \dots, b_k$

mit $\alpha = \sum_{i=1}^{k} b_i \alpha_i$

Also: $0 = \alpha - \alpha = \sum_{i=1}^{k} b_i \alpha_i - \sum_{j=k+1}^{n} c_j \alpha_j = 0$

Aber $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$ l. U $\Rightarrow$ $b_1 = \dots = b_k = c_{k+1} = \dots = c_n = 0$

Bsp: $A \quad m \times n$

$$T_A : K^{n\times 1} \longrightarrow K^{m \times 1}$$

$$T_A(X) := AX.$$

$\operatorname{Ker} T_A$ = Lösungsraum $AX = 0$

$$R_{T_A} = \{Y \in K^{m\times 1}; \ \exists X : AX = Y\} \quad \circledast$$

Seien $A_1, \dots, A_n$ Spalten von A

Also $\circledast$ ergibt: $Y \in R_{T_A}$ gdw

$$\exists X : \ Y = x_1 A_1 + \dots + x_n A_n$$

Also

$$R_{T_A} = \text{Spaltenraum von } A$$

und

$$\text{Rang}(T_A) = \text{Spaltenrang von } A. \qquad \blacksquare$$

<u>Wobei</u>: spaltenraum := span$\{A_1, \dots, A_n\}$

spaltenrang := dim Spaltenraum.

§ 3.2 Die Algebra der lin. Transf.

Seien V, W V-R | K

Wir haben gesehen

$$\mathrm{Fkt}(V,W) = \{ f \mid f : V \longrightarrow W \text{ eine Funktion} \}$$

versehen mit Fkt. Addition und Skalar Multiplikation ist ein K-V.R.

Satz 2. Setze $\underset{:= L}{L(V,W)} := \{ T \mid T : V \to W \text{ lineare Ab.} \}$

mit Addition

$$(T+U)(\alpha) := T(\alpha) + U(\alpha) \qquad T, U \in L$$

$$(dT)(\alpha) := d(T(\alpha)) \qquad d \in K$$

Es gilt: $T + U \in L(V,W)$

und $dT \in L$.

Beweis $(T+U)(c\alpha+\beta) \underset{\text{üA}}{=} c(T+U)(\alpha) + (T+U)(\beta)$

$$(dT)(c\alpha+\beta) = d\,T(c\alpha+\beta) = d\,(cT(\alpha) + T(\beta))$$

$= c\,d\,T(\alpha) + d\,T(\beta)$

$= c\,[\,dT(\alpha)\,] + (dT)\,(\beta)$. ∎

Bem: $0 \in L(V, W)$; $L(V,W) \neq \emptyset$

Also $\underset{UR}{L(V, W) \subseteq Fkt(V, W)}$.

Insbesondere ist $L(V, W)$ ein K-V.R.

Satz 3. V n-dim, W m-dim über K

Then $\dim L(V, W) = mn$

Beweis: $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ $\quad$ $\mathcal{B}' = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$

geord. Basis V $\quad$ geord. Basis W

For each (p, q) $\quad$ $1 \leq p \leq m$, $1 \leq q \leq n$

define $E^{p,q}$ lin. Ab.

$E^{p,q} : V \longrightarrow W$ defeniert für $j = 1, \ldots, n$

$$j = 1, \ldots, n: \; E^{p,q}(\alpha_j) := \begin{cases} 0 & j \neq q \\ \beta_p & j = q \end{cases} = \delta_{jq}\,\beta_p$$

 20.12.2011

Beh: $\{ E^{p,q} \ ; \ 1 \le p \le m \ ; \ 1 \le q \le n \}$

bilden eine Basis für L.

Bew Sei $T: V \to W$; für $1 \le j \le n$

Schreibe $T(\alpha_j) = \sum_{p=1}^{m} A_{pj} \beta_p$ in $\mathcal{B}'$

für $A_{pj} \in K$

<u>Zwisch Beh</u>:

$$\underbrace{T = \sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q}}_{:= U}$$

weil

$$U(\alpha_j) = \left(\sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q} \right) (\alpha_j)$$

$$= \sum_p \sum_q A_{pq} \delta_{jq} \beta_p$$

$$= \sum_{p=1}^{m} A_{pj} \beta_p = T(\alpha_j).$$

also $U(\alpha) = T(\alpha) \quad \forall \alpha \in V$

also $U = T$.

 20.12.2011

Also $\{E^{p,q}\ ;\ 1 \leq p \leq m,\ 1 \leq q \leq n\}$

erzeugen. L

Linear unabh. ?

Sei $U = \sum_p \sum_q A_{pq} E^{p,q} = 0$

für $A_{pq} \in K$

Also für $\alpha_j\ ;\ j = 1, \dots, n$ gilt

$U(\alpha_j) = 0$ i.e

$$\sum_{p=1}^{m} A_{pj} \beta_p = 0$$

Nun $\{\beta_p\ ;\ 1 \leq p \leq m\}$ l. u $\Rightarrow$

$A_{pj} = 0$ für alle p und j ∎

~~Definition~~ Satz 4:

Seien V, W, Z V.R $| K$

T, U lin. Ab.

$V \xrightarrow{T} W \qquad W \xrightarrow{U} Z$

Es gilt

$$V \xrightarrow{U \circ T} Z$$

is wieder linear.

Bew.: $(U \circ T)(c\alpha + \beta) =$

$U(T(c\alpha + \beta)) =$

$U(cT(\alpha) + T(\beta))$

$= c\,U(T(\alpha)) + U(T(\beta))$

$= c\,(U \circ T)(\alpha) + (U \circ T)(\beta)$. ∎

<u>Sonderfall:</u> $V = W = Z$ Also:

$L(V, V)$ hat eine Vektorenmultiplik.

$$U \cdot T := U \circ T.$$

Bezeich. Schreibe $T^0 := I$ Identitätsab.

$$T^2 := T \circ T$$

$$\vdots$$

$$T^n := T \circ \dots \circ T$$

__Definition:__

Sei K Körper, eine __lineare algebra__ L über K ist ein K-V.R versehen mit Vektorenmult. so daß

(a) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

(b) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

$(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

$\forall\, \alpha,\beta,\gamma \in L$

(c) $\forall\, c \in K$

$$c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta)$$

Falls ex. $1 \in L$ mit

(d) $1.\alpha = \alpha.1 = \alpha \quad \forall\, \alpha \in L$

heißt L eine l. A. mit Einheit.

(e) Falls $\alpha\beta = \beta\alpha$ heißt L kommutativ.

$\forall\, \alpha,\beta \in L$

Lemma $L(V,V)$ ist eine K-lineare Algebra mit Einheit

i.e es gelten

(a) $I \circ U = U \circ I = U$

(b) $U(T_1 + T_2) = UT_1 + UT_2$

$(T_1 + T_2)U = T_1 U + T_2 U$

(c) $c(UT_1) = (cU)T_1 = U(cT_1)$.

Bew. (a) ✓

(b):

$$U(T_1+T_2)(\alpha) = U(T_1+T_2(\alpha)) = U(T_1(\alpha)+T_2(\alpha))$$

$$= U(T_1(\alpha)) + U(T_2(\alpha)) = (UT_1)(\alpha) + (UT_2)(\alpha).$$

Auch: $[(T_1+T_2)U](\alpha) = (T_1+T_2)(U(\alpha))$

$$= T_1(U(\alpha)) + T_2(U(\alpha)) = (T_1 U + T_2 U)(\alpha).$$

(c) analog. ▣

- Lineare Algebra -

- Kuhlmann -

19. Vorlesung

Am 10.01.2012

<u>Definition 1.</u> Sei $T: V \longrightarrow W$ eine Abbildung.

