Lineare Algebra II.
Kuhlmann
1. Vorlesung
16.04.2012

Inhalt: Es ist geplant, folgende Themen in der Vorlesung in SS 2012 abzudecken. Zusätzliche Abschnitte könnten noch dazu kommen.

1. Polynomalgebren, Potenzreihen, Symmetrische Gruppen.

2. $\exists$ ce und Eindeutigkeit von Determinanten

3. Eigenschaften von Determinanten: multiplikativ, det(AB), det(A^{-1}), nach Zeilenentwicklung oder Spaltenentwicklung, Cramer's Formel.

4. Eigenwerte, Triangulasierung, Diagonalisierung, Eigenräume, Invariante Unterräume, Jordan Normalform. Anwendungen.

5. Innere Produkte, Cauchy-Schwartz, Orthogonalität, Orthonormale Basen, Gram-Schmidt Verfahren, Riesz Darstellungssatz.

6. Spektralsatz. Anwendungen.

7. Symmetrische Formen, Quadratische Formen, Positive Formen, Sylvester Satz, Anwendungen.

Kapitel I. Polynome.

§1. Algebren.

__Erinnerung.__ Sei K ein Körper. Eine __K-Algebra__ $\mathcal{A}$ ist ein K-VR mit einer Multiplikation von Vektoren:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha\beta \end{aligned}$$

so daß $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ und $c \in K$ gilt:

(a) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

(b) $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ und
$(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

(c) $c(\alpha\beta) = (c\alpha)\beta = \alpha(c\beta)$

Falls es $1 \in \mathcal{A}$ gibt so daß $1\alpha = \alpha 1 = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathcal{A}$ heißt die Algebra eine __Algebra mit Einheit__.

Falls $\alpha\beta = \beta\alpha$ $\quad \forall \alpha, \beta$ heißt

$\mathcal{A}$ eine kommutative Algebra.

Bsp 1. $\mathcal{A} := M_{n\times n}(K)$ kommutative Algebra mit Einheit.

Bsp 2. $\mathcal{A} := \mathcal{L}(V,V)$ " " " "

Bsp 3: Potenzreihen Algebra:
Betrachte

$$K^{\mathbb{N}_0} := \{ f \; ; \; f : \mathbb{N}_0 \to K, \; f \text{ Abbildung} \}$$

Schreibe $\quad f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (f_0, f_1, \dots)$

Addition: Punktweise i.e

(*) $$(f+g)_n := f_n + g_n$$

Skalarmult.: $\quad (cf)_n := c\, f_n$
auch
Punktweise

(**) Produkt: $$(fg)_n := \sum_{i=0}^{n} f_i\, g_{n-i}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Proposition 1. $\mathcal{A} := K^{\mathbb{N}_0}$ mit den Verknüpfungen (wie in (*) und (**) erklärt) ist eine kommutative Algebra mit Einheit.

Erinnerung: in LA I hatten wir die K-VR Axiome für $K^{\mathbb{N}_0}$ bewiesen

Beweis: $(gf)_n = \sum_{i=0}^{n} g_i f_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} g_{n-i} f_i$

$$= \sum_{i=0}^{n} f_i g_{n-i} = (fg)_n .$$

So kommutativ!

$$[(fg)h]_n = \sum_{i=0}^{n} (fg)_i \, h_{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} f_j \, g_{i-j} \right) h_{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} f_j \, g_{i-j} \, h_{n-i} = \sum_{j=0}^{n} f_j \sum_{i=0}^{n-j} g_i \, h_{n-i-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f_j \sum_{i=0}^{n-j} g_i \, h_{(n-j)-i}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} f_j \, (gh)_{n-j} = [f(gh)]_n$$

So assoziativ!

ÜA, ÜB: die übrige Axiome (b) und (c). Zeigen Sie auch daß $1 := (1, 0, \dots, 0, \dots)$ Einheit ist.

Notation: $x := (0, 1, 0, \dots)$

$x^0 := 1$

$x^n := \underbrace{x \cdots x}_{n \text{ mal}}$.

Proposition 2. (1) $x^k = (0, \dots, 0, \underset{\uparrow \; k^{\text{te}} \text{ Stelle}}{1}, 0, \dots)$

$\forall\, k \in \mathbb{N}_0$

(2) $\{x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ sind l. u

also ist $K^{\mathbb{N}_0}$ unendlich dim.

Beweis. Bereits in LA I. ∎

Definition und Notation

$\mathcal{A} = K^{\mathbb{N}_0}$ heißt die Algebra der Potenzreihen über K; sie wird bezeichnet $\mathcal{A} := K[\![x]\!]$.

Warum Potenzreihen? $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ (formale Schreibweise).

§2 Die Polynomalgebra

Notation $K[x] := \text{Span}\{x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

Definition $f \in K[x]$ heißt **Polynom über K**.

Degree / Grad: Sei nun $f \neq 0$; $f \in K[x]$.

Es gilt: $f \in K[x]$ gdw $\exists! n \in \mathbb{N}_0$

mit $f_n \neq 0$ und $f_k = 0 \quad \forall k > n$.

Notation / Definition: $\deg f := n$ (Grad von f ist n)

NB: $\deg f = n \Leftrightarrow f = f_0 x^0 + f_1 x^1 + \ldots + f_n x^n$

$f_n \neq 0$

f_i heißen **Koeffiziente von f**.

Definition Ein Polynom aus der Gestalt $f = f_0 x^0$ ist ein **Skalarpolynom** ($\deg f = 0$ oder $f = 0$)

Ein Polynom $f \neq 0$ ist normiert falls $\deg f = n$ und $f_n = 1$.

Lineare Algebra II.

- Kuhlmann -

2. Vorlesung
20. 04. 2012

NB: $f \in K[\![x]\!]$ definiere

$$\text{Support } f := \{ n \in \mathbb{N}_0 \, ; \, f_n \neq 0 \}$$

(i) Support $f = \emptyset$ gdw $f = 0$

(ii) Support f ist endlich gdw $f \in K[x]$

(iii) $f \neq 0$ Support f endlich;

es gilt $\deg f = \max \text{ support } f$.

<u>Definition</u>: $f : K \to K$ ist eine <u>polynomiale Funktion</u> falls es $c_0, \dots, c_n \in K$ gebt sodaß

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n \quad \forall x \in K.$$

<u>NB</u>: eine polynomiale Funktion ist etwas anders als ein Polynom. Wir werden die Beziehung genau analysieren.

Satz 1. Seien $f, g \in K[x]$; $f, g \neq 0$

Es gilt

(i) $fg \neq 0$

(ii) $\deg(fg) = \deg f + \deg g$.

(iii) fg normiert falls f und g normiert sind.

(iv) fg Skalar $\Leftrightarrow$ f und g Skalar sind.

(v) falls $f + g \neq 0$:

$$\deg(f+g) \leq \max(\deg f, \deg g).$$

Beweis. Sei $\deg f := m$ und $\deg g := n$

Beh: $$\left.\begin{array}{l} (*) \ (fg)_{m+n} = f_m g_n \\ \quad \text{und} \\ (**) \ (fg)_{m+n+k} = 0 \\ \quad k > 0 \end{array}\right\}$$

Wir berechnen

$$(fg)_{m+n+k} = \sum_{i=0}^{m+n+k} f_i \, g_{m+n+k-i}$$

Welche Beiträge sind ungleich Null?

$$f_i\, g_{m+n+k-i} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} i \leq m & (f_i \neq 0) \\ \text{und} \\ m+n+k-i \leq n \text{ also} \\ m+k \leq i \end{cases}$$

Das heißt: $f_i\, g_{m+n+k-i} \neq 0 \Rightarrow m+k \leq i \leq m$

i.e $k = 0$ und $m = i$,

wie behauptet.

Nun (*) und (**) implizieren unmittelbar

(i), (ii), (iii), auch (i) und (ii) implizieren

(iv). (V): ÜA, ÜB. ∎

<u>Korollar 1</u> $K[x]$ ist kommutative K-Algebra mit Einheit.

<u>Bew.</u> $K[x]$ Unterraum von $K[\![x]\!]$.
Es genügt also zu prüfen daß
$K[x]$ abgeschlossen unter Produkte ist,
i.e $f, g \in K[x] \Rightarrow fg \in K[x]$.
Dieses folgt aus Satz 1 (ii). ∎

Korollar 2 $f, g, h \in K[x]$; $f \neq 0$.

Aus $fg = fh$ folgt $g = h$.

Bew. $K[x]$ ist ein Integritätsbereich. $\square$
siehe Satz 1 (i).

NB $$fg = \sum_{s=0}^{m+n} \left(\sum_{r=0}^{s} f_r \, g_{s-r} \right) x^s$$

für $f = \sum_{i=0}^{m} f_i x^i$ und $g = \sum_{i=0}^{n} g_i x^i$

Insbesondere

$$c x^m \, d x^n = cd \, x^{m+n}$$

und

$$fg = \sum_{\substack{0 \le i \le m \\ 0 \le j \le n}} f_i \, g_j \, x^{i+j}$$

Definition Sei $\mathcal{A}$ eine K-Alg mit 1,

$f \in K[x]$, $f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$

$\alpha \in \mathcal{A}$.

Definiere $f(\alpha) := \sum_{i=0}^{n} f_i \alpha^i$ mit $\alpha^0 := 1$.

Bsp 1 $\mathcal{A} = K$

$f \in K[x]$ bestimmt also eine polynomiale

Funktion $\tilde{f} : K \longrightarrow K$

Bsp 2 $\mathcal{A} = M_{2\times 2}(K)$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad f = x^2 + 2$

$f(B) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2$ ∎

Satz 2 $\mathcal{A}$ K-Alg mit 1.

$f, g \in K[x]$; $\alpha \in \mathcal{A}$, $c \in K$

Es gilt

(i) $(cf + g)(\alpha) = cf(\alpha) + g(\alpha)$

(ii) $(fg)(\alpha) = f(\alpha)\, g(\alpha)$

Bew. ÜA. ∎

Bsp 1 nocheinmal: sei $\alpha \in \mathcal{A}$ fixiert

$L_\alpha : K[x] \longrightarrow K$, $f \longmapsto f(\alpha)$ ist eine lineare Funktionale.

NB: Beispiel $f \neq 0$ aber $\tilde{f} = 0$

($x^p - x$ für p Primzahl

verschwindet auf $\mathbb{F}_p$

e.g. $f = x^3 - x = x^3 + 2x \in \mathbb{F}_3[x]$

$f \neq 0$ weil $(f)_{n \in \mathbb{N}_0} = (0, 2, 0, 1, 0, .., 0..)$

$\neq (0, 0, 0, 0, ..., 0, ..)$

Aber $f(0) = f(1) = f(2) = 0$ in $\mathbb{F}_3$

so $\tilde{f} : \mathbb{F}_3 \longrightarrow \mathbb{F}_3$ ist die Nullabbildung.

(Mehr dazu in ÜB.).

Wenn aber K unendlich ist haben wir solche Beispiele nicht! Wir werden dieses genau untersuchen. Zum Schluß für Heute: Sei $K[x]^\sim$ der K-VR der polyn. Funktionen.

Notation

Proposition: $K[x]^\sim$ ist eine K-Algebra (mit $\mathbb{1}$) versehen mit Punktweise multiplikation

$$(\tilde{f}\tilde{g})(t) := \tilde{f}(t)\,\tilde{g}(t) \qquad t \in K \quad \blacksquare$$

Lineare Algebra II

– Kuhlmann –

– 3. Vorlesung –

am 23.04.2012

<u>Definition 1.</u> Seien $\mathcal{A}$ und $\tilde{\mathcal{A}}$ Algebren über K
Eine Bijektion
$$\sim : \mathcal{A} \longrightarrow \tilde{\mathcal{A}}$$
$$\alpha \longmapsto \tilde{\alpha}$$
ist eine <u>Algebren Isomorphie</u> falls:
$$\widetilde{(c\alpha + d\beta)} = c\tilde{\alpha} + d\tilde{\beta}$$
und
$$\widetilde{(\alpha\beta)} = \tilde{\alpha}\tilde{\beta} \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{A},\ c, d \in K$$
gelten.

<u>Lagrange Interpolation.</u>

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Sei K Körper, $t_0, t_1, \dots, t_n$ $n+1$ verschiedene $\in K$.

Sei $V :=$ der K-VR der Polynomen mit $\deg \leq n$ (zusammen mit 0 Polym)

N.B.: $\dim V = n+1$ (weil e.g. $x^0, \dots, x^n$ Basis bildet)

Sei $L_i := L_{t_i}$ $\qquad L_i \in V^*$

$0 \leq i \leq n$ $\qquad L_i(f) := f(t_i)$.

Beh 1. $\{L_0, \dots, L_n\}$ is Basis für V^*.

Bew.

Es genügt eine duale Basis $\{P_0, \dots, P_n\}$ von V zu finden.

Solche eine Basis ist durch die Gleichungen

$$(*) \qquad L_j(P_i) = \delta_{ij} \qquad 0 \le i, j \le n$$

bestimmt. Wir wollen also $P_0, \dots, P_n$ konstruieren, die $(*)$ erfüllen. Wir definieren

$$P_i := \prod_{j \neq i} \left(\frac{x - t_j}{t_i - t_j} \right)$$

(siehe ÜB) $\blacksquare$

Die Dualität liefert wie immer:

$$\forall f \in V: \quad f = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) P_i$$

"Lagrange Interpolation Formel".

Satz 1. Die Abbildung

$$K[x] \longrightarrow \widetilde{K[x]} \quad (\text{für } K \text{ unendlich})$$
$$f \longmapsto \tilde{f}$$

ist eine K-Algebren Isomorphie.

<u>Beweis</u> Es ist unmittelbar zu prüfen daß

$$\widetilde{f+cg} = \tilde{f} + c\tilde{g} \quad \text{und} \quad \widetilde{fg} = \tilde{f}\,\tilde{g}.$$

Die Abbildung ist per Definition surjektiv.

Injektiv? $\tilde{f} = 0 \Rightarrow f = 0$?

Sei $\deg f = n$; $t_0, \ldots, t_n$ verschieden in K.

Seien $P_0, \ldots, P_n$ wie in $\mathcal{L}IF$; und

Schreibe $f = \sum f(t_i)\, P_i$.

$\tilde{f} = 0 \Rightarrow f(t_i) = 0 \Rightarrow f = 0$. ∎

§ Ideale.

$K[x]$ ist ein Integritätsbereich, es gilt:

$$f, g, h \in K[x];\ f \neq 0 \text{ und } fg = fh \Rightarrow g = h.$$

Wir wollen Divisionsalgorithm in $K[x]$ beweisen:

Divis. Alg: Seien $f, g \neq 0$; $\deg g \leq \deg f$.

$\exists!\, q \in K[x]$, $r \in K[x]$ s.d. $f = qg + r$, $r = 0$ oder $\deg r < \deg g$

Lemma 1. Seien $f, d \neq 0 \in K[x]$;

mit $\deg d \leq \deg f$.

Es gibt $g \in K[x]$ so daß

$$f - dg = 0 \quad \text{oder} \quad \deg(f - dg) < \deg f.$$

Beweis. schreibe $\deg f := m \geq n := \deg d$

$$f = a_m x^m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i \qquad a_m \neq 0$$

$$d = b_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \qquad b_n \neq 0$$

Betrachte

$$\frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d = \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} \left(b_n x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i\right)$$

$$= a_m x^m + \cdots$$

Also ist $f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d \neq 0$

und $\deg\left(f - \frac{a_m}{b_n} x^{m-n} d\right) < \deg f$.

Setze also $g := \left(\frac{a_m}{b_n}\right) x^{m-n}$ ▫

Satz 2. (DA). $f, d \in K[x]$, $d \neq 0$
$\exists\, q, r \in K[x]$ s.d.
(i) $f = dq + r$ (ii) $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$.

Ferner : q, r mit (i) und (ii) sind eindeutig.

Bew $\exists$: Sei $f \neq 0$. Lemma 1 $\Rightarrow$

$\exists\ g \in K[x]$ s.d

$$f - dg = 0 \quad \text{oder} \quad \deg(f - dg) < \deg f$$

Wenn $f - dg \neq 0$ und $\deg(f - dg) \geq \deg d$

Lemma 1 $\Rightarrow$

$\exists\ h \in K[x]$ s.d

$$(f - dg) - dh = 0 \quad \text{oder} \quad \deg\big(f - d(g+h)\big) < \deg(f - dg)$$

Fortsetzung ergibt

$$\ldots < \deg\big(f - d(g+h)\big) < \deg(f - dg) < \deg f$$

die Prozedur muss nach endlich vielen Schritten anhalten. Wir bekommen also $q \in K[x]$ und $r = 0$ oder $\deg r < \deg d$ mit

$$f = dq + r.$$

Eindeutigkeit:

Sei $f = dq_1 + r_1 = dq + r \Rightarrow d(q - q_1) = (r_1 - r)$

mit $r_1 = 0$ oder $\deg r_1 < \deg d$

$q - q_1 \neq 0 \Rightarrow \quad d(q-q_1) \neq 0$ und

$$\deg(r_1 - r) = \deg d + \deg(q - q_1)$$

Aber

$$\deg(r_1 - r) \leq \max(\deg r_1, \deg r) < \deg d \quad \lightning$$

So $q - q_1 = 0$ und $r_1 - r = 0$
damit $\blacksquare$

<u>Definition 2.</u> $f, d \in K[x]$; $d \neq 0$

d <u>teilt f</u> oder <u>f ist durch d teilbar</u>

oder <u>f ist Vielfach von d</u> wenn $r = 0$

in (DA): $f = dq + 0$. In dem Fall heißt q Quotient.

Lineare Algebra II

- Kuhlmann -

4. Vorlesung

am 27. 04. 2012

Korollar 1. $f \in K[x]$, $c \in K$. Es gilt:
$(x-c)$ teilt f gdw $f(c)=0$

Beweis: DA $\Rightarrow$ $f = (x-c)q + r$ $\quad$ $r=0$ oder $\deg r < 1$
i.e. r ist Skalarpolynom.

Also
$f(c) = r(c) = r$.

Also $r=0$ gdw $f(c)=0$. ◼

Definition 1. $c \in K$ ist eine <u>Nullstelle</u> wenn $f(c)=0$.
Abbreviation: "NS von f in K".
(Also c NS von f gdw $(x-c)$ teilt f).

Korollar 2. Sei $f \in K[x]$, mit $\deg f = n$.
Dann hat f höchstens n NS in K.

Beweis. $\deg f = 0$ also OE $\deg f \geq 1$.
$\Rightarrow$ $f \neq 0$ skalarpol
$\Rightarrow$ keine NS in K.

$\deg f = 1 \Rightarrow f = ax + c \quad a \neq 0$

und $ax + c = 0$ gdw $x = \frac{-c}{a}$ eindeutig.

Induktionsannahme für $n-1$ gelte.

Sei a NS von f in K, also

$$f = (x-a)\, q \qquad \deg q = n-1.$$

Nun ist $f(b) = 0$ gdw $b = a$ oder b NS von q in K.

IA $\Rightarrow$ q has höstens $(n-1)$ NS, also hat damit
f " n NS. ☒

§ Formale Ableitungen

$$f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n := f^{(0)} \text{ (Konvention)}$$

$$f^{(1)} := f' = c_1 + 2c_2 x + \dots + n c_n x^{n-1} := Df$$

Bemerkung 1. $D(f + cg) = D(f) + c\,D(g) \qquad f, g \in K[x]$
So D lineär Operator. $\qquad c \in K$
$D : K[x] \longrightarrow K[x]$

Notation $f^{(2)} = f'' = D^2 f := D(D(f))$
$f^{(3)} := D^3 f$

etc..., D^n alle lineare Operatoren.

Satz 1. (Taylor's Formel)

Seien $\mathrm{Char}(K) = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$; $a \in K$, $p \in K[x]$, $\deg p \leq n$.

Es gilt: $$p = \sum_{i=0}^{n} p^{(i)}(a) \frac{1}{i!} (x-a)^i \qquad (*)$$

Beweis Sei (wieder wie in LIS) V der K-VR der Poly. von $\deg \leq n$ (und das 0 Poly.)

Betrachte: $l_i : V \longrightarrow K$

$$l_i(p) := p^{(i)}(a)$$

$l_i \in V^*$ $\quad i = 0, \dots, n$

Setze $p_i := \frac{1}{i!} (x-a)^i$.

Es gilt $l_j(p_i) = \delta_{ij}$ (siehe ÜB).

Also sind $\left.\begin{matrix} p_0, \dots, p_n \\ l_0, \dots, l_n \end{matrix}\right\}$ zueinander Dualebasen von V und V^*

Also $p = \sum_{i=0}^{n} l_i(p) \, p_i$ ∎

Bemerkungen:

(1) $1, (x-a), \ldots, (x-a)^n$ sind l.u.

also ist diese lineare Kombination ⊛ eindeutig.

(2) $\mathrm{Char}(K) = 0$ wird vorausgesetzt damit $i! \neq 0$.

Definition 2. Sei $f \neq 0$, $c \in K$ eine NS von f in K.
Die Vielfachheit von c ist die größte $\mu \in \mathbb{N}$ so daß $(x-c)^\mu$ teilt f.

Bemerke: $1 \leq \mu \leq \deg f$.

Satz 2. $\mathrm{Char}(K) = 0$, $f \neq 0$; $\deg f \leq n$
$c \in K$ NS von f
Es gilt:

c hat Vielfachheit μ gdw

$$(\dagger) \begin{cases} f^{(k)}(c) = 0 & 0 \leq k \leq \mu-1 \\ f^{(\mu)}(c) \neq 0 \end{cases}$$

Beweis. "$\Rightarrow$" $(x-c)^\mu$ teilt f und $(x-c)^{\mu+1}$ teilt nicht f.

Es gibt also $g \neq 0$ mit $f = (x-c)^\mu g$.

Bemerke: $\deg g \leq n-\mu$ und $g(c) \neq 0$.

Taylor Formel liefert:

$$f = (x-c)^{\mu} \left[\sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \, \frac{(x-c)^{m}}{m!} \right]$$

Also

$$f = \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \, \frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!}$$

Da die Koeffizienten von f als lineare Kombination von $(x-c)^k$ $(0 \le k \le n)$ eindeutig sind, ein <u>Vergleich ergibt</u>:

$$(\dagger\dagger) \qquad f = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(c) \, \frac{(x-c)^k}{k!}$$

$$= \sum_{m=0}^{n-\mu} g^{(m)}(c) \, \frac{(x-c)^{\mu+m}}{m!}$$

$$= g^{(0)}(c) \, \frac{(x-c)^{\mu}}{0!} + \dots + g^{(n-\mu)} \, \frac{(x-c)^{n}}{(n-\mu)!}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{f^{(k)}}{k!}(c) = 0 & \text{für } 0 \le k \le \mu - 1 \\ \text{und} & \\ \dfrac{f^{(k)}}{k!}(c) = \dfrac{g^{(k-\mu)}}{(k-\mu)!}(c) & \mu \le k \le n \end{array} \right.$$

Insbesonders für $\mu = k$ erhalten wir

$$f^{(\mu)}(c) = g(c) \neq 0.$$

"$\Leftarrow$" (†) und (††) liefern

$$f = \sum_{k=\mu}^{n} f^{(k)}(c) \frac{(x-c)^k}{k!}$$

Also

$$f = (x-c)^{\mu} \underbrace{\left[\frac{f^{\mu}(c)}{\mu!} + \frac{f^{(\mu+1)}(c)}{\mu+1!} (x-c) + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^{n-\mu} \right]}_{:= g}$$

$$g(c) = \frac{f^{\mu}(c)}{\mu!} \neq 0$$

Also $f = (x-c)^{\mu} g$ mit $g(c) \neq 0$.

Wir behaupten nun daß $(x-c)^{\mu+1}$ teilt nicht f,

sonst hätten wir $h \in K[x]$ mit

$$f = (x-c)^{\mu+1} h = (x-c)^{\mu} (x-c) h$$
$$= (x-c)^{\mu} g$$

$K[x]$ Integritätsbereich $\Rightarrow$

$$g = (x-c) h$$

also $g(c) = 0$. $\lightning$ ∎

Lineare Algebra II

– Kuhlmann –

– 5. Vorlesung –

Am 30. 04. 2012.

Definition 1. Ein K-Unterraum $M \subseteq K[x]$ ist ein Ideal wenn gilt:

$$\forall f \in K[x],\ g \in M \text{ ist } fg \in M.$$

Bsp 0 $M = K[x]$; $M = \{0\}$ sind Ideale

Bsp 1 Sei $d \in K[x]$, $d \neq 0$

$$M := d\,K[x] = \{df \,;\, f \in K[x]\}$$

ist ein Ideal z.z. $1 \in M$; $c \in K$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \underbrace{c\,(df)}_{\in M} - \underbrace{dg}_{\in M} = d\,\underbrace{(cf - g)}_{\in M} \end{array}\right\} \text{Unterraum}$$

$$f \in K[x] \qquad dg \in M \Rightarrow f(dg) = \underbrace{d\,(fg)}_{\in M}$$ ∎

Definition 2 $d\,K[x]$ heißt Hauptideal (mit Erzeuger d).

Bsp 2 (endlich erzeugtes Ideal)

Seien $d_1, \dots, d_\ell \in K[x]$

$$M := d_1 K[x] + \dots + d_\ell K[x]$$

ist K-Unterraum. Es ist ein Ideal:

Sei $p \in M$; $p = d_1 f_1 + \dots + d_\ell f_\ell$; sei $f \in K[x]$
$f_1, \dots, f_\ell \in K[x]$
dann ist $pf = d_1 \underbrace{(f_1 f)}_{\in K[x]} + \dots + d_\ell \underbrace{(f_\ell f)}_{\in K[x]} \in M$

Definition 3 M ist endlich erzeugtes Ideal (mit Erzeugern $d_1, \dots, d_\ell$).

weitere Beispiele: siehe ÜB.

Satz 1. Sei $0 \neq M \subseteq K[x]$ Ideal.

$\exists!$ normiertes Polynom $d \in K[x]$ s.d.

$M = d K[x]$

Beweis $\exists^Z$: Sei $d \neq 0$, $d \in M$; $\deg d$ minimal, und OE d normiert.

Sei $f \in M$. (DA) $\Rightarrow$ $f = dq + r$
$r = 0$ oder $\deg r < \deg d$. Aber $r = \overbrace{f - dq}^{\in M}$

Also muss $r = 0$ und damit $f = dq$ $\square$

$\exists !$: Sei g normiert s.d. $M = gK[x]$

Also $\exists$ $0 \neq p, q \in K[x]$ s.d.

$$\left.\begin{array}{l} d = gp \text{ und} \\ g = dq \end{array}\right\} \text{ also } d = dqp;$$

es folgt: $\deg d = \deg d + \deg p + \deg q$.