T ist <u>invertierbar</u> wenn es eine Abbildung U gibt mit

$$U: W \longrightarrow V \quad \text{und}$$

$$U \circ T = Id_V \quad \text{und} \quad T \circ U = Id_W$$

(wobei Id die Identitätsab. bezeichnet:

$$Id(x) = x \qquad \forall x)$$

<u>Lemma 1.</u> T invertierbar $\Longleftrightarrow$ T ist bijektiv

<u>Beweis:</u> "$\Rightarrow$" 1) $T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow x_1 = (U \circ T)(x_1) =$

$U(T(x_1)) = U(T(x_2)) = (U \circ T)(x_2) = x_2$, injektiv ✓

2) $(T \circ U)(y) = y$ also $y = T(U(y))$ surjektiv ✓

$\forall y \in W$

"$\Leftarrow$" T bijektiv $\Longleftrightarrow$ $\forall y \in W \; \exists! \; x \in V$ mit $T(x) = y$

Setze $\mathcal{U}(y) := x$ also $\mathcal{U}: W \longrightarrow V$ wird eindeutig definiert durch

$$\mathcal{U}(y) = x \iff T(x) = y .$$

Berechne: $\mathcal{U}(T(x)) = ?$ setze $y := T(x)$

also $\mathcal{U}(T(x)) = x$. Analog $T(\mathcal{U}(y)) = y$

also $\mathcal{U} \circ T = Id_V$ und $T \circ \mathcal{U} = Id_W$ ∎

<u>Bezeichnung</u>: T invertierbar $\Rightarrow \mathcal{U}$ ist eindeutig definiert, schreibe $\mathcal{U} := T^{-1}$

Also $T^{-1}(y) = x \iff y = T(x)$.

<u>Satz 1</u>: T linear und invertierbar
$\Rightarrow T^{-1}$ " " "

<u>Beweis</u>: $$\underbrace{T^{-1}(c\beta_1 + \beta_2)}_{:= Y} \overset{?}{=} \underbrace{c\,T^{-1}(\beta_1) + T^{-1}(\beta_2)}_{:= X}$$

$T^{-1}(Y) = X \iff T(X) = Y$ Also

Berechne:

$$T(X) = T\left(c\,T^{-1}(\beta_1) + T^{-1}(\beta_2)\right) = c\,T\left(T^{-1}(\beta_1)\right) + T\left(T^{-1}(\beta_2)\right)$$
$$= c\,\beta_1 + \beta_2$$ ∎

Satz 2. Es seien: $V \xrightarrow{G} W \xrightarrow{L} Z$

invertierbare Abbildung, invertierbar Abbildung

Dann ist $L \circ G : V \longrightarrow Z$ invertierbar

und $(L \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ L^{-1}$

Beweis $(G^{-1} \circ L^{-1}) \circ (L \circ G) =$

$G^{-1} \circ (L^{-1} \circ L) \circ G = G^{-1} \circ I \circ G$

$= G^{-1} \circ G = I$. Andere: Analog ▣

Definition und Bezeichnung 2

$GL_K(V) := \{ T \mid T : V \to V$ invertierbare lineare Abbildung$\}$

Bemerkung: Wir haben gerade gezeigt daß $GL_K(V)$ mit der Verknüpfung $\circ$ eine Gruppe ist. $GL_K(V)$ ist die allgemeine lineare Gruppe (general linear group).

Definition 3 T ist singulär falls $\ker(T) \neq \{0\}$

Sonst heißt T regulär oder nicht singulär

Also T regulär bedeutet: $T(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Satz 3 $T: V \longrightarrow W$ ist regulär $\Longleftrightarrow$

T bildet eine lin. unab. Teilmenge

von V auf " " " " von W.

Beweis "$\Longrightarrow$" Sei $\ker(T) = \{0\}$

$\alpha_1, \dots, \alpha_k$ l. u. in V. Z. Z: $T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_k)$ l. u.

Sei $c_1 T(\alpha_1) + \dots + c_k T(\alpha_k) = 0$ also

$T(c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k) = 0$ also

$c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k \in \ker(T)$

also $c_1\alpha_1 + \dots + c_k\alpha_k = 0$; $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ l. u

$\Rightarrow$ $c_1 = \dots = c_k = 0$. ∎

Korollar 4. Sei $\dim(V) = \dim(W) = d$

$T: V \longrightarrow W$ l. A.

Es gilt: T ist injektiv $\Longleftrightarrow$ T ist surjektiv.

Beweis. Wir wenden Dimensionssatz (Satz 1, 18. Vorlesung) an.

$d = \text{rang}(T) + \dim \ker(T)$. Also

T injektiv $\Longleftrightarrow \ker(T) = \{0\} \Longleftrightarrow \dim \ker(T) = 0 \Longleftrightarrow$
$\text{rang}(T) = d \Longleftrightarrow \dim R_T = d \Longleftrightarrow R_T = W \Longleftrightarrow T$ surjektiv. ∎

Lineare Algebra

Kuhlmann

20. Vorlesung am

Freitag 13.01.2012

Kapitel 3 § 3.4 Matrix Darstellung von lin. Transf.

<u>Ansatz:</u> Seien V, W K-VR mit $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$.

$T: V \longrightarrow W$ lin. Abb.

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ geord. Basis für V und

$\mathcal{B}' = \{\alpha_1', \dots, \alpha_m'\}$ " " " W.

<u>Definition 1.</u> T ist eindeutig bestimmt durch $T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n) \in W$.

Schreibe $[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} := \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}$ für $j = 1, \dots, n$

und setze

$$[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} := \left([T(\alpha_1)]_{\mathcal{B}'} \middle| \dots \middle| [T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}'} \right)$$

Diese $m \times n$ Matrix heißt die <u>Matrix Darstellung</u>

von T bezgl. der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$.

Welche Eigenschaften hat $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$?

Satz 1. Es gilt: für $\alpha \in V$

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \, [\alpha]_{\mathcal{B}} \quad (*)$$

Bew.: Setze: $A := [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = [A_{ij}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Nun ist $[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}$ also ist $T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} \alpha_i'$

Berechne nun:

$$T(\alpha) = T\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \alpha_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \, T(\alpha_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij} \alpha_i' = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j\right) \alpha_i'$$

Es folgt: $[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} A_{mj} x_j \end{pmatrix}$

$$= A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{. wie beh.} \quad \blacksquare$$

Bemerkung: $(*)$ bestimmt die Matrix $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ eindeutig !

Bsp 1. Sei A $m \times n$. Wir haben 2 lineare Abb. dazu assoziert:

(1) $$T : K^{n\times 1} \longrightarrow K^{m \times 1}$$

und $$T(x) := Ax$$

(2) $$\mathcal{U} : K^m \longrightarrow K^n$$

$$\mathcal{U}(\alpha) := \alpha A.$$

(1) Seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ die standard Basen für $K^{n\times 1}$ und $K^{m\times 1}$. Wir berechnen $[T]_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$.

Setze $\mathcal{E} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ $\quad \mathcal{E}' = \{\varepsilon_1', \dots, \varepsilon_m'\}$

Dafür berechne $[T(\varepsilon_j)]_{\mathcal{B}'}$. Nun ist

$$T(\varepsilon_j) = A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = j^{\text{te}} \text{ Spalte von } A = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}$$

und $$\begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} A_{ij} \, \varepsilon_i' , \quad \text{also}$$

$$[T(\varepsilon_j)]_{\mathcal{E}'} = j^{\text{te}} \text{ Spalte von } A, \text{ insbesonders}$$

ist $$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = A. \quad \square$$

(2) Für (2) siehe ÜB.

Satz 2. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \rho : L(V,W) &\longrightarrow K^{m\times n} \\ T &\longmapsto [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \end{aligned}$$

ist eine Isomorphie von K-VR.