Also $\deg p = \deg q = 0$; p, q sind Skalarpolynome. Nun sind g und d normiert, also $p = q = 1$, also $d = g$ $\square$

Korollar 1 Das normierte Erzeuger d vom Ideal
$p_1 K[x] + \dots + p_\ell K[x]$

ist der $ggT(p_1, \dots, p_\ell)$, d.h.

$\underset{1 \le i \le \ell}{d \mid p_i}$ und aus $\underset{\substack{d_0 \in K[x] \\ 1 \le i \le \ell}}{d_0 \mid p_i}$ folgt $d_0 \mid d$.

Beweis $dK[x] = p_1 K[x] + \dots + p_\ell K[x]$

also $\underset{1 \le i \le \ell}{d \mid p_i}$. Ferner $d \in M$ also

$$d = p_1 q_1 + \dots + p_n q_n$$

$$= d_0 [g_1 q_1 + \dots + g_n q_n] \qquad \blacksquare$$

<u>Definition 4</u> $p_1, \dots, p_e$ sind <u>relativ prim</u> wenn

$$ggT(p_1, \dots, p_e) = 1$$

(äquiv: $p_1 K[x] + \dots + p_e K[x] = K[x]$)

§ Primzerlegung (Primfaktorisierung).

<u>Definition 5</u> $f \in K[x]$ ist reduzible über K wenn es $g, h \in K[x]$ gibt, $\deg g \geq 1$, $\deg h \geq 1$ und $f = gh$

Sonst ist f irreduzible. Ist f irreduzible und $\deg f \geq 1$ so nennen wir f Primpolynome über K.

<u>Bem.</u> f reduzible $\Rightarrow \deg f \geq 2$

<u>Bsp</u> $f = x^2 + 1$ reduzible über $\mathbb{C}$
$= (x+i)(x-i)$
aber irreduzible über $\mathbb{R}$.

<u>Satz 2</u> $p, f, g \in K[x]$, p Primpol.

Aus $p \mid fg$ folgt $p \mid f$ oder $p \mid g$

<u>Beweis</u> OE p normiert, p irreduzible $\Rightarrow$ die einzige

normierte Teiler von p sind 1 und p.

Sei $d := ggT(f, p)$, insbesonders $d = 1$ oder $d = p$.

Falls $d = p$ dann $p \mid f$.

Wenn $d = 1 \Rightarrow 1 = p_0 p + f_0 f$

$p_0, f_0 \in K[x]$ also

$$g = f_0 f g + p_0 p g$$

$$\text{und } \left.\begin{array}{l} p \mid fg \\ p \mid p(p_0 g) \end{array}\right\} \Rightarrow p \mid g \quad \blacksquare$$

Korollar 2 $\quad p$ Primpol, $\quad p \mid f_1 \cdots f_l$

$\Rightarrow \exists i \in \{1, \ldots, l\}$ s.d. $p \mid f_i$.

Satz 3 $\quad$ Sei $f \in K[x]$, f normiert, $\deg f \geq 1$.

Dann ist f Produkt von normierten Primpolynomen.

Diese Darstellung ist eindeutig, bis auf Umnummerierung.

Beweis: $\exists^z$ $\deg f = 1 \Rightarrow f$ irred. nichts weiter z.z.

Sei nun $\underbrace{\deg f}_{:=n} > 1$. Beweis per Induktion nach n.

Ist f irreduz. dann nichts weiter z.z.

Sonst $f = gh$ $\quad n > \deg g \geq 1$
$\quad n > \deg h \geq 1$

IA gilt für g, h und damit bekommen wir eine Faktorisierung für f.

Eindeutigkeit. Sei

$$f = p_1 \cdots p_\ell = q_1 \cdots q_s.$$

p_i, q_i normierte prim.

Also $p_\ell \mid q_1 \cdots q_s$; es folgt

$p_\ell \mid q_j$ für ein gewisses $1 \leq j \leq s$

p_ℓ, q_j normierte prim $\Rightarrow q_j = p_\ell$

OE nach Umnumerierung bekommen wir

$$p_\ell = q_s \quad (*)$$

und somit

$$P := p_1 \cdots p_{\ell-1} = q_1 \cdots q_{s-1}$$

$\deg(\underline{P}) < n$, also IA gilt

d.h. $q_1, \dots, q_{s-1}$ ist Umnummerierung von

$p_1, \dots, p_{\ell-1}$. Diese Tatsache zusammen mit (*)

beweist unsere Behauptung. $\blacksquare$

Notation: Throughout, let $\mathbb{N}_n := \{1, ..., n\}$.

Definition 0.1. *Let $n \in \mathbb{N}$. A* ***permutation*** *of $\mathbb{N}_n$ is a bijection $\mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$. We write S_n for the set of permutations of $\mathbb{N}_n$. The set S_n together the function*

$$S_n \times S_n \to S_n$$

that maps (α, β) to the composition of functions $\alpha \circ \beta$ is a group. We call this group the ***symmetric group*** *on n elements.*

Why is S_n a group?

(i) If $\alpha, \beta \in \mathrm{S}_n$ then $\alpha \circ \beta$ is bijective and thus $\alpha \circ \beta \in \mathrm{S}_n$.
(ii) The identity map $\epsilon : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$, defined by $\epsilon(i) := i$ for all $i \in \mathbb{N}_n$, is the identity element for S_n.
(iii) Bijective maps have inverses. If $\alpha \in \mathrm{S}_n$ then there exists $\beta \in S_n$ such that $\alpha \circ \beta = \epsilon$.
(iv) Multiplication is associative since function composition is always associative.

Notation: From now on, for $\alpha, \beta \in \mathrm{S}_n$ we will write $\alpha\beta$ to mean $\alpha \circ \beta$. For a permutation σ of $\mathbb{N}_n$, we write:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Example: The permutation $\sigma \in \mathrm{S}_5$ with $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 5, \sigma(3) = 4, \sigma(4) = 1, \sigma(5) = 2$ is written

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definition 0.2. *If $\sigma \in S_n$ has the property that there exist $a_1, ..., a_m \in \mathbb{N}_n$ such that*

$$\begin{aligned} &\sigma(a_i) = a_{i+1}, && \text{for } 1 \leq i \leq m-1; \\ &\sigma(a_m) = a_1, && \\ &\text{and } \sigma(x) = x, && \text{for } x \notin \{a_1, ..., a_m\}. \end{aligned}$$

*we say σ is an m-****cycle*** *and write σ in* ***cycle notation*** *as $(a_1 a_2 .... a_m)$. A* ***transposition*** *is a 2-cycle.*

Example: The permutation

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

is a 3-cycle. We write σ in cycle notation as (142).

Definition 0.3. *We say $\alpha, \beta \in S_n$ are* ***disjoint*** *if,*

$$\{x \mid \alpha(x) \neq x\} \cap \{x \mid \beta(x) \neq x\} = \emptyset.$$

Example: Let

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

and

$$\gamma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

The permutations σ and τ are disjoint but σ and γ are not disjoint.

Lemma 0.4. *Let $\alpha_1, ..., \alpha_m \in S_n$ be pairwise disjoint permutations and let $\tau \in S_n$. The permutations $\alpha_1\alpha_2...\alpha_m$ and τ are disjoint if and only if α_i and τ are disjoint for all $0 < i \leq m$.*

Proof. See exercise sheet. □

Proposition 0.5. *Every $\sigma \in S_n$ can be written as a product of disjoint cycles.*

Proof. Fix $n \in \mathbb{N}$. We shall prove the statement by induction on

$$\Gamma(\sigma) := |\{a \in \mathbb{N}_n \mid \sigma(a) \neq a\}|.$$

If $\Gamma(\sigma) = 0$ then σ is the identity map on $\mathbb{N}_n$ so $\sigma = (1)(2)...(n)$.

Let $\sigma \in \mathrm{S}_n$. Suppose $k = \Gamma(\sigma) > 0$ and suppose the assertion is true for all permutations τ with $\Gamma(\tau) < k$.

Let $i_0 \in \mathbb{N}_n$ be such that $\sigma(i_0) \neq i_0$. Let $i_s := \sigma^s(i_0)$. Since $\mathbb{N}_n$ is finite, there exists $p, q \in \mathbb{N}$ with $p < q$ such that $\sigma^p(i_0) = \sigma^q(i_0)$. Since σ is bijective, $\sigma^{p-q}(i_0) = i_0$. Take $r \in \mathbb{N}$ least such that $\sigma^{r+1}(i_0) = i_0$. Let τ be the $r+1$-cycle, $(i_0 i_1 ... i_r)$.

Now

$$\{a \in \mathbb{N}_n \mid (\tau^{-1}\sigma)(a) = a\} = \{a \in \mathbb{N}_n \mid \sigma(a) = a\} \cup \{i_0, ..., i_r\}.$$

So $\Gamma(\tau^{-1}\sigma) < k = \Gamma(\sigma)$.

So, by the induction hypothesis, $\tau^{-1}\sigma$ can be written as a product of pairwise disjoint cycles, say $\tau^{-1}\sigma = \alpha_1\alpha_2...\alpha_m$. So $\sigma = \tau\alpha_1\alpha_2...\alpha_m$.

Since $\alpha_1\alpha_2...\alpha_m(i_j) = \tau^{-1}\sigma(i_j) = i_j$ for $0 \leq j \leq m$, the permutations $\alpha_1\alpha_2...\alpha_m$ and τ are disjoint. By the lemma, this means τ and α_i are disjoint for $0 < i \leq m$. So σ is a product of disjoint cycles.

□

Example: The permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

written as a product of disjoint cycles is

$$(134)(25).$$

Notation:

Proposition 0.6. *Every permutation on $\mathbb{N}_n$ can be written as a product of transpositions.*

Proof. The identity is $(12)(21)$.
Since every permutation can be written as a product of cycles, it is enough to show that every cycle can be written as a product of transpositions. Let $(i_1...i_r) \in \mathrm{S}_n$ be an r-cycle. Then

$$(i_1 i_2 ... i_r) = (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1})...(i_1 i_3)(i_1 i_2).$$

For i_1,

$$(i_1 i_r)(i_1 i_{r-1})...(i_1 i_3)(i_1 i_2) i_1 = (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1})...(i_1 i_3) i_2 = i_2.$$

For $s > 1$,

$$\begin{aligned} (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1})...(i_1 i_3)(i_1 i_2) i_s &= (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1})...(i_1 i_{s+1})(i_1 i_s) i_s \\ &= (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1})...(i_1 i_{s+2})(i_1 i_{s+1}) i_1 \\ &= (i_1 i_r)(i_1 i_{r-1})...(i_1 i_{s+2}) i_{s+1} \\ &= i_{s+1} \end{aligned}$$

□

Example: The permutation $(123) \in \mathrm{S}_4$ can be written as both

$$(13)(12)$$

and

$$(13)(42)(12)(14).$$

So factorisation into transpositions is not unique, even more, the number of transpositions used in a factorisation is not unique. So, what is unique?
In order to answer this question we first need to define the action of a permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ on a function from $\mathbb{Z}^n$ to $\mathbb{Z}$. (Reminder $\mathbb{Z}^n := \underbrace{\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}}_{n-times}$).
Let $\sigma \in \mathrm{S}_n$ and $f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ be a function. We define σf to be the function from $\mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ defined by

$$(\sigma f)(x_1, ..., x_n) := f(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(n)}).$$

Example: Let $f : \mathbb{Z}^3 \to \mathbb{Z}$ be the function defined by $f(x_1, x_2, x_3) := x_1 x_2 + x_3$ and $\sigma := (123) \in \mathrm{S}_3$. The function

$$(\sigma f)(x_1, x_2, x_3) = f(x_2, x_3, x_1) = x_2 x_3 + x_1.$$

Lemma 0.7. *Let $\sigma, \tau \in S_n$ and $f, g : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$. Then*

(i) $\sigma(\tau f) = (\sigma\tau)f$

(ii) $\sigma(fg) = (\sigma f)(\sigma g)$

Proof. See exercise sheet. $\square$

Theorem 0.8. *There is a map sign* $: S_n \to \{1, -1\}$ *such that:*

(a) For every transposition $\tau \in S_n$, *sign*$(\tau) = -1$.

(b) For permutations σ, σ'

$$sign(\sigma\sigma') = sign(\sigma) sign(\sigma').$$

This function is unique with these properties. For $\sigma \in S_n$, *we call sign*(σ) *the* ***signature*** *of* σ.

Proof. Fix $n \in \mathbb{N}$. Let $\Delta : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ be the function defined by

$$\Delta(x_1, ..., x_n) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Claim: For a transposition $\tau \in \mathrm{S}_n$, $\tau\Delta = -\Delta$.
Let $\tau = (rs)$ with $r < s$.
By lemma 0.7(i)

$$\tau\Delta(x_1, ..., x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \tau(x_j - x_i).$$

Clearly, if $i, j \notin \{r, s\}$ then $\tau(x_j - x_i) = (x_j - x_i)$.
For the factor $(x_s - x_r)$, we have that $\tau(x_s - x_r) = -(x_r - x_s)$.
The remaining factors can be put into pairs as follows:

$$\begin{array}{ll} (x_k - x_s)(x_k - x_r), & \text{if } k > s; \\ (x_s - x_k)(x_k - x_r), & \text{if } r < k < s; \\ (x_s - x_k)(x_r - x_k), & \text{if } k < r. \end{array}$$

Each pair is unaffected by τ.
Therefore $\tau\Delta = -\Delta$. So we have proved the claim.

Now suppose $\sigma \in S_n$. We can write $\sigma = \tau_1 ... \tau_m$ where $\tau_1, ..., \tau_m$ are transpositions. By lemma 0.7(ii),

$$\sigma\Delta = \tau_1(\tau_2(...(\tau_m\Delta)...))$$

and by the claim

$$\tau_1(\tau_2(...(\tau_m\Delta)...)) = (-1)^m\Delta.$$

So $\sigma\Delta = \Delta$ or $\sigma\Delta = -\Delta$.

For $\sigma \in \mathrm{S}_n$, let $\mathrm{sign}(\sigma) = +1$ if $\sigma\Delta = \Delta$ and let $\mathrm{sign}(\sigma) = -1$ if $\sigma\Delta = -\Delta$. This map is well-defined since $\Delta(1, 2, ..., n) \neq 0$.

Let $\sigma, \tau \in \mathrm{S}_n$. By lemma 0.7(i),

$$(\sigma\tau)\Delta = \sigma(\tau\Delta).$$

So

$$\mathrm{sign}(\sigma\tau) = \mathrm{sign}(\sigma)\mathrm{sign}(\tau).$$

The function sign : $\mathrm{S}_n \to \{1, -1\}$ is unique with properties (a) and (b) since every permutation is a product of transpositions.

$\square$

Remark: Let $\sigma \in \mathrm{S}_n$ and let $\tau_1, ..., \tau_m \in \mathrm{S}_n$ be transpositions such that $\sigma = \tau_1 ... \tau_m$. Then

$$\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^m.$$

Definition 0.9. *We call a permutation even if it can be written as a product of an even number of transpositions.*
We call a permutation odd if it can be written as a product of an odd number of transpositions.

Corollary 0.10. *A permutation σ is even if and only if sign(σ) $= 1$ and is odd if and only if sign(σ) $= -1$. Thus, a permutation can not be written as both a product of an even number transpositions and an odd number of transpositions.*

– Lineare Algebra II –

– Kuhlmann –

7. Vorlesung am 07. 05. 2012

§ Die symmetrische Gruppen S_n (Fortsetzung).

<u>Definition und Notation:</u> Betrachte die folgende Untermenge von S_n:

$A_n := \{ \sigma \mid \sigma \text{ ist gerade} \}$.

Es gilt: A_n ist eine Untergruppe von S_n

[(1) die Einheit ist gerade, $\sigma = \tau_1 \dots \tau_m$
also $(1) \in A_n$ $\quad \gamma = \gamma_1 \dots \gamma_n$
$S_n \ni \tau_i, \gamma_j$ Transpositionen, m, n gerade
$1 \le i \le m$ $\Rightarrow \sigma\gamma = \tau_1 \dots \tau_m \gamma_1 \dots \gamma_n$;
$1 \le j \le n$
also A_n abgeschlossen unter Produkt, auch $\sigma^{-1} = \tau_m^{-1} \dots \tau_1^{-1}$, also A_n abgeschlossen unter Inversen.]

A_n ist die <u>alternierende Gruppe</u>.

<u>Bem:</u> $S_n = A_n \,\dot\cup\, \text{Ungerade} = A_n \,\dot\cup\, \mathcal{U}$
wobei
$\mathcal{U} := \text{Ungerade} := \{ \sigma ; \sigma \text{ ist ungerade} \}$ ist die Untermenge der ungeraden Permutationen.

Die Abbildung

$$A_n \longrightarrow \mathcal{U}$$
$$\delta \longmapsto (12)\delta$$

ist bijektiv. Wir folgern:

$$|A_n| = \frac{n!}{2} \qquad \blacksquare$$

---

§ **Multilineare Formen.**

Definition: Sei K Körper, U, V K-VR

$$\beta : U \times V \longrightarrow K$$
$$(x,y) \longmapsto \beta(x,y)$$

ist eine bilineare Funktionale falls gelten:
(oder bilineare Form)

(1) $\beta(c_1 x_1 + c_2 x_2, y) = c_1 \beta(x_1, y) + c_2 \beta(x_2, y)$

und

(2) $\beta(x, d_1 y_1 + d_2 y_2) = d_1 \beta(x, y_1) + d_2 \beta(x, y_2)$

für alle $x, x_1, x_2 \in U$, $y, y_1, y_2 \in V$,
$c_1, c_2, d_1, d_2 \in K$.

Bsp. $V \times V^* \longrightarrow K$
$(x,f) \longmapsto [x,f]$ wobei
$[x,f] := f(x)$ für $x \in V$ und $f \in V^*$.

Die definierende Eigenschaften in V^* liefern und Verknüpfungen

(1) $[c_1 x_1 + c_2 x_2, f] = c_1 [x_1, f] + c_2 [x_2, f]$

und

(2) $[x, d_1 f_1 + d_2 f_2] = d_1 [x, f_1] + d_2 [x, f_2]$. ∎

Notation: $\mathcal{L}^{(2)}(U \times V; K) :=$ die Menge der bilinearen Formen auf $U \times V$.

Sie ist ein K-Vektorraum (mit den Verknüpfungen

$$(c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2)(x, y) := c_1 \beta_1 (x, y) + c_2 \beta_2 (x, y)$$

wie üblich).

Definition $m \in \mathbb{N}$; $V_1, \ldots, V_m$ K-VR

Eine <u>m-lineare Funktionale</u> (Form) (oder multilineare Funktionale vom Grad m) auf $V_1 \times \ldots \times V_m$ ist eine Abbildung

$\mu : V_1 \times \ldots \times V_m \longrightarrow K$ so daß für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$

gilt:

$$\left.\begin{aligned} &\mu(\alpha_1, \ldots, c\alpha_i + \gamma_i, \ldots, \alpha_m) = \\ &c\,\mu(\alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_m) + \\ &\mu(\alpha_1, \ldots, \gamma_i, \ldots, \alpha_m) \end{aligned}\right\} \text{ für } \alpha_i, \gamma_i \in V_i,\ c \in K.$$

Notation $\mathcal{L}^{(m)}(V_1 \times \dots \times V_m; K) :=$ K-VR der m-linearen Formen.

Bem. μ multilinear und $\exists i$ mit $\alpha_i = 0 \Rightarrow$

$\mu(\alpha_1, \dots, 0, \dots, \alpha_m) = 0$.

§ Alternierende multilineare Formen auf K^n.

Definition: Sei $n \in \mathbb{N}$, $V = K^n$

Eine n-lineare Form

$$\delta : \underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_{n \text{ mal}} \longrightarrow K$$

ist <u>alternierend</u> falls:

$\exists\, i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $z_i = z_j$
$i \neq j$

impliziert daß:

$\delta(z_1, \dots, z_n) = 0$ (für $z_1, \dots, z_n \in K^n$).

Konvention: δ wird auch als Abbildung auf $K^{n \times n} = Mat_{n \times n}(K)$ aufgefasst;

nämlich $\delta(A) = \delta(z_1, \dots, z_n)$ wobei

$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \text{----} \\ z_n \end{pmatrix}$; i.e z_i ist die i^{te} - Zeile

der $n \times n$ Matrix A.

Lemma 1. Sei δ alternierend. Es gelten:

(i) $z_1, \dots, z_n$ linear abhängig $\Rightarrow$

$\delta(z_1, \dots, z_n) = 0$

(ii) $\delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) =$

$- \delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n)$

(für $i \neq j$).

Allgemeiner: $\delta(z_{\pi(1)}, \dots, z_{\pi(n)}) = \mathrm{Sign}(\pi)\, \delta(z_1, \dots, z_n)$; $\pi \in S_n$

Beweis: (i) OE nehmen wir an: $z_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i$

für geeignete $c_1, \dots, c_{n-1} \in K$.

Wir berechnen:

$$\delta\Big(z_1, \dots, z_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} c_i z_i\Big) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i\, \delta(z_1, \dots, z_{n-1}, z_i)$$

$$= 0$$

(ii) Wir berechnen:

$0 = \delta(z_1, \dots, z_i + z_j, \dots, z_j + z_i, \dots, z_n) =$

$= \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j + z_i, \dots, z_n) +$

$\delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_j + z_i, \dots, z_n) =$

$\delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) +$

$0 = \quad \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_i, \dots, z_n) +$

$0 = \quad \delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_j, \dots, z_n) +$

$\delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n)$

Also:

$0 = \delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_j, \dots, z_n) +$

$\delta(z_1, \dots, z_j, \dots, z_i, \dots, z_n)$

wie behauptet. $\blacksquare$

Bem: (1) Falls $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ gilt auch die Umkehrung:

δ erfüllt (ii) impliziert δ alternierend:

~~nehme $z_i = z_j$ für $i \neq j$~~

also $\delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_i, \dots, z_n) = -\delta(z_1, \dots, z_i, \dots, z_i, \dots, z_n)$ $\Bigg\}$ $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ $\forall a \in K$; $a = -a \Rightarrow a = 0$

(2) $\delta((a,b),(c,d)) := ac + bd$ auf $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ ist Gegenbsp.

– Lineare Algebra II –

– Kuhlmann –

8. Vorlesung
am 11. 05. 2012.

Lemma 2. Seien $\delta : K^n \times \dots \times K^n \longrightarrow K$ alt. n-lin. Form und $A \in M_{n \times n}(K)$. Es gelten:

(i) $\delta(e(A)) = \delta(A)$ $\quad e$ Zeilenumformung von Typ 3

(ii) $\delta(e(A)) = -\delta(A)$ $\quad e$ von Typ 1, $i \neq j$

(iii) $\delta(e(A)) = c\,\delta(A)$ $\quad e$ von Typ 2; $c \in K$; $c \neq 0$.

allgemeiner

(iv) $\delta(c\,A) = c^n\,\delta(A)$ $\quad c \in K$; c

Beweis: (i) $\delta(z_1 + c z_2, z_2, \dots, z_n) = \delta(z_1, z_2, \dots, z_n) + c\,\underbrace{\delta(z_2, z_2, \dots, z_n)}_{= 0}$.

(ii) Folgt aus Lemma 1. (7. Vorlesung).

(iii) folgt aus n-linearität

(iv) $\delta(c z_1, \dots, c z_n) = c\,\delta(z_1, c z_2, \dots, c z_n) =$
$c^2 \delta(z_1, z_2, c z_3, \dots, c z_n) = \dots$
$c^n \delta(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)$. ∎

Lemma 3 $\delta(A) = \Delta_A \; \delta(\text{r.Z.S.F}(A))$

wobei $\Delta_A \in K$; $\Delta_A \neq 0$; Δ_A hängt nur von

$A \in M_{n\times n}(K)$ ab.

Beweis: Wiederholte Anwendung von Lemma 2
(Δ_A ist ein Produkt aus der Gestalt

$(-1)^l \, c_1 \dots c_k$ für geeignete $l, k \in \mathbb{N}_0$,

und $c_1, \dots, c_k \in K^\times$). ∎

Bem: Für $A \in M_{n\times n}(K)$ gilt die folgende Dichotomie (siehe LA I):

$$\begin{cases} \underline{\text{Fall}(1)} & \text{r.Z.S.F}(A) \text{ hat eine Nullzeile} \\ & \text{oder} \\ \underline{\text{Fall}(2)} & \text{r.Z.S.F}(A) = I_n \end{cases}$$

also erhalten wir hier auch eine Dichotomie:

$$\begin{cases} \underline{\text{Fall}(1)} & \delta(A) = \Delta_A \cdot 0 = 0 \\ \underline{\text{Fall}(2)} & \delta(A) = \Delta_A \, \delta(I_n) \end{cases}$$

Kor 1. $\delta \neq 0$ gdw $\delta(I_n) \neq 0$

Bew. "$\Leftarrow$" klar

"$\Rightarrow$" $\delta(I_n) = 0 \Rightarrow \delta(A) = 0$ in beiden Fällen (1) und (2). ∎

Kor 2. $\delta(A) \neq 0$ gdw A invertierbar.

Bew. A invertiebar $\Leftrightarrow$ r. Z. S. F $(A) = I_n$. ∎

Kor 3 Seien δ_1, δ_2 n-lineare alt. Formen auf K^n.

Es gilt $\delta_1 = \delta_2$ gdw $\delta_1(e_1, \dots, e_n) = \delta_2(e_1, \dots, e_n)$

(wobei wie immer $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ die Standard Basis ist). ∎

Definition und Notation. $\mathbb{A} := alt^{(n)}(K^n) :=$ der K-VR der n-linearen alt. Formen auf K^n.

Es ist ein Unterraum von $\mathcal{L}^{(n)}(K^n \times \dots \times K^n; K)$.

Kor 4. $\operatorname{Dim}(alt^{(n)}(K^n)) \leq 1$.

Beweis. Sei $\delta_1 \neq 0$ fixiert. Sei $\delta_2 \in \mathbb{A}$.
Es gilt

$$(*) \quad \delta_2(A) = \Delta_A \, \delta_2(I_n) = \Delta_A \left(\frac{\delta_2(I_n)}{\delta_1(I_n)} \right) \delta_1(I_n).$$

Setze $d := \dfrac{\delta_2(I_n)}{\delta_1(I_n)} \in K$.

Aus $(*)$ folgt:

$$\delta_2(A) = d \, \underbrace{\Delta_A \, \delta_1(I_n)} = d \, \delta_1(A)$$

für $A \in M_{n \times n}(K)$. Also ist $\delta_2 = d\,\delta_1$. ∎

Wir werden nun zeigen: es existiert ein $\delta \in \mathbb{A}$ mit $\delta(I_n) = 1$

Definition: Die Determinante (Funktionale) ist die eindeutige n-lineare alt. Form auf K^n wofür

$$\det(I_n) = 1 \quad \text{gilt.}$$

Die Formel Berechnung:

Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ $\quad A \in M_{n \times n}(K)$ $\quad \delta \in A$.