Bew. <u>ρ linear?</u> Berechne

$$\rho(cT_1+T_2) = [cT_1+T_2]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} =$$

$$\Big(\underbrace{[(cT_1+T_2)(\alpha_1)]_{\mathcal{B}'}}_{} \;\Big|\; \dots \;\Big|\; [(cT_1+T_2)(\alpha_n)]_{\mathcal{B}'} \Big) = ?$$

$$\overbrace{}^{j^{te} \text{ spalte von } \rho(cT_1+T_2)}$$

Nun ist $[(cT_1+T_2)(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = [cT_1(\alpha_j)+T_2(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}$

$$= c\underbrace{[T_1(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}_{j^{te}\text{ Spalte von } \rho(T_1)} + \underbrace{[T_2(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'}}_{j^{te}\text{ spalte von } \rho(T_2)}$$

$\boxed{\text{Also,}}$ j^{te} spalte von $\rho(cT_1+T_2)$ ist gleich j^{te} spalte von $\rho(T_2)$ plus c mal j^{te} Spalte von $\rho(T_1)$

Also: $\rho(cT_1+T_2) = c\rho(T_1)+\rho(T_2)$.

<u>ρ injektiv?</u> Sei $T \in L(V,W)$ mit $\rho(T) = 0_{m\times n}$

Dann ist $[T(\alpha_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall j = 1,\dots,n$

Aber dann ist $T(\alpha_j) = 0 \quad \forall j=1,\dots,n$

Also T ist identisch die Nullabbildung.

<u>ρ ist surjectiv</u> folgt nun weil $mn = \dim L(V,W) = \dim K^{m\times n}$ ▫

(siehe ÜB).

Wir betrachten Sonderfall: $T : V \to V$ lin. Op. und $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$

Definition und Bezeichnung 2: Schreibe $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} := [T]_{\mathcal{B}}$

die Matrix Darst. der Operators in der Basis $\mathcal{B}$.

Hier gilt also die folgende Version von ⊛

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}} [\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

Nun betrachten wir die matrix Darst. von Hintereinander-Ausführungen:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend right, "U \circ T"'] & W \arrow[r, "U"] & Z \end{tikzcd}$$

Ansatz:

V, W, Z end. dim. K-VR

T, U lin. Abb.

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, .., \alpha_n\}$ V Basis

$\mathcal{B}' = \{\beta_1, ..., \beta_m\}$ W Basis

$\mathcal{B}'' = \{\gamma_1, .., \gamma_p\}$ Z Basis.

Setze: $A = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $B = [U]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}$,

$$C = [U \circ T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = ?$$

Satz 3 $C = BA$.

Beweis $[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} \underset{⊛}{=} A[\alpha]_{\mathcal{B}}$ und $[U(T(\alpha))]_{\mathcal{B}''} \underset{⊛}{=} B[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}$

Also $[(U \circ T)(\alpha)]_{\mathcal{B}''} = BA[\alpha]_{\mathcal{B}}$.

Also die Matrix BA erfüllt ⊛ bzgl $U \circ T$. Die Eindeutig. impliziert nun unsere Behauptung. ∎

Lineare Algebra

-Kuhlmann-

21. Vorlesung am

17. 01. 2012

Ansatz wie in der 20. Vorlesung: V endl. dim ; $\mathcal{B}$ geord. V Basis.

Korollar 1: $\rho : L(V,V) \longrightarrow K^{n \times n}$

$$\rho(T) := [T]_{\mathcal{B}}$$

ist ein K- Algebren Isomorphismus.

Beweis: ρ ist ein K-VR Isom.

Ferner gilt es:

$$\rho(T_1 \circ T_2) = \rho(T_1)\rho(T_2). \blacksquare$$

Korollar 2 $T : V \longrightarrow V$.

Es gilt: T ist invertierbar gdw $[T]_{\mathcal{B}}$ invertierbar.
Im diesem Fall gilt ferner: $[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$.

Beweis. T invertierbar $\Leftrightarrow \exists T^{-1}$ mit $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = Id$

$\Leftrightarrow [T \circ T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T^{-1} \circ T]_{\mathcal{B}} = [Id]_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow$

$[T]_{\mathcal{B}} [T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}} = I_n \Leftrightarrow [T]_{\mathcal{B}}^{-1} = [T^{-1}]_{\mathcal{B}}. \square$

<u>Ansatz:</u> V endl. dim $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$
und $\mathcal{B}' = \{\alpha_1', \dots, \alpha_n'\}$ zwei geord. Basen für V.

$T \in L(V, V)$.

<u>Fragestellung:</u> Was ist die Beziehung zwischen $[T]_{\mathcal{B}}$ und $[T]_{\mathcal{B}'}$?

<u>Nun:</u> Satz 1. S.4 15. Vorlesung liefert eine invertierbare P s.d. für alle $\alpha \in V$ es gilt:

$$[\alpha]_{\mathcal{B}} = P\,[\alpha]_{\mathcal{B}'} \qquad (**)$$

Und Satz 1 20. Vorlesung liefert eindeutige Matrix s.d.

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}\,[\alpha]_{\mathcal{B}} \qquad (*)$$

Nun gilt $(**)$ für $T(\alpha) \in V$:

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}} = P\,[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'} \qquad (***)$$

$(*) \wedge (**) \wedge (***)$ liefert:

$$[T]_{\mathcal{B}}\,P\,[\alpha]_{\mathcal{B}'} = P\,[T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}$$

oder

$$\left(P^{-1}\,[T]_{\mathcal{B}}\,P\right)[\alpha]_{\mathcal{B}'} = [T(\alpha)]_{\mathcal{B}'}$$

Also erfüllt diese die bestimmende matrizielle Gleichung $(*)$ bzgl der Basis $\mathcal{B}'$. Die Eindeutigkeit von $[T]_{\mathcal{B}'}$ für die Erfüllung der $(*)$ liefert nun:

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1} \, [T]_{\mathcal{B}} \, P.$$

wobei $P = \left([\alpha_1']_{\mathcal{B}} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, [\alpha_n']_{\mathcal{B}} \right)$

<u>Bemerkung</u>: Betrachte die Abbildung

$\pi : V \longrightarrow V$ die lineare Abb.

eindeutig definiert durch die Angaben:

$$\pi(\alpha_j) := \alpha_j' \qquad \forall\, j = 1, \dots, n$$

Dieser Operator ist invertierbar da er eine Basis auf eine Basis abbildet (Korollar zu Satz 3 S. 4 19. Vorlesung). So die Matrix Darstellung $[\pi]_{\mathcal{B}}$ ist invertierbar. Es ist

$$[\pi]_{\mathcal{B}} = \left([\pi(\alpha_1)]_{\mathcal{B}} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, [\pi(\alpha_n)]_{\mathcal{B}} \right) =$$

$$\left([\alpha_1']_{\mathcal{B}} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, [\alpha_n']_{\mathcal{B}} \right) = P.$$

P heißt deshalb "Matrix der Basiswechsel".

Wir haben bewiesen:

Satz 1: (Ansatz wie Oben)

$$\boxed{\begin{aligned}[T]_{\mathcal{B}'} &= [\Pi]_{\mathcal{B}}^{-1} \; [T]_{\mathcal{B}} \, [\Pi]_{\mathcal{B}} \quad \text{oder} \\ [T]_{\mathcal{B}'} &= P^{-1} \; [T]_{\mathcal{B}} \, P\end{aligned}}$$

Definition 1. Seien $A, B \in K^{n\times n}$. Wir sagen B ist zu A ähnlich falls es eine invertierbare $P \in K^{n \times n}$ gibt so daß:

$$B = P^{-1} A P.$$

Wir haben in Satz 1 bewiesen:

Sind $B = [T]_{\mathcal{B}'}$ und $A = [T]_{\mathcal{B}}$ die Matrix Darst. des Operators T bzgl der Basen $\mathcal{B}'$ bzw. $\mathcal{B}$, dann ~~sind~~ ist B zu A ähnlich. Eigentlich gilt auch die Umkehrung!

Satz 2: B ist ähnlich zu A gdw B und A denselben lin Operator (bezgl. geeignete Basen) darstellen.

Beweis "$\Leftarrow$" bereits gemacht. Sei nun $\mathcal{B}$ eine beliebige Basis.
"$\Rightarrow$" Sei T der eindeutig definierte Operator

durch

$$[T]_{\mathcal{B}} = A \,, \text{ d.h } [T(\alpha)]_{\mathcal{B}} := A\,[\alpha]_{\mathcal{B}} \quad (*)$$

Sei $\mathcal{B}'$ die Basis erhalten von P, d.h wofür

$$P = \left([\alpha_1']_{\mathcal{B}} \middle| \cdots \middle| [\alpha_n']_{\mathcal{B}} \right)$$ sein sollte

diese Angabe bestimmt also daß:

$$[\alpha_j']_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} P_{1j} \\ \vdots \\ P_{nj} \end{pmatrix} \quad \text{d.h}$$

$$\alpha_j' := \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\,\alpha_i$$

Beh. Es gilt: $\quad [T]_{\mathcal{B}'} = B. \quad$ Ü A. (siehe ÜB). $\square$

Exkurs: Definition: sei eine Relation $R \subseteq S \times S$.
Schreibe $x R y \iff (x,y) \in R$.

R heißt Äquivalenzrelation falls:
(1) $x R x \quad \forall x \in S$ (Reflexiv)
(2) $x R y \Rightarrow y R x \quad \forall x, y \in S$ (Symmetrie)
(3) $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z \quad \forall x, y, z \in S$ (Transitiv).

Beispiel: B ähnlich A ist eine Äquiv. Rel auf $K^{n \times n}$:

(1) $B = I_n^{-1} B I_n$ ✓

(2) $B = P^{-1} A P \Rightarrow A = P B P^{-1} = (P^{-1})^{-1} B (P^{-1})$
setze $Q := P^{-1}$ also: $A = Q^{-1} B Q$ ✓

(3) $\left.\begin{array}{l} B = P^{-1} A P \\ C = Q^{-1} B Q \end{array}\right\} \Rightarrow C = (PQ)^{-1} A (PQ)$. $\square$

 17.01.2012 Mehr dazu im ÜB...

- Lineare Algebra -

~ Kuhlmann ~

~ 22. Vorlesung ~
am
20. 01. 2012.

§3.5 Lineare Funktionale.

Bemerkung 1 $W = K^1$ ist ein K-VR.

$\dim(W) = 1$. Standard Basis ist $\{1\}$.

$W' \subseteq V$ Unterraum $\Rightarrow$ $W' = \{0\}$ oder $W' = V$

Also $\dim W' = 0$ oder $\dim W' = 1$. Und

$\dim W' = 1$ gdw $W' \neq \{0\}$.

Definition 1. $f \in L(V, K)$ heißt linear Funktional.

Beispiel 1 $V = K^n$ $\quad \mathcal{E}$ Standard Basis.

Sei $(a_1, .., a_n) \in V$ fixiert. Definiere

$$f : V \longrightarrow K \text{ durch } f(x_1, .., x_n) := \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad (*)$$

Es gilt: $f \in L(V, K)$ und $[f]_{\mathcal{E}, \{1\}} = [a_1 \ldots a_n]$.

Umgekehrt sei $f \in L(V, K)$ setze $a_j := f(\varepsilon_j)$, dann erfüllt

f ⊛ für $(a_1, .., a_n)$. ∎

Allgemeiner sei $\dim V = n$ und $\mathcal{B} = \{\alpha_1, .., \alpha_n\}$ Basis

$\dim V = n$ $\mathcal{B}$ geord Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

Sei $(a_1, .., a_n) \in K^n$ fixiert.

Definiere $f : V \to K$ durch

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i a_i \qquad \circledast$$

Dann ist $f \in L(V, K)$ und $[f]_{\mathcal{B}, \{1\}} =$

$$\left[[f(\alpha_1)]_{\{1\}} \middle| \cdots \middle| [f(\alpha_n)]_{\{1\}} \right] = \left([a_1]_{\{1\}} \middle| \cdots \middle| [a_n]_{\{1\}} \right)$$

$= [a_1 \dots a_n]$.

Und umgekert: $f \in L(V, K)$, setze

$a_i = f(\alpha_i)$ dann ist f wie in ⊛. ∎

Beispiel 2. $V = K^{n \times n}$

$tr : V \to K$

$tr(A) := \sum_{i=1}^n A_{ii}$ ist ein linear Funktional.

Beispiel 3. $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $V = C([a,b]) := \{ g : [a,b] \to \mathbb{R} ;\ g \text{ stetig} \}$

Setze $f(g) := \int_a^b g(t)\,dt$ für $g \in V$.

$f \in L(V, \mathbb{R})$. ∎

<u>Definition und Notation 2.</u> $V^* = L(V, K)$

heißt der <u>Dualraum</u>. Sei nun $\dim V = n$

<u>Bemerkung 2</u> $\dim V^* = \dim L(V, K) = n = \dim V$.

Also für jede Basis $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ für V werden wir nun eine Basis $\mathcal{B}^*$ von V^* zuordnen.

Satz 1 §.2 17. Vorlesung liefert für $i = 1, \dots, n$ ein eindeutig definiertes Funktional f_i mit

$$f_i(\alpha_j) = \delta_{ij}.$$

<u>Beh.</u> $\{f_1, \dots, f_n\}$ ist eine Basis für V^*.

Es genügt z.z. sie sind l.u.

<u>Bew</u> für $f = \sum_{i=1}^n c_i f_i \quad (c_i \in K)$ gilt

$$\forall\, j = 1, \dots, n \qquad f(\alpha_j) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(\alpha_j) = c_j. \qquad (**)$$

Insbesondere ist $f = 0$ dann gilt $f(\alpha_j) = 0 \;\forall j$ d.h. $c_j = 0 \;\forall j$. ∎

Definition 3. $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ heißt Dualbasis zu $\mathcal{B}$.

Satz 1. Sei $\dim V = n$ $\quad \mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ Basis für V

Es gilt: $\exists!$ (Dual)Basis $\mathcal{B}^*$ für V^* mit $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$

$$f_i(\alpha_j) = \delta_{ij} \qquad (1)$$

und $\forall f \in V^*$

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) f_i \qquad (2)$$

und $\forall \alpha \in V$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha) \alpha_j \qquad (3)$$

Dualität

d.h. $[f]_{\mathcal{B}^*} = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) \\ \vdots \\ f(\alpha_n) \end{pmatrix}$ und $[\alpha]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} f_1(\alpha) \\ f_n(\alpha) \end{pmatrix}$

$\forall f \in V^*$ und $\forall \alpha \in V$

Bew. (1) ✓

(2) $f \in V^* \Rightarrow f = \sum c_i f_i$ und $\binom{*}{*}$ liefert

$$c_j = f(\alpha_j) \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

(3) Analog: $\alpha = \sum x_i \alpha_i \Rightarrow f_j(\alpha) = f_j\left(\sum x_i \alpha_i\right) = x_j$. ∎

Bemerkung 3. (3) beschreibt f_i als die "i^{te} Koordinaten Funktion bezüglich der Basis $\mathcal{B}$"

$$f_i : V \longrightarrow K$$

$$\alpha \longmapsto \text{die } i^{te} \text{ Koordinate in } [\alpha]_{\mathcal{B}}.$$

Bemerkung 4. $f \in V^*$, $f \neq 0$ $\quad Im(f) \subseteq K$ Unterraum, $Im(f) \neq \{0\}$ also (Bem. 1) ist $Im(f) = K$

$\Rightarrow \dim(Im\, f) = R_T = 1$. Dimensionssatz impliziert nun

$\dim \ker(f) + 1 = n \Rightarrow \dim \ker(f) = n-1$

(wobei $n := \dim V$).

Definition 4 Sei $\dim(V) = n$ und $W \subseteq V$ Unterraum mit $\dim W = n-1$, dann heißt W Hyperraum (oder Hyperebene, oder Unterraum der Kodimension 1).