$A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

Wir schreiben $z_i = \sum_{j_i=1}^{n} a_{i j_i} e_{j_i}$ in der Standard Basis.

Wir berechnen:

$$\delta(A) = \delta\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1 j_1} e_{j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{n j_n} e_{j_n}\right) \overset{n\text{-lin}}{=} \quad (*)$$

$$\sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^{n} a_{1 j_1} \cdots a_{n j_n} \, \delta(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) \quad (**)$$

Betrachte die Abbildung

$$\{1, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, \ldots, n\}$$
$$i \longmapsto j_i.$$

Falls nicht injektiv dann gibt es eine Wiederholung in $(j_1, \ldots, j_n)$ und damit ist $\delta(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = 0$

Falls injektiv dann ist sie eine Permutation $\pi \in S_n$

und damit ist $\delta(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = \text{sign}(\pi)\,\delta(e_1, \dots, e_n)$

also können wir nun (**) umschreiben

$$(**) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}\, \delta(e_1, \dots, e_n)$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}\, \delta(I_n)$$

$$(***) \quad = \delta(I_n) \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} .$$

Wir sehen also daß $\delta(I_n) = 1$ liefert eine Formel für δ wie in (***) :

<u>Satz</u>:
Definiere für $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$

$$\delta(A) := \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} \qquad (\det)$$

δ ist eine n-lin alt. Form und erfüllt $\delta(I_n) = 1$.

<u>Beweis</u>: • Sei $0 \neq A$ diagonal, also $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.
Das heißt: die einzige Permutation die einen Beitrag $\neq 0$ bringt ist diejenige ~~wofür~~ $i = \pi(i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ gilt, i.e $\pi = (1)$ die Identität $\in S_n$.
Es bleibt also nur ein Produkt in (det) übrig;

nämlich $a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = \delta(A)$; Insbesondere $\delta(I_n) = 1$.

- n-linear? Berechne

$$\operatorname{sign}(\pi) \left[(a_{1\pi(1)} + d\, a'_{1\pi(1)})\, a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)} \right] =$$

$$\operatorname{sign}(\pi) \left[(a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}) + d\, (a'_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}) \right]$$

usw... ÜA.

- alternierend? Sei $Z_1 = Z_2$ i.e $a_{1j} = a_{2j}$ $\forall 1 \leq j \leq n$

i.e $a_{1\pi(j)} = a_{2\pi(j)}$ $\forall$ $\pi \in S_n$, $1 \leq j \leq n$

Berechne (mit $S_n = A_n \dot{\cup} A_n(12)$)

$$\delta(A) = \sum_{\pi \in A_n \dot{\cup} A_n(12)} \operatorname{sign}(\pi)\, a_{1\pi(1)} a_{1\pi(2)} a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{\pi \in A_n} \overset{1}{\overset{\parallel}{\operatorname{sign}(\pi)}}\, a_{1\pi(1)} a_{1\pi(2)} a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)} \right)}_{\mathrm{I}} +$$

$$\underbrace{\sum_{\pi \in A_n} \overset{(-1)}{\overset{\parallel}{\left[\operatorname{sign}(\pi)(12)\right]}}\, a_{1\pi(12)(1)} a_{1\pi(12)(2)} a_{3\pi(12)(3)} \cdots a_{n\pi(12)(n)}}_{\mathrm{II}}$$

In der Summe II bekommen wir:

$$\sum_{\pi \in A_n} \Big[\overset{(-1)}{\overset{\parallel}{-\operatorname{sign}(\pi)}} \Big] a_{1\pi(2)}\, a_{1\pi(1)}\, a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

$$\underbrace{= \sum_{\pi \in A_n} \Big[\overset{(-1)}{\overset{\parallel}{-\operatorname{sign}(\pi)}} \Big] a_{1\pi(1)}\, a_{1\pi(2)}\, a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}}_{\mathrm{II}}$$

Wir sehen also die Termen kürzen sich ab, ie in I bzw in II: $a_{1\pi(1)}\, a_{1\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$ und $-a_{1\pi(1)}\, a_{1\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$

i.e $\quad \mathrm{I} + \mathrm{II} = 0 \quad \blacksquare$

Kor 5: $\quad \operatorname{Dim}(\mathbb{A}) = 1 \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Lineare Algebra II -

- Kuhlmann -

- 9. Vorlesung am 14.05.2012 -

Korollar 1. $\text{Dim}(\text{alt}^{(n)}(K^n)) = 1$.
Das heißt:
$\delta(A) = \det(A)\,\delta(I_n)$ für $A \in M_{n\times n}(K)$ und $\delta \in \text{alt}^{(n)}$

Beweis: Da $\det \in \text{alt}^{(n)}$; $\det \neq 0$ ist $\text{Dim}(\text{alt}^{(n)}) = 1$.

Sei $\delta \in \text{alt}^{(n)}$; also ist $\delta = d \det$ für $d \in K$. Nun $\delta(I_n) = d \det(I_n)$ muss gelten, also $d = \delta(I_n)$. ∎

Bemerkung: Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

$\delta \in \text{alt}^{(n)}(R^n)$ ist analog definiert.

Der Hauptsatz gilt auch in diesem erweitertem Rahmen: Sei $A \in M_{n\times n}(R)$; $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$

Definiere: $\det(A) := \sum_{\pi \in S_n} \text{sign}(\pi)\, a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$

Dann ist det die eindeutige Funktionale $\delta \in \text{alt}^{(n)}(R^n)$ mit der Eigenschaft $\delta(I_n) = 1$.

Beispiel $R = K[x]$

$$A = \begin{pmatrix} x & 0 & -x^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x^3 \end{pmatrix}$$

Sei $\delta \in \mathrm{alt}^{(3)}(M_{3\times 3}(R))$:

$$\delta(A) = \delta(x\varepsilon_1 - x^2\varepsilon_3, \; \varepsilon_2, \; \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3)$$

wobei $\varepsilon_1 = (1,0,0)$, $\varepsilon_2 = (0,1,0)$, $\varepsilon_3 = (0,0,1)$

(die standard Vektoren).

$$\delta(A) = x\,\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3) - x^2\delta(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1 + x^3\varepsilon_3)$$

$$= x\,\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1) + x^4\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$
$$- x^2\delta(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_1) - x^5\delta(\varepsilon_3, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$$

$$= (x^4 + x^2)\,\delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

Satz 1: Sei $A \in M_{n\times n}(R)$. Es gilt:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

Erinnerung

$(A^T)_{ji} = A_{ij}$ oder $a^T_{ji} = a_{ij}$

Beweis. Betrachte $\prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} = \prod_{\substack{i,j=1 \\ j=\pi(i)}}^{n} a_{ij}$

für $\pi \in S_n$

$$= \prod_{\substack{i,j=1 \\ i=\pi^{-1}(j)}}^{n} a_{ij} = \prod_{j=1}^{n} a_{\pi^{-1}(j)j} = \prod_{j=1}^{n} a^{T}_{j\pi^{-1}(j)}$$

Wir berechnen nun:

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)} =$$

$$\sum_{\pi^{-1} \in S_n} \operatorname{sign}(\pi^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{j\pi^{-1}(j)} = \det(A^T). \quad \blacksquare$$

<u>Satz 2.</u> $\det(AB) = \det(A)\det(B) \qquad A, B \in M_{n\times n}(R)$

<u>Beweis.</u> Fixiere $B \in M_{n\times n}(R)$. Definiere

$$\delta_B(A) := \det(AB) \qquad A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \hline \cdots \\ \hline z_n \end{pmatrix}$$

Also $\delta_B(z_1, \dots, z_n) = \det(z_1 B, \dots, z_n B)$

n linear? $\delta_B(z_1 + c z_1', z_2, \dots, z_n) =$
$\det((z_1 + c z_1')B, \dots, z_n B) =$
$\det(z_1 B, z_2 B, \dots, z_n B) +$
$c \det(z_1' B, z_2 B, \dots, z_n B).$

Alternierend?
$\delta_B(z_1, z_1, \dots, z_n) = \det(z_1 B, z_1 B, \dots, z_n B) = 0.$

$\dim(\mathrm{Alt}^{(n)}) = 1 \Rightarrow \delta_B(A) = \det(A)\,\delta_B(I_n) = \det(A)\det(B). \quad \blacksquare$

Korollar: Sei A invertierbar, es gilt

$$\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$$

Beweis: $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$
$= \det(I_n) = 1.$ ∎

Notation Sei $A \in M_{n\times n}(R)$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ fixiert.

$A[i|j] :=$ die $(n-1)\times(n-1)$ Matrix die man bekommt nach Entfernung der i^{ten} Zeile und j^{ten} Spalte von A.

$D_{ij}(A) := \det(A[i|j])$.

Satz 3 Fixiere j; $1 \le j \le n$. Betrachte

$$\delta(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} D_{ij}(A).$$ Es ist:

$\delta \in alt^{(n)}$ und $\delta(I_n) = 1$.

Korollar (Spaltenentwicklung). Sei $A \in M_{n\times n}(R)$.
Für jedes $1 \le j \le n$ gilt

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} D_{ij}(A).$$

Beweis um Satz 3:
Für $A = I_n$ $\underset{i\neq j}{A_{ij} = 0}$ also betrachte nun $i = j$
ie $A_{jj} = 1$

wir bekommen $\delta(I_n) = (-1)^{2j} \cdot A_{jj} \det(I_{n-1})$

$$= (-1)^{2j} \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

- alternierend? Sei $A = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

Seien $z_k = z_\ell$ für $k < \ell$

Falls $i \neq k$ und $i \neq \ell$ hat $A[i|j]$ zwei gleiche Zeilen; so $D_{ij}(A) = 0$

Also betrachten wir nur $i = k$ oder $i = \ell$.

$$\delta(A) = (-1)^{k+j} A_{kj} D_{kj}(A) + (-1)^{\ell+j} A_{\ell j} D_{\ell j}(A)$$

$$= \left.\begin{array}{l} (-1)^{k+j} A_{kj} D_{kj}(A) + \\ (-1)^{\ell+j} A_{kj} D_{\ell j}(A) \end{array}\right\} (*)$$

weil $A_{\ell j} = A_{kj}$ ist.

Betrachte:

$$A[k|j] = \begin{pmatrix} z_1^- \\ \vdots \\ z_{k-1}^- \\ z_{k+1}^- \\ \vdots \\ z_n^- \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A[\ell, j] = \begin{pmatrix} z_1^- \\ \vdots \\ z_k^- \\ \vdots \\ z_{\ell-1}^- \\ z_{\ell+1}^- \\ \vdots \\ z_n^- \end{pmatrix}$$

$\quad\quad$ I $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ II

$z_\ell^- = z_k^-$ ist hiervon die $(\ell-1)^{\text{te}}$ Zeile

$z_\ell^- = z_k^-$ ist hiervon die k^{te} Zeile

Vergleichen von (I) und (II) ergibt:

$A[k|j]$ und $A[l|j]$ haben die gleichen Zeilen <u>bis auf Permutation der Zeilen</u> !!

Man kann aber $A[l|j]$ aus $A[k|j]$ erhalten durch wiederholte Zeilenumformungen aus Typ 1, in dem man die $(l-1)^{te}$ Zeile in (I) bis zur k^{te} Zeile in (II) rückt. Dafür benötigt man $(l-1)-k$ Transpositionen [:= Permutationen der Gestalt

$$(l-1 \;\; l-2) \text{ dann}$$
$$(l-2 \;\; l-3) \ldots \text{ bis}$$
$$(l-(l-k-1) \;\; l-(l-k))$$
$$\text{i.e. bis}$$
$$(k+1 \;\; k)\,]$$

<u>Zusammenfassend</u>: Setze $\pi := (k+1 \;\; k) \cdots (l-1 \;\; l-2)$

$$\pi \in S_{n-1}$$

$\mathrm{sign}(\pi) = (-1)^{(l-1)-k}$. Also $D_{lj}(A) = (-1)^{(l-1)-k} D_{kj}(A)$.

Zurück in (*):

$$\delta(A) = (-1)^j \left[\overbrace{(-1)^k A_{kj} D_{kj}(A)}^{1.\text{ Term}} + \overbrace{(-1)^{2l-1-k} A_{kj} D_{kj}(A)}^{2.\text{ Term}} \right]$$

Aber $(-1)^k = -\left[(-1)^{2l-1-k} \right] = (-1)^{2(l-1)-k}$

Also kürzen sich 1. Term und 2. Term ab

und damit ist $\delta(A) = 0$ wie behauptet.

- n-linear? Hinweis:

$\left.\begin{array}{l} \text{üA} \\ \text{üB} \end{array}\right\}$ zeige: für i, j fixiert

ist $A_{ij} D_{ij}(A)$ eine n-lineare Funktion

in A. Eine lineare Kombination

von n-linearen ist n-linear.

Also is δ n-linear. ∎

- Lineare Algebra II -

- Kuhlmann -

10. Vorlesung
am 18. 05. 2012

Wir haben bewiesen: $n > 1$; A $n \times n$ über R, für jede j^{te} Spalte gilt:

$$\det(A) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det A[i|j]}\, A_{ij}$$

<u>Definition 1</u> $(-1)^{i+j} \det A[i|j]$ ist ij^{te} - <u>Kofaktor von A</u>

<u>Notation</u>: $C_{ij} := (-1)^{i+j} \det A[i|j]$.

Also $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} C_{ij}$.

1. Behauptung. $k \neq j \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ik} C_{ij} = 0$$

<u>Beweis</u> Ersetze die j^{te} Spalte von A durch ihre k^{te} Spalte und nenne die so erhaltene Matrix B.