Bem. 4 besagt: $f \in V^*$; $f \neq 0 \Rightarrow \ker(f) \subseteq V$ ist ein Hyperraum. Wir werden die Umkehrung (und mehr) zeigen.

– Lineare Algebra –

– Kuhlmann –

23. Vorlesung

24. 01. 2012.

Definition 1. Sei V k VR, $S \subseteq V$
Annihilator S ist bezeichnet mit S^0
und definiert als:
$$S^0 := \{ f \in V^* \mid S \subseteq \ker(f) \}$$
$$= \{ f \in V^* \mid f(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in S \}.$$

Bemerkungen. (i) $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_2^0 \subseteq S_1^0$ Klar.

(ii) $S^0 = (\mathrm{span}(S))^0$ klar

(iii) $S^0 \subseteq V^*$ ist immer ein Unterraum. klar

(iv) $S = \{0\} \Leftrightarrow S^0 = V^*$

(V) $S = V \Rightarrow S^0 = \{0\}$ klar.

(VI) also $\mathrm{span}(S) = V \Leftrightarrow S^0 = \{0\}$.

Beweis von (iv) "$\Rightarrow$" ist Klar.

Für "$\Leftarrow$": Sei $S^0 = V^*$ z.z. $S = \{0\}$

Zum Widerspruch sei $\alpha \neq 0$, $\alpha \in S$.
$\{\alpha\}$ l. u $\Rightarrow$ ergänze zu einer Basis für V:

$\mathcal{B} = \{\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Sei $\mathcal{B}^*$ Dualbasis.
$\mathcal{B}^* = \{f_1, \ldots, f_n\}$.
Es gilt $f_1(\alpha_1) = 1$ also $f_1 \notin S^0$. ↯ ⊟

Beweis von (VI). "$\Rightarrow$" schon gemacht.

"$\Leftarrow$" Sei $S^0 = \{0\}$. Z.z. $\mathrm{Span}(S) = V$.

Zum Widerspruch setze $W := \mathrm{span}(S)$ und sei $\alpha \in V \setminus W$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq W$ basis für W.

Dann ist $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha\}$ lin. unab.

Ergänze zu eine Basis für V:

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha = \alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n\}$.

Sei $\{f_1, \ldots, f_k, f_{k+1}, \ldots, f_n\} = \mathcal{B}^*$ Dualbasis.

Es gilt: $f_{k+1}(\alpha_j) = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, k$
$f_{k+1}(\alpha_{k+1}) = 1$

Also $f_{k+1} \neq 0$ und $f_{k+1} \in S^0$. ↯ ⊟

Korollar 1. (Trennung Eigenschaft) Sei $W \subseteq V$ Unterraum und $\alpha \notin W$. Es existiert $f \in V^*$ mit

$$f(W) = \{0\} \quad \text{und} \quad f(\alpha) \neq 0$$

Beweis Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ eine Basis für W. Nun $\alpha \notin \text{span}\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ $\Rightarrow$

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha\}$ lin. unab.

Ergänze zu einer Basis für V:

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \ \alpha = \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$

und sei

$\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_k, f_{k+1}, \dots, f_n\}$ Dualbasis.

Setze $f := f_{k+1}$. ∎

Satz 1 (Dimension Formel für Annihilatoren).

Sei V endl. dim. VR / K.
$W \subseteq V$ Unterraum.

Es gilt: $\dim W + \dim W^0 = \dim V$.

Beweis Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ Basis für W
Ergänze zu eine Basis für V:
$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\}$. Sei $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$

Dualbasis.

Beh. $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ ist eine Basis für W^0.

Bew Es ist klar dass $f_i \in W^0$ für $i \geq k+1$

weil $f_i(\alpha_j) = \delta_{ij} = 0$ falls $i \geq k+1$ und $j \leq k$

also $\alpha \in W \Rightarrow \alpha$ lin. Komb. von $\alpha_1, \dots, \alpha_k \Rightarrow$

$$f_i(\alpha) = 0 \qquad \forall\ i \geq k+1$$

also $f_i \in W^0$ für $i \geq k+1$, wie behauptet. $\square$

Nun $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ sind l. unab. (Teil einer Basis)

also es genügt z. z. $\text{span}\{f_{k+1}, \dots, f_n\} = W^0$.

Sei $f \in V^*$, es gilt $f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\, f_i$ (allgemein)

Ist aber $f \in W^0$ dann $f(\alpha_i) = 0$ für $i \leq k$

also $$f = \sum_{i=k+1}^{n} f(\alpha_i)\, f_i \qquad \blacksquare$$

Korollar 2 Sei $\dim W = k$, $\dim V = n$, $W \subseteq V$ Unterraum
Es gilt: W ist der Durchschnitt von $(n-k)$ Hyperebenen in V.

Beweis: In der Notation des Obigen Beweises: $W = \bigcap_{i=k+1}^{n} \ker(f_i)$. $\blacksquare$

Bemerkung: ist W Hyperebene ; $\dim W = n-1$

also ist $W = \ker(f_n)$ wie versprochen !

Korollar 3. W_1, W_2 Unterräume von V.

Es gilt : $W_1^0 = W_2^0 \Rightarrow W_1 = W_2$.

Beweis: Zum Widerspruch Sei $W_1 \neq W_2$; $\alpha \in W_2$
$\alpha \notin W_1$. Korollar 1 $\Rightarrow \exists f \in V^*$

$f(W_1) = \{0\}$ und $f(\alpha) \neq 0$

Also $f \in W_1^0$ aber $f \notin W_2^0$. $\lightning$. $\square$

Lineare Algebra

Kuhlmann

24. Vorlesung

Am 27.01.2012.

Beobachtung: Beziehung zu Homogene Gleichungs Systeme.

Sei
$$(*)\quad \begin{cases} A_{11} x_1 + \dots + A_{1n} x_n = 0 \\ \quad\vdots \\ A_{m1} x_1 + \dots + A_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$
HGS mit Koeffi. in körper K.

Definiere für $i = 1, \dots, m$ ein Funktional auf K^n.

$$f_i(x_1, \dots, x_n) := \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot x_j$$

Es gilt: Lösungsraum von $(*)$

$$= \bigcap_{i=1}^{m} \ker(f_i)$$

(folgt unmittelbar aus den Definitionen).
Wir werden diese einfache Beobachtung ausnutzen, um Annihilatoren zu berechnen.

Beispiel 1.

$V = \mathbb{R}^5 \qquad W = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ wobei

$\alpha_1 = (2, -2, 3, 4, -1)$
$\alpha_2 = (-1, 1, 2, 5, 2)$
$\alpha_3 = (0, 0, -1, -2, 3)$
$\alpha_4 = (1, -1, 2, 3, 0)$

Finde W^0.

Sei $f \in V^*$ es gilt $f(x_1, .., x_5) = \sum_{j=1}^{5} c_j x_j$ allgemein.

Insbesonders:

$f \in S^0 \Leftrightarrow f(\alpha_1) = f(\alpha_2) \dots = f(\alpha_4) = 0$ (HGS) (in $c_1, \dots, c_5$)

$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{5} A_{ij} c_j = 0$ für $1 \leq i \leq 4$

wobei A_{ij} die Koeffiz. der Koeff. Matrix A

des (HGS) i.e

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} . \text{(GEV)} \Rightarrow$$

r. 7. 8. F :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \end{array}$$

c_1 , c_3, c_5 Hauptvariabl.

c_2 , c_4 Freiè Variabl.