Es gilt also: $B_{ij} = A_{ik}$ $\forall i$

B hat zwei gleiche Spalten also ist $\det(B) = 0$

Nun ist $B[i|j] = A[i|j]$

Also: $0 = \det(B) =$
$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} B_{ij} \det B[i|j]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ik} \det A[i|j]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} A_{ik} C_{ij}$$ $\boxtimes$ 1. Beh.

Diese Eigenschaften fassen wir zusammen:

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{n} A_{ik} C_{ij} = \delta_{jk} \det(A)$$

<u>Definition 2</u> Die $n \times n$ Matrix $\operatorname{adj}(A)$ ist die Transponierte der Matrix der Kofaktoren von A; d.h

$$(\operatorname{adj} A)_{ij} := C_{ji} = (-1)^{i+j} \det A[j|i]$$

$\operatorname{adj}(A)$ ist die <u>adjungierte Matrix</u> von A.

Die Formeln in $(*)$ kann man nun zusammenfassen:

$$(**) \quad (\operatorname{adj} A) A = \det(A) I_n.$$

2. Behauptung:

$$A(\operatorname{adj} A) = \det(A)\, I_n.$$

Beweis: Es ist: $A^T[i|j] = A[j|i]^T$

Also $(-1)^{i+j} \det A^T[i|j] =$

$(-1)^{i+j} \det A[j|i]$

(ijte Kofaktor von A^T = jite Kofaktor von A)

Also

(***) $\operatorname{adj}(A^T) = (\operatorname{adj} A)^T$

(**) impliziert für A^T:

$$(\operatorname{adj} A^T)\, A^T = (\det A^T)\, I_n = (\det A)\, I_n.$$

Also

$$A\,(\operatorname{adj} A^T)^T = (\det A)\, I_n$$

Zusammen mit (***) erhalten wir

$$A(\operatorname{adj} A) = (\det A)\, I_n \qquad \blacksquare \text{ 2. Beh.}$$

Es gilt also:

$$(\dagger)\begin{cases} A(\operatorname{adj} A) = (\det A)\, I_n \text{ und} \\ (\operatorname{adj} A)\; A = \det(A)\, I_n \end{cases}$$

Definition 3. $A \in M_{n\times n}(R)$ ist über R invertierbar falls es $B \in M_{n\times n}(R)$ gibt so daß $AB = BA = I_n$.

[Wenn B existiert dann ist B eindeutig; $B = A^{-1}$ wie für $R = K$ (Körper)].

Aus $(+)$ sehen wir: $\det(A)$ invertierbar in R (i.e. eine Einheit von R) $\Rightarrow$ A invertierbar über R und $A^{-1} = (\det A)^{-1} \operatorname{adj} A$.

Umgekehrt: A invertierbar $\Rightarrow AA^{-1} = I_n \Rightarrow$ $\det(AA^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1 \Rightarrow$ $\det(A)$ ist eine Einheit in R.

Wir haben bewiesen

Satz 1. $A \in M_{n\times n}(R)$ is invertierbar über R

gdw

$\det(A)$ ist eine Einheit in R.

Ist A invertierbar so ist $A^{-1} = \det(A)^{-1} \operatorname{adj}(A)$.

[Insbesonders $A \in M_{n\times n}(K)$ (K Körper) ist invertierbar gdw $\det(A) \neq 0$.]

Sonder Fall. $R = K[x]$

$f, g \in K[x]$; $fg = 1 \Rightarrow \deg f + \deg g = 0$

$\Rightarrow \deg f = \deg g = 0$.

Also sind die Einheiten von R die $\neq 0$ Skalarpolynome. A ist invertierbar gdw $\det(A) \in K^\times$. $\square$

<u>Bsp 1</u> $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\det(A) = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$

$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z})$

$\det(A) = -2$ A nicht invertierbar über $\mathbb{Z}$.

A ist aber invertierbar als Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$ und

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \boxtimes$$

<u>Bsp 2</u> $R = \mathbb{R}[x]$

$$A = \begin{pmatrix} x^2+x & x+1 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x^2-1 & x+2 \\ x^2-2x+3 & x \end{pmatrix}$$

$\det(A) = x+1$ $\qquad\qquad$ $\det B = -6$

A nicht invertierbar $\qquad\qquad$ B invertierbar.

<u>Lemma 2</u> Ähnliche Matrizen haben gleiche Determinante.

Beweis $\quad B = P^{-1} A P \qquad A, B \in M_{n\times n}(K)$

$$\det B = \det(P^{-1} A P) = \det(P)^{-1} \det(P) \det(A) = \det(A). \qquad \boxtimes$$

<u>Definition 4</u> $\dim(V) = n$, V K-VR
$T : V \to V$ lin. Operator. Definiere:

$$\det(T) := \det([T]_{\mathcal{B}})$$

für eine (jede) Basis $\mathcal{B}$ von V.

Cramer's Formel

Betrachte GS

$$A X = Y \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^{n \times 1}$$

Also

$$\underbrace{adj(A)\, A X} = adj(A)\, Y$$

Also

$$(\det A) X = adj(A)\, Y$$

also

$$(\det A)\, x_j = \sum_{i=1}^{n} (adj\, A)_{ji}\; y_i$$

also für $1 \le j \le n$ gilt:

$$(\det A)\, x_j = \sum (-1)^{i+j}\, y_i \det A[i/j]$$

Hier erkennen wir Determinante der Matrix die man erhält wenn man die j^{te} Spalte von A durch Y ersetzt.

Wenn $\det(A) \neq 0$ bekommen wir

Cramer's Regel

Sei $A \in M_{n \times n}(K)$, mit $\det(A) \neq 0$.

Sei $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in K^{n \times 1}$.

Dann ist die eindeutige Lösung

$X = A^{-1} Y$ so beschrieben:

$$x_j = \frac{\det B_j}{\det A}$$

Wobei B_j die $n \times n$ Matrix ist, die man erhält wenn man die j^{te} Spalte von A durch Y ersätzt. ∎

Lineaire Algebra II

Kuhlmann

11. Vorlesung

am 21.05.2012

§ Eigenwerte und Eigenvektoren.

Definition 1. (a) Sei V K-VR, $T \in \mathcal{L}(V,V)$, $c \in K$ ist ein Eigenwert von T falls $\exists\ \alpha \neq 0$; $\alpha \in V$ mit

$$T(\alpha) = c\alpha.$$

(b) Sei $\alpha \in V$ und $T(\alpha) = c\alpha$,

α heißt Eigenvektor (zur Eigenwert c).

(c) $W_c := \{\alpha \mid T(\alpha) = c\alpha\}$ ist ein Unterraum; der Eigenraum (zur Eigenwert c).

Bem 1: $W_c = \ker(T - cI)$ d.h

$$W_c = \{\alpha \mid T(\alpha) = c\alpha\} = \{\alpha \mid (T - cI)\alpha = 0\}.$$

c ist also Eigenwert gdw $(T - cI)$ singulär ist.

Satz 1. Sei V endlich dim., $T \in \mathcal{L}(V,V)$, $c \in K$.
Sind äquivalent:

(i) c ist Eigenwert von T.

(ii) $(T - cI)$ ist nicht invertierbar

(iii) $\det(T - cI) = 0$. ⊠

Bem 2 $\det(T - xI)$ ist ein Polynom vom Grad n (die Eigenwerte sind also genau dessen Nullstellen). Sei $\mathcal{B}$ eine Basis.

Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ $\quad A = [T]_{\mathcal{B}}$

Es ist: $A - xI = [T - xI]_{\mathcal{B}}$. Nun ist

$$B := xI - A = \begin{pmatrix} x-a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \\ & & \ddots \\ & & x-a_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit } b_{ii} = (x - a_{ii})$$

$$\det B = \sum_{\tau \in S_n} \underbrace{(\operatorname{sign}\tau)\, b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}}$$

Falls $\neq 0$ ist

$$\deg\left(b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)}\right) =$$

$$\left|\{i \in \{1,\dots,n\} \mid \tau(i) = i\}\right|$$

Also ist $\prod_{i=1}^{n} (x - a_{ii})$ der einziger Term (Hauptterm) von Grad n. Wir sehen also daß

$$\deg \left(\sum_{\tau} \operatorname{sign} \tau \; b_{1\tau(1)} \cdots b_{n\tau(n)} \right) = n$$

und außerdem daß

$\det(xI - A)$ ein normiertes Polynom ist. $\boxtimes$

<u>**Definition 2.**</u> $c \in K$ ist <u>Eigenwert</u> von $A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(K)$

falls $(cI - A)$ singulär ist.

Also sind die Eigenwerte von A die NS von

$\det(xI - A)$ wie oben.

<u>**Definition 3**</u> $f(x) := \det(xI - A)$ ist das

charakteristische Polynom von A.

<u>**Lemma 1.**</u> Ähnliche Matrizen haben das gleiche Char. Pol.

<u>**Bew:**</u> $B = P^{-1} A P \Rightarrow$

$$\det(xI - B) = \det(xI - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(xI - A)P)$$
$$= \det P^{-1} \det(xI - A) \det P = \det(xI - A). \boxtimes$$

Definition 4. Sei V endl. dim ; $T \in \mathcal{L}(V,V)$.

$\text{Char Pol}(T) := \text{Char Pol}([T]_{\mathcal{B}})$

für irgendeine Basis $\mathcal{B}$ von V

(und damit, für jede Basis).

Bemerkung und Beispiele.

T can also nicht mehr als $\dim(V)$ Eigenwerte in K.

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ in $\text{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ hat keine reelle Eigenwerte weil $\det(xI - A) = x^2+1$ keine reelle NS hat.

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$\text{Char Pol}(A) = \begin{vmatrix} x-3 & -1 & 1 \\ -2 & x-2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 =$$
$$(x-1)(x-2)^2$$

Eigenwerte $c = 1$ $\qquad$ $c = 2$ in $\mathbb{R}$.

$c = 1$. $\quad \ker(\cancel{A} - I) := W_1$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{hat rang} = 2$$

Also $\dim\big(\ker(A - I)\big) = 1$.

Wir wollen eine Basis für W_1 finden.

Löse $\quad (A - I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 = (1, 0, 2)$ ist eine Lösung

und $\{\alpha_1\}$ ist eine Basis für W_1.

$c = 2$ $\quad \ker(A - 2I) := W_2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{hat rang} = 2$$

Also $\dim W_2 = 1$. Wie oben finde Lösung:

$\alpha_2 = (1, 1, 2)$ und

$\{\alpha_2\}$ ist Basis für W_2

Lemma 2. Seien $v_i \neq 0$; $v_i \in V$;

v_i ist Eigenvekt zur Eigenwert c_i

für $i = 1, .., k$.

Falls $c_i \neq c_j$ für $i \neq j$ $i, j \in \{1, .., k\}$,

dann ist $\{v_1, \dots, v_k\}$ linear unabhängig.

Beweis. Bemerke daß $v \in V$, $v \neq 0$

$\Rightarrow$ v kann nicht Eigenvekt zu

verschiedenen Eigenwerten.

Wir führen einen Beweis per Induktion.

$k = 2$ Ist $v_2 = c v_1$ so ist

$v_2 \in W_{c_1}$ also v_2 ist Eigenvekt.

zu c_1 und $c_2 \neq c_1$. $\lightning$

Induktionsannahme gelte für $k-1$.

Seien $v_1, .., v_k$ linear abhängig.

OE haben wir also $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} v_i$

$$\left.\begin{aligned} T(v_k) &= c_k v_k = c_k \sum_{i=1}^{k-1} v_i \quad \text{und} \\ T(v_k) &= \sum_{i=1}^{k-1} T(v_i) = \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$c_k \sum_{i=1}^{k-1} v_i = \sum_{i=1}^{k-1} c_i v_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{k-1} (c_k - c_i) v_i = 0$$

$$\underset{IA}{\Longrightarrow} \underset{i=1,\dots,k-1}{c_k - c_i = 0} \Rightarrow \underset{i=1,\dots,k-1}{c_k = c_i} \quad \lightning \qquad \blacksquare$$

<u>Korollar</u> Seien $\dim V = n$ $T \in \mathcal{L}(V,V)$.

Nehme an daß T n verschiedene Eigenwerte $d_1, \dots, d_n$ in K hat. Dann hat V eine Basis $\mathcal{B}$ bestehend aus Eigenvektoren von T. $\blacksquare$

Definition 5. Seien $\dim V = n$, $T \in \mathcal{L}(V,V)$

T ist diagonalisierbar (über K) falls V eine Basis bestehend aus Eigenvektoren von T hat.

<u>Bemerkung</u>: Seien $d_1, \dots, d_n$ verschiedene Eigenwerte von T, und $\mathcal{B}$ eine Basis wie im Korollar. Dann ist $[T]_{\mathcal{B}}$ diagonal. $\blacksquare$

Lineare Algebra II

– Kuhlmann –

12. Vorlesung

Am 25. 05. 2012.

Bemerkung: (am Ende 11. Vorlesung) $\dim V = n$, $T \in \mathcal{L}(V, V)$

$d_1, \dots, d_n$ verschiedene Eigenwerte,
α_i Eingenvekt. zur Eigenw. d_i

Setze $\mathcal{D} := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$

Dann ist $\mathcal{D}$ eine Basis und

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$ diagonales Matrix.

Korollar 1. Sei $\dim V = n$, $T \in \mathcal{L}(V, V)$
$d_1, \dots, d_k$ verschiedene Eigenw.

$\forall i \in \{1, \dots, k\}$ sei $\mathcal{B}_i \subseteq W_{d_i}$; $\mathcal{B}_i$ lin. unabh..

Dann ist $\mathcal{B} := \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ auch lin. unabh.

Beweis. Sei $L := \{v_1, \dots, v_\ell\} \subseteq \mathcal{B}$. Betrachte eine l.K $\sum_{j=1}^{\ell} c_j v_j$.

Nun Setze $L_i := L \cap \mathcal{B}_i$

und Setze

$$(*) \quad \alpha_i := \sum_{v_j \in L_i} c_j v_j \qquad \text{falls } L_i \neq \emptyset$$

(und $\alpha_i := 0$ per konvention falls $L_i = \emptyset$).

Dann ist $\alpha_i \in W_{\lambda_i}$. Also ist

$0 = \sum_{j=1}^{\ell} c_j v_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$ nur möglich wenn

$\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k$

(da sonst wären die $\alpha_i \neq 0$ Eigenvekt. zur verschiedenen Eigenw. und gleichzeitig linear abhängig; widerspruch zur Lemma 2 der 11. Vorlesung!).

Nun sind die v_j in $(*)$ linear unabh also $c_j = 0 \quad \forall j$ wie behauptet. $\square$

Lemma 1. Sei $\dim V = n$; $T \in \mathcal{L}(V,V)$

$d_1, \ldots, d_k$ die verschiedene Eigenw. von T.

Es gilt: T ist diagonalisierbar $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} \dim W_{d_j} = n$.

Beweis. "$\Rightarrow$" Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von Eigenvekt.

$$\text{Setze } \mathcal{B}_j := \mathcal{B} \cap W_{d_j}.$$

Also ist $\mathcal{B} = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$.

Setze $l_j := |\mathcal{B}_j|$ also

$$n = |\mathcal{B}| = \sum_{j=1}^{k} l_j.$$

Beh: $l_j = \dim W_{d_j}$

Es ist klar daß $l_j \leq \dim W_{d_j}$.

Ist $l_i < \dim W_{d_i}$ dann $\exists \beta \in W_{d_i}$

mit $\mathcal{B}_i' := \mathcal{B}_i \cup \{\beta\}$ l. u.

Aber dann ist

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{\beta\} = \dot{\bigcup}_{j \neq i} \mathcal{B}_j \,\dot{\cup}\, \mathcal{B}_i'$$

l. u (Kor. 1) und $|\mathcal{B}'| = n+1$ ↯ (unmöglich)

"$\Leftarrow$" Sei $\sum_{j=1}^{k} \dim W_{d_j} = n$ und $\mathcal{B}_j$ eine

Basis für W_{d_j} für jedes $j = 1, \ldots, k$.

Setze $\mathcal{B} = \dot{\bigcup}_{j=1}^{k} \mathcal{B}_j$. Dann ist $\mathcal{B}$

linear unab (Kor 1) und $|\mathcal{B}| = \sum_{j=1}^{k} |\mathcal{B}_j|$

$= \sum_{j=1}^{k} \dim W_{d_j} = n$.

Also ist $\mathcal{B}$ eine Basis für V und

besteht aus Eigenvekt. von T.

Also ist T diagonalisierbar. $\square$

Sei nun $\dim V = n$

$T \in \mathcal{L}(V, V)$ diagonalisierbar,

$d_1, \ldots, d_k$ ~~die~~ verschiedene Eigenw.

$\mathcal{B}$ eine Basis bestehend aus Eigenvekt.

(und geordnet so daß die ersten Basisvekt. Eigenvekt zu d_1 sind, d_2, usw. ...).

Dann ist

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} \overbrace{d_1 \cdots d_1}^{l_1 \text{ Mal}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{d_k \cdots d_k}_{l_k \text{ Mal}} \end{pmatrix}$$

wobei

$$\boxed{\begin{array}{c} l_i := \dim W_{d_i} \\ \text{und damit ist Char. Pol}(T) = \prod_{i=1}^{k} (x-d_i)^{l_i} \end{array}} \quad (*)$$

Umgekehrt ist Char. Pol (T) wie in $(*)$

(mit $d_i \neq d_j$ für $i \neq j$ und $l_i = \dim W_{d_i}$)

dann ist T diagonalisierbar weil $\sum_{i=1}^{k} \dim W_{d_i} = n$ ist

(siehe Lemma 1).

Wir haben bewiesen:

Satz 1. Sei V endl. dim, $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gilt:

T ist diagonalisierbar gdw char Pol $(T) = \prod_{i=1}^{k} (x-d_i)^{l_i}$

wobei die Vielfachheit l_i der NS d_i

$\dim W_{d_i}$ ist. ∎

Bemerkung: $\dim W_d$ wird auch "geometrische Vielfachheit" der NS d genannt.

Im allgemeinen gilt:

Satz 2. Sei $\dim(V)$ endl, $T \in \mathcal{L}(V, V)$.

Sei d Eigenwert von T mit Vielfachheit μ.

Es gilt: $l := \dim(W_d) \leq \mu$

Beweis. Sei $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ Basis von W_d.

Ergänze zu einer Basis

$$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l, \alpha_{l+1}, \dots, \alpha_n\} \text{ von } V$$

Es ist

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} d & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d \end{matrix}}^{l \text{ Mal}} & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

Wir berechnen $\operatorname{charPol}(A)$:

$$\det(xI - A) = \det \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{matrix} x-d & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x-d \end{matrix}}^{l \text{ Mal}} & -B \\ \hline 0 & xI - C \end{array}\right)$$

$$= (x-d)^l \det(xI - C).$$

Also ist $l \leq \mu$. ∎

T in Beispiele (1) und (2) der 11. Vorlesung sind beide

<u>nicht</u> diagonalisierbar

<u>Beispiel (3):</u>

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

$\mathrm{Char\,Pol}(A) = (x-1)(x-2)^2$ (wie in Beispiel (2) !)

$d_1 = 1$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rang}(A-I) \neq 3$ weil $A-I$ singulär

Es ist klar daß $\mathrm{rang}(A-I) \geq 2$

also $\mathrm{rang}(A-I) = 2$

$d_2 = 2$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rang}(A-2I) = 1$

Also

$\dim W_{d_1} = 1$ $\quad\quad$ $\dim W_{d_2} = 2$

$\dim W_{d_1} + \dim W_{d_2} = 3$

Also T ist diagonalisierbar: $\exists\ \mathcal{D}$ Basis von $\mathbb{R}^3$ s.d.

$$[T]_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$$

$\square$

Linear Algebra II

Kuhlmann.

13. Vorlesung

Am 01. 06. 2012

§ Annihilator Ideal

Sei V K-VR und $T \in \mathcal{L}(V,V)$, $p \in K[x]$.

Proposition 1. Sei $\dim V = n$. Es gelten:

(1) $\mathcal{A}(T) := \{ p \in K[x] \mid p(T) = 0 \}$

is Ideal; (2) $\mathcal{A}(T) \neq \{0\}$.

Beweis (1) $(p+q)(T) = p(T) + q(T)$
$(pq)(T) = p(T)\,q(T)$. ∎

(2) Betrachte die Elemente
$I, T, T^2, \ldots, T^{n^2} \in \mathcal{L}(V,V)$

Da $\dim \mathcal{L}(V,V) = n^2$ sind diese Elemente notwendig linear abhängig.

Also $\exists\, c_0, \ldots, c_{n^2} \in K$ mit $c_0 I + c_1 T + \ldots + c_{n^2} T^{n^2} = 0$
c_i nicht alle gleich Null. ∎

Definition 1. Der (eindeutig bestimmte) normierte Erzeuger von $\mathcal{A}(T)$ ist das minimal Polynome von T. ($\text{Min Pol}(T)$).

Bem 1:

(i) $\deg(\text{Min Pol}(T)) \leq n^2$

wir werden aber eine bessere obere Schranke bekommen.

(ii) $p := \text{Min Pol}(T)$ ist ~~das~~ normierte Polynom vom kleinstem Grad in $\mathcal{A}(T)$.

Ist also Characterisiert durch:

(1) $p \in K[x]$ (2) $p(T) = 0$ (3) $\deg q < \deg p$ $\Rightarrow q(T) \neq 0$.

Definition 2. $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K)$.

$\text{Min Pol}(A)$ ist der normierte Erzeuger von $\mathcal{A}(A)$ (analog definiert).

Bem 2.

(1) Sei $\mathcal{B}$ eine Basis für V. Es gilt für $f \in K[x]$

$$[f(T)]_{\mathcal{B}} = f([T]_{\mathcal{B}}) \quad (\text{ÜB}).$$

Also $f(T) = 0 \Leftrightarrow f(A) = 0$ für $A = [T]_{\mathcal{B}}$

(2) Also habe ähnliche Matrizen

das gleiche Min Pol !

Satz 1. Sei $\dim V$ endlich, $T \in \mathcal{L}(V,V)$ (oder

$A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(K)$. Es gilt:

Char Pol (T) und Min Pol (T) habe dieselben

NS (bis auf Vielfachheit).

Beweis Sei $p :=$ Min Pol (T) $\quad c \in K$

Z.z: $p(c) = 0 \Leftrightarrow c$ Eig W. von T.

"$\Rightarrow$" $p(c) = 0 \Rightarrow p = (x - c)q$ $\quad \deg q < \deg p$

So $q(T) \neq 0$

Wähle $\beta \in V$ mit $\alpha := q(T)(\beta) \neq 0$

Es gilt

$$0 = p(T)(\beta) = (T - cI)\, q(T)(\beta)$$
$$= (T - cI)(\alpha).$$

Also $\alpha \neq 0$ ist EigVek. zum EigW. c.

"$\Leftarrow$" Umgekehrt sei

$$T(\alpha) = c\alpha \qquad \alpha \neq 0 \quad \alpha \in V$$
$$c \in K$$

Nun gilt also $p(T)(\alpha) = p(c)\,\alpha$ (ÜB)

Da aber $p(T) = 0$ und $\alpha \neq 0$ folgt $p(c) = 0$. ∎

<u>Proposition 1.</u> Sei T diagonalisierbar.

Dann zerfällt Min Pol (T) in verschiedene lineare Faktoren.

(Wir werden später Primäre Zerlegung anwenden um die Umkehrung dieser Aussage auch zu beweisen).

II – 01. 06. 2012

<u>**Beweis**</u> Sei T diag., $c_1, \dots, c_k \in K$ die verschiedene EigW., $p := \text{MinPol}(T)$

<u>**Bh:**</u> $p = (x - c_1) \dots (x - c_k)$; dies gilt weil

$$(T - c_1 I) \dots (T - c_k I)(\alpha) = 0$$

für jeder EigenV. α

(weil α ist EigV. zum EigW c_i für ein geeignetes i).

Da es eine Basis von EigV. gibt ist $p(T) = 0$ ∎

Nun berechnen wir MinPol für Beispiele (1), (2), (3) aus der 11. Vorlesung.

Wir bezeichnen $p := \text{MinPol}$.

(3) $p = (x-1)(x-2)$ weil

T diag. ~~abzuschätzen~~ (Prop 1 anwenden).

(2) T ist nicht diag. also können wir Prop 1. nicht anwenden, aber Satz 1. können wir anwenden.

Da $\text{Char Pol}(T) = (x-1)(x-2)^2$

hat p die NS 1 und 2

Wir probieren Polynome aus der Form

$$(x-1)^k (x-2)^l \qquad k \geq 1 \quad l \geq 1$$

("prüfen" ob sie T annihilieren).

$(x-1)(x-2)$:

$$(A-I)(A-2I) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$$

Also hat $\deg(p) \geq 3$

Nun probieren wir

$$(x-1)^2(x-2) \quad \text{oder} \quad (x-1)(x-2)^2 \checkmark$$

$$(A-I)(A-2I)^2 = 0$$

Also hier ist $\text{Char Pol}(T) = \text{Min Pol}(T)$. ∎

Der Satz von Cayley Hamilton wird uns helfen weniger "prüfen" zu müssen!

Lineare Algebra II.

- Kuhlmann -

14. Vorlesung.

Am 4. 6. 2012

Aussage Wiederholung vom 13. Vorlesung:
Satz von Cayley Hamilton.

Sei V endl. dim und $T \in \mathcal{L}(V,V)$,

$f :=$ Char. Pol (T). Es gilt $f(T) = 0$,

d.h das Min Pol(T) teilt f.

Beweis Seien $K :=$ die Algebra der Polyn. in T.

und $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ Basis für V.

$$A := [T]_{\mathcal{B}} \quad \text{d.h}$$

$$T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\, \alpha_j \qquad \forall \; 1 \le i \le n$$

Wir schreiben diese Gleichungen um als

$$(1) \quad \sum_{j=}^{n} (\delta_{ij} T - A_{ji} I)\, \alpha_j = 0 \qquad \forall \; 1 \le i \le n$$

Sei B die $n \times n$ Matrix mit Koeff.

in der Algebra $\mathbb{K}$ definiert durch

$$B_{ij} := \delta_{ij} T - A_{ji} I$$

Beobachtung: $\det B = f(T)$

weil $\quad f(x) = \underbrace{\det(xI - A)}$

und die Einträge der Matrix

$$(xI - A)_{ij} = \delta_{ij} x - A_{ji}$$

Also $(xI - A)_{ij}(T) = \delta_{ij} T - A_{ji} I = B_{ij}$,

und somit gilt

$$f(T) = \left[\det(xI - A)\right](T) =$$

$$\det\left[(xI-A)(T)\right] = \det B.$$

Wir wollen zeigen $f(T) = 0$, also zeigen wir

$$(\det B)(\alpha_k) = 0 \qquad \forall\, k = 1, .., n.$$

Nun per Definition gelten für B_{ij} und α_j:

$$(2) \quad \sum_{j=1}^{n} B_{ij}(\alpha_j) = 0 \qquad 1 \leq i \leq n$$

Setze $\tilde{B} := \operatorname{adj}' B$

Aus (2) folgt: $\begin{cases} \forall k \\ \forall i \end{cases}; \; \tilde{B}_{ki} \left(\sum_{j=1}^{n} B_{ij} \alpha_j \right) = 0$

$$= \sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki} B_{ij} \alpha_j,$$ ~~w~~ wir summieren

über i und bekommen:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \tilde{B}_{ki} B_{ij} \alpha_j =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{ki} B_{ij} \right)}_{kj^{\text{te}} \text{ Koeff. von } \tilde{B}B} (\alpha_j).$$

Nun ist $\tilde{B}B = (\det B)\, I$, also

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{ki} B_{ij} = \delta_{ij} \det B,$$

also

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj} (\det B)(\alpha_j).$$

$$= (\det B)(\alpha_k) \qquad \blacksquare$$

Wichtige Bemerkung.