Wie üblich finden wir den Lösungsraum für

$$\sum_{j=1}^{5} R_{ij} \, c_j = 0 \qquad 1 \leq i \leq 3$$

i.e

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 - c_4 &= 0 \\ c_3 + 2c_4 &= 0 \\ c_5 &= 0 \end{aligned}$$

Setze $c_2 = a$; $c_4 = b$ beliebig $\in \mathbb{R}$ dann sind

$c_1 = a + b$, $c_3 = -2b$, $c_5 = 0$ und

$$W^0 = \{ f \mid f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a+b)x_1 + a x_2 - 2b x_3 + b x_4, \; a, b \in \mathbb{R} \}$$

Dim $W^0 = 2$

Basis für W_0 erhält man z. B durch Einsetzen

$$\left.\begin{array}{ll} a = 1 & b = 0 \text{ und} \\ a = 0 & b = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_5) = x_1 + x_2 \\ f_2(x_1, \dots, x_5) = x_1 - 2x_3 + x_4 \end{cases}\right\} \text{ ist Basis für } W^0$$

☒

Kapitel 3 § 6 BiDual - Sei V endl. dim VR $/K$.

Zwei Fragen haben wir noch nicht beantwortet:

(1) $V \longrightarrow V^*$

$\mathcal{B} \longmapsto \mathcal{B}^*$

Umkehrung? Sei $\mathbb{B}$ Basis für V^*, $\exists\ \mathcal{B}$ Basis für V so daß $\mathbb{B} = \mathcal{B}^*$?

(2) $V \longrightarrow V^*$

$W \longmapsto W^0$

Umkehrung? Sei $\mathcal{U}$ Unterraum von V^*, $\exists\ W$ Unterraum von V so daß $\mathcal{U} = W^0$?

Schlüßel: Wir betrachten $(V^*)^* := V^{**}$

Bemerkung: $\dim(V^{**}) = \dim V = \dim V^*$.

Terminologie/Definition: Der Dualraum V^{**} zu V^* heißt der Bidualraum zu V.

Proposition 1. Sei $\alpha \in V$, α induziert kanonisch ein Funktional $L_\alpha \in V^{**}$ wie folgt:

$$L_\alpha : V^* \longrightarrow K$$

definiert durch

$$L_\alpha(f) := f(\alpha) \quad \text{für } f \in V^*.$$

Beweis $L_\alpha(cf+g) = (cf+g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha) = cL_\alpha(f) + L_\alpha(g)$. ∎

Satz 1 Die Abbildung

$$\lambda : V \longrightarrow V^{**}$$
$$\alpha \longmapsto L_\alpha$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis: $\lambda(c\alpha+\beta) = c\lambda(\alpha) + \lambda(\beta)$? z.z ist also
$[\lambda(c\alpha+\beta)](f) = [c\lambda(\alpha)+\lambda(\beta)](f) \quad \forall f \in V^*$.
Wir berechnen:

$$[\lambda(c\alpha+\beta)](f) = L_{c\alpha+\beta}(f) = f(c\alpha+\beta) = cf(\alpha)+f(\beta)$$

$$= cL_\alpha(f) + L_\beta(f) = c\lambda(\alpha)(f) + \lambda(\beta)(f) =$$

$$[c\lambda(\alpha)+\lambda(\beta)](f).$$

Also ist λ linear. Wir zeigen λ ist bijektiv.

Es genügt wegen $\dim V = \dim V^{**}$

Zu beweisen: λ ist regulär.

Sei $\left\{\begin{array}{l}\lambda(\alpha) = 0 \\ \text{i.e } L_\alpha \equiv 0\end{array}\right\}$ z.z $\alpha = 0$. Zum Widerspruch

$\alpha \neq 0$; also $\{\alpha\}$ lin. unab. Sei $\mathcal{B} = \{\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

Basis für V; $\mathcal{B}^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ Dualbasis. Es gilt
$f_1(\alpha_1) = f_1(\alpha) = 1$, also $L_\alpha(f_1) \neq 0$ also $L_\alpha \not\equiv 0$ ↯ ∎

– Lineare Algebra –

– Kuhlmann –

25. Vorlesung
am
31. 01. 2012

Ansatz wie in der 24. Vorlesung.

Korollar 1. Sei L lin. Funkt. auf V^*.
$\exists!\ \alpha \in V$ mit $L = L_\alpha$, i.e

$$(**) \qquad L(f) = f(\alpha) \qquad \forall f \in V^*$$

Beweis. setze $\alpha := \lambda^{-1}(L)$. ▫

Korollar 2 Sei $\mathbb{B}$ eine Basis für V^*. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ für V mit $\mathcal{B}^* = \mathbb{B}$

Beweis Setze $\mathbb{B} := \{f_1, \dots, f_n\}$. Satz 1(1) S. 4 22. Vorlesung liefert eine Basis Dual zu $\mathbb{B}$:
$\mathbb{B}^* := \{L_1, \dots, L_n\}$ für $(V^*)^* = V^{**}$ s.d

$$L_i(f_j) = \delta_{ij}$$

Korollar 1 liefert: $\forall i\ \exists!\ \alpha_i \in V$ mit $(**)$ i.e

$$L_i(f) = f(\alpha_i) \qquad \forall \quad 1 \le i \le n \ ; \ f \in V^*$$

Insbesondere : $\delta_{ij} = L_i(f_j) = f_j(\alpha_i)$ $\qquad 1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$
Setze nun $\mathcal{B} := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. ▫

Bemerkung: Sei $E \subseteq V^*$ dann ist $E^0 \subseteq V^{**}$

$$E^0 = \{ L \in V^{**} \mid L(f) = 0 \quad \forall f \in E \}$$

Wir berechnen

$$\lambda^{-1}(E^0) = \begin{cases} \{ \alpha \in V \mid \lambda(\alpha) \in E^0 \} = \\ \{ \alpha \in V \mid L_\alpha \in E^0 \} = \\ \{ \alpha \in V \mid L_\alpha(f) = 0 \quad \forall f \in E \} = \\ \{ \alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \quad \forall f \in E \} \end{cases} \quad (+)$$

Satz 2. Sei $W \subseteq V$ unter. Es gilt: $\lambda^{-1}(W^{00}) = W$

Beweis $\left.\begin{array}{l} \dim W + \dim W^0 = \dim V \\ = \dim V^* = \dim W^0 + \dim W^{00} \end{array}\right\} \Rightarrow \dim W = \dim W^{00} = \dim \lambda^{-1}(W^{00})$.

Es genügt nun z.z:

$$W \subseteq \lambda^{-1}(W^{00}) \underset{(+)}{=} \{ \alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \quad \forall f \in W^0 \}$$

aber $\alpha \in W \Rightarrow f(\alpha) = 0 \quad \forall f \in W^0$ per Definition! ∎

Korollar 3 Sei $U \subseteq V^*$ unter. Setze $W := \lambda^{-1}(U_0)$.

Es gilt: $W^0 = U$.

Beweis $\dim V^* = \dim U + \dim U^0 = \dim V = \dim W + \dim W^0$

also $\dim U = \dim W^0$ [weil $\dim W = \dim \lambda^{-1}(U^0) = \dim U^0$].

Es genügt z.z $U \subseteq W^0$

$$W \underset{(+)}{=} \{\alpha \in V \mid f(\alpha) = 0 \quad \forall f \in U\}$$

Sei $f \in U$; es gelt $f(\alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in W$

also $f \in W^0$ per Definition. ▣

§ 7 Kapitel 3. Die Transponierte Abbildung.

Ansatz wie immer.

Sei $T: V \longrightarrow W$ lin. Tranf.

T induziert $T^t: W^* \longrightarrow V^*$
eine Abbildung

definiert durch

$$V^* \ni f := T^t(g) := g \circ T \quad \text{für } g \in W^*.$$

d.h $f(\alpha) = (g \circ T)(\alpha) = g(T(\alpha)) \quad \forall \alpha \in V.$

Beh.: T^t ist linear: $c \in K$; $g_1, g_2 \in W^*$

$$T^t(cg_1 + g_2) = (cg_1 + g_2) \circ T = c(g_1 \circ T) + (g_2 \circ T)$$
$$= c\,T^t(g_1) + T^t(g_2). \quad ▣$$

wir haben bewiesen:

Satz 3 Sei V, W (endl. dim) $VR \mid K$.
Für jede lin. Ab. $T: V \to W$ $\exists!$ $T^t: W^* \to V^*$
auch linear so daß:

$$T^t(g)(\alpha) = g(T(\alpha)) \quad \forall g \in W^*, \alpha \in V. \quad ▣$$

Definition T^t ist die transponierte Abbildung zu T.

– 26. Vorlesung am 7.2.2012 –

– DR. Merlin Carl in Vertretung –

Satz 1 Es gelten:

(0) $\ker(T^t) = (R_T)^0$

(Nullraum der transponierte T^t = Annihilator von Bild T)

(1) $\text{Rang}(T^t) = \text{Rang}(T)$

(2) $R_{T^t} = (\ker(T))^0$

(Bild der transponierte T^t = Annihilator von Nullraum von T).

Beweis (0) $g \in \ker(T^t) \Leftrightarrow T^t(g) = 0 \Leftrightarrow g \circ T = 0$

$\Leftrightarrow g(T(\alpha)) = 0 \ \forall \alpha \in V \Longleftrightarrow g \in (R_T)^0$ $\square$

(1) Setze $\dim V = n$ $\quad \dim W = m$

$r := \text{Rang}(T) := \dim R_T$

Satz 1 S. 3 23. Vorlesung impliziert:

$\dim(R_T) + \dim(R_T)^0 = \dim W = m$

Also $r + \dim(R_T)^0 = m \Rightarrow \dim(R_T)^0 = m - r$

~~1.~~ ~~31.~~ 01. 2012

Aus (0) folgt nun: $\dim(\ker T^t) = m - r$.

Nun ist $T^t : W^* \to V^*$; und

Satz 1 S. 1 18. Vorlesung liefert:

$$\text{Rang}(T^t) + \dim(\ker T^t) = \dim W^* = m.$$

Also $\text{Rang}(T^t) = m - (m-r) = r$. $\blacksquare$

(2) Setze $N := \ker(T)$.

<u>Beh:</u> $R_{T^t} \subseteq N^0$!

<u>Bew:</u> Sei $f \in R_{T^t}$; also $f = T^t(g)$

$f \in V^*$ für ein $g \in W^*$.

Sei $\alpha \in N$ und berechne:

$$f(\alpha) = (g \circ T)(\alpha) = g(T(\alpha)) = g(0) = 0. \quad \blacksquare$$

Andererseits haben wir wieder:

$$\dim N^0 = n - \dim N = \text{Rang}(T) \underset{(1)}{=} \text{Rang}(T^t).$$

D.h.: $R_{T^t} \subseteq N^0$ und

$\dim R_{T^t} = \dim N^0$. Also $R_{T^t} = N^0$. $\blacksquare$

Satz 2. Seien V, W endl. dim VR $/ K$.

$T: V \to W$; $T^t: W^* \to V^*$

lineare Ab.

Seien $\mathcal{B}$ geord. Basis für V und $\mathcal{B}^*$ Dualbasis

$\mathcal{B}'$ geord. " " W bzw. $(\mathcal{B}')^*$ "

Es gilt:

$$[T]^t_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = [T^t]_{(\mathcal{B}')^*, \mathcal{B}^*}$$

Beweis Erinnerung: Sei A $m \times n$ Matrix, dann ist

A^t $n \times m$ und $(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$

Setze: $A := [T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ und $B := [T^t]_{\mathcal{B}'^*, \mathcal{B}^*}$

Sei $\mathcal{B} = \{\alpha_1, .., \alpha_n\}$ $\mathcal{B}' = \{\beta_1, .., \beta_m\}$

$\mathcal{B}^* = \{f_1, .., f_n\}$ $(\mathcal{B}')^* = \{g_1, .., g_m\}$.

Per Definition gilt:

$$(*) \quad T\alpha_j = \sum_{i=1}^m A_{ij} \beta_i \qquad j = 1, .., n$$

$$(**) \quad T^t g_j = \sum_{i=1}^n B_{ij} f_i \qquad j = 1, ..., m$$

wir berechnen nun

$$\left[\left(T^t\right)(g_j)\right](\alpha_i) \overset{\text{Def}}{=} g_j\left(T(\alpha_i)\right)$$

$$\overset{(*)}{=} g_j\left(\sum_{k=1}^{m} A_{ki}\beta_i\right) = \sum_{k=1}^{m} A_{ki}\, g_j(\beta_i)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} A_{ki}\, \delta_{jk} \underset{(***)}{=} A_{ji} .$$

Nun für beliebiges $f \in V^*$;

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) f_i \quad (\text{Darstellung zur Basis } \mathcal{B}^*)$$

Speziell für $f = T^t g_j$ ergibt sich dann:

$$\sum_{i=1}^{n} B_{ij} f_i \underset{(**)}{=} T^t g_j = \sum_{i=1}^{n} T^t g_j(\alpha_i) f_i \underset{(***)}{=}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ji} f_i .$$

Da $\mathcal{B}^*$ eine Basis, ist die Darstellung jeder f eindeutig, also $B_{ij} = A_{ji}$ wie behauptet. ∎

Wir geben nun als Anwendung einen sehr eleganten Beweis des Satzes, dass der Zeilenrang einer Matrix stets gleich ihrem Spaltenrang ist:

Erinnerung (i) $Sr(A)$: Spaltenrang von A = Dimension des von den Spaltenvektoren von A aufgespannten Unterraumes.

(ii) $Zr(A)$ = Zeilenrang von A = Dimension des von den Zeilenvektoren von A aufgespannten Unterraumes.

Satz 3. K Körper, $A \in Mat_{m \times n}(K)$.

Dann ist $Zr(A) = Sr(A)$.

Beweis: Es sei $\mathcal{E}_n$ die Standardbasis für K^n;
$\mathcal{E}_m$ " " " K^m

$$T: K^n \longrightarrow K^m$$

gegeben durch

$$T((x_1, \dots, x_n)) = (y_1, \dots, y_m) \quad \text{wobei } y_i := \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

Es ist: $[T]_{\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_m} = A$. (üA).

Offenbar ist $Sr(A) = \text{Rang}(T)$,

denn $\text{Bild}(T)$ besteht gerade aus den Linearkombinationen der Spaltenvektoren von A.

Außerdem ist $Zr(A) = Sr(A^t)$, denn die Zeilen von A sind gerade die Spalten von A^t. Mit den Resultaten der letzten beiden Sätze folgt also:

$$Sr(A) = \text{Rang}(T) = \text{Rang}(T^t) =$$

$$Sr(A^t) = Zr(A) \; ; \quad \text{da } A^t = [T^t]_{\mathcal{E}_m^*, \mathcal{E}_n^*} \quad \blacksquare$$

<u>Definition</u>: $\text{Rang}(A) := r(A) = Sr(A) = Zr(A)$

---

§ Quotientenräume.

Es sei V ein K VR; $W \subseteq V$ Unterraum.

<u>Definition</u>: für $\alpha, \beta \in V$: $\alpha \equiv \beta \mod W$
(Kongruenz).
(α kongruent zu β modulo W) falls

$\alpha - \beta \in W$.

Lemma: $\equiv \bmod W$ ist eine Äquivalenzrelation auf V.

Bew.: (1) Reflexiv: $\alpha - \alpha = 0 \in W$

(2) Symmetrisch:
$\alpha - \beta \in W \Rightarrow -(\alpha - \beta) = \beta - \alpha \in W$.

(3) Transitiv: sind $\left.\begin{array}{l}\alpha - \beta \in W \\ \beta - \gamma \in W\end{array}\right\}$ so auch

$\alpha - \gamma = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) \in W$. $\blacksquare$

Definition: Zu $\alpha \in V$ heißt

$$[\alpha]_W := \{\beta \in V \mid \alpha \equiv \beta \bmod W\}$$

die Restklasse von $\alpha \bmod W$.

$\{[\alpha]_W \mid \alpha \in V\}$ heißen

Restklassen von W. **Notation:** $V/W := \{[\alpha]_W \mid \alpha \in V\}$

Bemerkung: Offenbar ist $[\alpha]_W = \{\alpha + \gamma \mid \gamma \in W\}$.

Wir können daher für $[\alpha]_W$ auch

$\alpha + W$ schreiben. Also ist
$V/W := \{\alpha + W \mid \alpha \in V\}$. $\blacksquare$

Lineare Algebra

Kuhlmann

27. Vorlesung

10.02.2012.

Erinnerung (1) $[\alpha]_W = \alpha + W$ ist die Nebenklasse von α modulo W. Ein $\beta \in [\alpha]_W$ heißt "Repräsentant" der Äquivalenz klasse.

(2) $V/W :=$ Menge der Nebenklassen

versehen mit einer Verknüpfung $+$:

$$(\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W) := (\alpha_1 + \alpha_2) + W$$

und einer Verknüpfung "Skalarmultiplikation":

$$c \cdot (\alpha + W) := (c\alpha) + W \quad \text{für } c \in K.$$

Lemma: Diese Verknüpfungen sind wohldefiniert, unabhängig von der Wahl der Repräsentanten

i.e.

a) $\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv \alpha' \bmod W \\ \quad\text{und} \\ \beta \equiv \beta' \bmod W \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta' \bmod W$

b) $\left.\begin{array}{l}\alpha \equiv \alpha' \bmod W \\ \text{und} \\ c \in K\end{array}\right\} \Rightarrow c\alpha \equiv c\alpha' \bmod W$.

Beweis a) $\left.\begin{array}{l}\alpha - \alpha' \in W \\ \text{und } \beta - \beta' \in W\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{(\alpha - \alpha')}_{\in W} + \underbrace{(\beta - \beta')}_{\in W}}_{\in W}$

$= (\alpha + \beta) - (\alpha' + \beta') \in W \Rightarrow \alpha + \beta \equiv \alpha' + \beta' \bmod W.$

b) $\alpha - \alpha' \in W \Rightarrow c(\alpha - \alpha') \in W \Rightarrow$

$c\alpha - c\alpha' \in W \Rightarrow c\alpha \equiv c\alpha' \bmod W.$ ∎

Lemma 1 V/W mit diesen Verknüpfungen ist ein K Vektorraum.

Beweis ÜA Was ist 0?

$0_{V/W} = 0 + W = W$ ist der Nullvektor in V/W

Was ist addives Inverse?

$(\alpha + W) + ((-\alpha) + W) = 0 + W = W = 0_{V/W}$ ∎

Notation: $\bar{\alpha} := \alpha + W$

Also (i) $\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} := \overline{\alpha_1 + \alpha_2}$

(ii) $c\,\overline{\alpha_1} = \overline{c\alpha_1}$

(iii) $\bar{\alpha} = 0 \iff \alpha + W = W \iff \alpha \in W$.

Satz 1. (die Kanonische Projektion).

$$\pi_W : V \twoheadrightarrow V/W$$

$$\pi_W(\alpha) := \bar{\alpha}$$

ist eine surjektive lineare transformation

mit $\ker(\pi_W) = W$

Beweis $\pi_W(c\alpha_1 + \alpha_2) = (c\alpha_1 + \alpha_2) + W = (c\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W)$

$= c(\alpha_1 + W) + (\alpha_2 + W)$.

Sei $\bar{\alpha} \in V/W$ dann ist $\bar{\alpha} = \pi_W(\alpha)$.

$\alpha \in \ker(\pi_W) \iff \bar{\alpha} = 0_{V/W} \iff \alpha + W = W$

$\iff \alpha \in W$. $\square$

Korollar 1. $\dim W + \dim(V/W) = \dim V$. $\square$

Satz 2 (Homomorphiesatz).

Sei V, Z K-VR, $T: V \to Z$ linear.

Es gilt: $V/_{\ker(T)} \cong R_T$

Beweis Definiere $\overline{T}: V/_{\ker(T)} \twoheadrightarrow R_T$

mit $\overline{T}(\alpha + \ker(T)) := \overline{T}(\overline{\alpha}) = T(\alpha)$

(i) $\overline{T}$ wohldefiniert?

$\overline{\alpha} = \overline{\alpha}' \Rightarrow T(\alpha) = T(\alpha')$?

$\alpha - \alpha' \in \ker(T) \Leftrightarrow T(\alpha - \alpha') = 0 \Leftrightarrow T(\alpha) = T(\alpha')$ ∎

(ii) linear?

$\overline{T}(\overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2}) = \overline{T}(\overline{\alpha_1 + \alpha_2}) = T(\alpha_1 + \alpha_2) =$
$T(\alpha_1) + T(\alpha_2) = \overline{T}(\overline{\alpha_1}) + \overline{T}(\overline{\alpha_2})$ ∎

(iii) $T(\alpha) \in R_T$, ist $\overline{T}(\overline{\alpha}) = T(\alpha)$ also $\overline{T}$

ist surjektiv. ∎

(iv) $\overline{T}$ injektiv? $\overline{\alpha} \in \ker(\overline{T}) \Leftrightarrow \overline{T}(\overline{\alpha}) = 0 \Leftrightarrow T(\alpha) = 0$
$\Leftrightarrow \alpha \in \ker(T) \Leftrightarrow \overline{\alpha} = 0$. So $\overline{T}$ regulär. ∎

Korollar 2 $\frac{W \oplus W'}{W} \simeq W'$ (wobei W, W' Unterräume von V und $V = W \oplus W'$)

Beweis $V = W \oplus W'$ bedeutet $\forall v \in V\ \exists!\ w \in W$ und $w' \in W'$ so daß $v = w + w'$.

Definiere $P_{W'} : V \longrightarrow W'$

$v \longmapsto w'$

$P_{W'}$ linear, surjektiv
üA ✓ üA ✓

$\alpha \in \ker(P_{W'}) \Leftrightarrow P_{W'}(v) = 0 \Leftrightarrow w' = 0$

$\Leftrightarrow \alpha \in W$.

Satz 2 $\Rightarrow V/_{\ker(P_{W'})} \simeq \mathrm{Bild}(P_{W'})$. ∎

Korollar 3 $\left(V/_W\right)^* \simeq W^0$ (wobei $W \leq V$ unterr.)

Beweis Sei $\pi_W : V \longrightarrow V/_W$ betrachte

$\pi_W^t : \left(V/_W\right)^* \longrightarrow V^*$ Setze $T := \pi_W$

$$R_{T^t} = (\ker(T))^0 = W^0$$

$$\ker(T^t) = (R_T)^0 = (V/W)^0 = \{0\}$$

Also T^t regulär und surjektiv auf W^0 ∎

$\boxed{\text{Fragestellung}}$: Sei $W \subseteq V$ Unterraum: was ist die Beziehung zwischen W^*, V^*?

Korollar 4 $\quad W^* \simeq V^*/W^0 \quad$ wobei $W \subseteq V$ unter.

Beweis 1. $I_d : W \longrightarrow V$ Identitätsab.

$I_d^t : V^* \longrightarrow W^*$

$$\ker(I_d^t) = (R_{I_d})^0 = W^0$$

$$R_{I_d^t} = (\ker(I_d))^0 = (\{0\})^0 = W^*$$ ∎

Beweis 2 Betrachte die Abbildung

üA $\quad \rho : V^* \longrightarrow W^*$

$$\rho(f) := f\restriction_W \quad \text{(die Restringierung)}$$

Ist ρ linear? Was ist $\ker(\rho)$? Was ist R_ρ? Benutze Homomorphie Satz (nach der Berechnung von $\ker(\rho)$ und R_ρ. ∎