Sei $F_0 \subseteq F_1$ eine Körpererweiterung (e.g. $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$)

$A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(F_0) \subseteq \mathrm{Mat}_{n \times n}(F_1)$.

Wir bezeichnen mit

$\mathrm{Char\,Pol}_{F_0}(A)$ und $\mathrm{Min\,Pol}_{F_0}(A)$

beziehungsweise

$\mathrm{Char\,Pol}_{F_1}(A)$ und $\mathrm{Min\,Pol}_{F_1}(A)$

die Charakt. beziehungsweise Minimalpol von A jeweils als Element aus $\mathrm{Mat}_{n \times n}(F_0)$ und $\mathrm{Mat}_{n \times n}(F_1)$.

Wir wollen zeigen, daß

(1) $\mathrm{Char\,Pol}_{F_0}(A) = \mathrm{Char\,Pol}_{F_1}(A)$

und

(2) $\mathrm{Min\,Pol}_{F_0}(A) = \mathrm{Min\,Pol}_{F_1}(A)$.

<u>Beweis</u>: (1) ist einfach weil $\det(B)$ nur vom Koeffitienten der Matrix B abhängen.

(i) wir untersuchen zunächst die folgende Frage:

(2) Wie entscheiden wir, für gegebenen Köper K und natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, ob es ein Polynom $p \in K[x]$ gibt mit $\deg(p) = k$ und $p(A) = 0$ ist?

Wir Lösen einen Matrixgleichung System

$$A^k + x_{k-1} A^{k-1} + \dots + x_0 I = 0 . \quad (*)$$

(*) ist also ein Linearesgleichungssystem mit n^2 Gleichungen in der Variablen $x_0, \dots, x_{k-1}$. Jede Lösung $a_0, \dots, a_{k-1} \in K$ gibt und ein Polynom

$$p(x) := x^k + \sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j \quad \text{mit}$$

$$p(x) \in \mathcal{A}(A) .$$

Wenn wir (*) (für die kleinste natürliche Zahl k wofür es eine Lösung gibt) gelöst haben, dann ist die Lösung $a_0, \dots, a_{k-1}$ eindeutig weil sie die eindeutig definierte

Koeffizienten

$1, a_{k-1}, \ldots, a_0$

von $\mathrm{MinPol}_K(A)$ uns liefert.

Wir folgern:

Sei k minimal so daß (*) eine Lösungs in K hat, dann liefert diese Lösung das $\mathrm{MinPol}(A)$. ▫

Nun untersuchen wir Lösungen für LGS:

(ii) Sei $B \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(F_0)$ $\quad F_0 \subseteq F_1$ Körpererw.

$Y \in F_0^{m \times 1}$

Betrachte $BX = Y$ (S)

Hat (S) eine Lösung in $F_1^{n \times 1}$

dann hat (S) auch eine Lösung in $F_0^{n \times 1}$. (und umgekehrt natürlich!)

<u>Beweis</u> Dies gilt weil die rZSF$(B|Y)$ (bzgl F_1) uns alles liefert bzgl Existenz von Lösungen.

Nun ist aber die rZSF eindeutig!

Also ist sie gleich bezgl F_0 ∎

Aus (i) und (ii) sehen wir daß ⊛

eine Lösung $(a_0, \dots, a_{k-1}) \in F_1^k$ gdw es

eine Lösungs $\in F_0^k$ hat.

Die eindeutigkeit des Min Pol$_{F_1}$ liefert

außerdem daß die Lösung in F_0^k

$(a_0, \dots, a_{k-1})$ sein muss ! ∎

§ Trigonalisierbarkeit, Invariante Unterraüme.

__Definition 1.__ $T \in \mathcal{L}(V,V)$ ist trigonalisierbar

falls es eine Basis $\mathcal{B}$ für V gibt so daß

$[T]_{\mathcal{B}}$ eine __obere Dreiecksmatrix__

(i.e $a_{ij} = 0$ für $i > j$).

Satz 2. V endl dim, $T \in \mathcal{L}(V,V)$.

Es gilt: T is trigon. $\Leftrightarrow$ Char Pol(T) in linear Faktoren

über K ~~Z~~ zerfällt (i.e Char Pol$(T) = (x-c_1)^{n_1} \dots (x-c_k)^{n_k}$

mit $c_i \in K$).

Beweis. "$\Rightarrow$" Klar weil $[T]_{\mathcal{B}} = A$

ist Oberedreieck also $\det(xI - A)$ ist

product $\prod_{i=1}^{n}(x - a_{ii})$.

"$\Leftarrow$" Wir werden per Induktion eine Basis

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ aufbauen, in der $[T]_{\mathcal{B}}$ Oberedreieck ist.

Da T wenigstens einen EigW hat, hat T

auch einen EigV zum EigW $c_1 \in K$.

Sei $\alpha \neq 0$ solch ein EigV und ergänze zu einer

~~zu einer~~ Basis $\{\alpha, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ für V.

(geordnet so daß α der erste Vektor

davon ist).

Betrachte die Matrix Darstellung von T

diesbezüglich:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) \quad \Gamma \in \mathrm{Mat}_{(n-1)\times(n-1)}(K)$$

Sei $G \in \mathcal{L}(W,W)$ wobei $W := \operatorname{Span}\{\beta_2, \dots, \beta_n\}$

definiert durch $Gw := \Gamma w$.

Wir sehen also $\operatorname{Char Pol}(T) = (x - c_1) \operatorname{Char Pol}(G)$

Da $\operatorname{Char Pol}(T)$ Produkt von linear

Faktoren ist, so ist auch $\operatorname{Char Pol}(G)$.

Die IA liefert eine Basis $\{\alpha_2, \dots, \alpha_n\}$

bezgl. der G eine Oberedreieckmatrix

Darstellung hat:

$$\left(\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline & * & & * \\ & & \ddots & \\ & 0 & & * \end{array}\right)$$

Setze $\alpha_1 := \alpha$ und

Setze $\mathcal{B} := \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

Lineare Algebra II.

Kuhlmann.

15. Vorlesung

Am 08.06.2012

§ Invariante Unterräume

<u>Definition</u> $W \subseteq V$ Unterraum, $T \in \mathcal{L}(V,V)$
W ist <u>T-invariant</u> falls
$T(W) \subseteq W$.

<u>Beispiele</u>: (0) $\{0\}$ und V sind T-invariant.

(1) D Ableitung Operator auf $V = K[x]$
W Unterraum der Poly. von $\deg \leq n$
is T-invariant.

(2) Sei $U \in \mathcal{L}(V,V)$ mit $TU = UT$, dann ist

(i) $W := \mathrm{Im}(U)$ (ii) $N := \mathrm{Ker}(U)$

sind T-invariant

Bew. (i) Sei $\alpha \in \mathrm{Im}\, U$, $\alpha = U(\beta)$; $T(\alpha) = T(U(\beta)) = U(T(\beta)) \in \mathrm{Im}\, U$

(ii) $\alpha \in N$; $U(T(\alpha)) = T(U(\alpha)) = T(0) = 0$
$\Rightarrow T(\alpha) \in N$

(ÜA)(3) $W \subseteq V$ T-invariant $\Rightarrow W$ $g(T)$ invariant für $g \in K[x]$.

(4) für $g \in K[x]$ gilt $g(T)\,T = T\,g(T)$,
$U := g(T)$

Insbesonders für $U := cI - T$; also ist

$\ker(T - cI)$ T-invariant;

Eigenraum zum Eigenwert c ist T-invariant.

(5) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Wir behaupten: nur $\{0\}$ und $V = \mathbb{R}^2$ sind

T invariant (für $T = T_A$).

Sei $\underbrace{W \neq V, \quad W \neq \{0\}}$ T-invariant,

es gelte aber dann das
$\dim W = 1$

Sei $\alpha \neq 0$; $\alpha \in W$; $\{\alpha\}$ ist eine Basis

und damit ein Eigenvektor. A hat aber

keine reelle Eigenwerte. $\blacksquare$

Der Operator $T|_W := T_W$

Sei W T-invariant; dann ist $T_W \in \mathcal{L}(W, W)$.

Matrix Darstellung von T_W:

Sei V endl. dim, $W \subseteq V$ T-invariant
$\dim W = r$.

$\mathcal{B}' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ Basis für W

ergänze zu

$\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ Basis für V

Betrachte $A := [T]_{\mathcal{B}}$; wir haben die Gleichungen

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} \alpha_i$$

W T-inv $\Rightarrow$ $T\alpha_j \in W$ für $j \leq r$

Also $T(\alpha_j) = \sum_{i=1}^{r} A_{ij} \alpha_i$ für $j \leq r$

d.h. $A_{ij} = 0$ für $j \leq r$
und $i > r$

Also sieht A so aus

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

wobei B $r \times r$
C $r \times (n-r)$
D $(n-r) \times (n-r)$
sind.

Es ist darüberhinaus klar, daß $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$.

Lemma 1. Sei V K-VR, $\dim V < \infty$

$T \in \mathcal{L}(V,V)$, $W \subseteq V$ T-invariant; also $T_W \in \mathcal{L}(W,W)$

Es gelten:

(i) Char Pol T_W teilt Char Pol T

(ii) Min Pol T_W teilt Min Pol T.

Beweis: (i) ist klar weil

$$A = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [T_W]_{\mathcal{B}'} & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$$ und somit ist

$\det(xI - A) = \det(xI - B) \det(xI - D)$.

(ii) Beachte daß

$$A^k = \begin{bmatrix} B^k & C_k \\ 0 & D^k \end{bmatrix}$$ wobei C_k ist $r \times (n-r)$.

Also jedes Polynom das A annihiliert, annihiliert auch damit B.

Also Min Pol (B) teilt Min Pol (A). ∎

Wir werden in der nächsten Vorlesung die Matrix D genauer untersuchen.

Lineare Algebra II

- Kuhlmann -

16. Vorlesung

am 15. 06. 2012

Erinnerung (Quotientenraum) und direkte Summen.
aus LA I:

1. Sei $W \subseteq V$ Unterraum.

$$V/W = \{\alpha + W \mid \alpha \in V\}$$ mit $c(\alpha + W) = c\alpha + W$ für $c \in K$ und

$$(c\alpha + W) + (\beta + W) = (c\alpha + \beta) + W$$ für $\alpha, \beta \in V$.

Bezeichnung: $\alpha + W := \bar{\alpha}$

2. Kanonischer Homomorphismus

$$\pi : V \twoheadrightarrow V/W$$

$$\pi(\alpha) := \alpha + W$$

ist surjektiv ~~mit~~ $\mathrm{Ker}\, \pi = W$

3. Isomorphiesatz:

Sei $\varphi : V \to U$ Homomorphismus von K-VR

Es gilt $V/_{\mathrm{Ker}\,\varphi} \cong \mathrm{Im}\, \varphi$.

4. $W_1, W_2 \subseteq V$ Unterräume,

$V = W_1 \oplus W_2$ (direkte Summe)

falls

$V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

D.h: $\forall \alpha \in V \quad \exists!\, w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$

so daß $\alpha = w_1 + w_2$.

Projektion Homomorphismus:

$\pi : W_1 \oplus W_2 \twoheadrightarrow W_2$

$\pi(w_1 + w_2) := w_2$

ist surjektiv mit $\ker \pi = W_1$.

Also gilt

$$\frac{W_1 \oplus W_2}{W_1} \simeq W_2.$$

5. Die Abbildung

$\bar{T} : V/_W \longrightarrow V/W$ $\Big\}$ für T-$W \subseteq V$ invariant und wobei $T \in \mathcal{L}(V, V)$

wird so definiert:

$$\overline{T}(\overline{\alpha}) = \overline{T}(\alpha + W) := T(\alpha) + W = \overline{T(\alpha)}$$

Sie ist wohldefiniert i.e

$$\alpha_1 + W = \alpha_2 + W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W$$

weil $\alpha_1 - \alpha_2 \in W \Rightarrow T(\alpha_1 - \alpha_2) \in W$

$\Rightarrow T(\alpha_1) - T(\alpha_2) \in W \Rightarrow T(\alpha_1) + W = T(\alpha_2) + W.$

Sie ist auch linear (ÜA)

also $\overline{T} \in \mathcal{L}(V/W, V/W)$. ■

Satz. Sei V endl. dim, $W \subseteq V$,

$T \in \mathcal{L}(V, V)$ und W T-invariant.

Sei $\mathcal{B}'$ eine Basis für W, ergänze

zu einer Basis $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \,\dot\cup\, \mathcal{B}''$ von V.

Es gilt:

$$A := [T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$ wobei $B = [T_W]_{\mathcal{B}'}$

und $D = [\overline{T}]_{\overline{\mathcal{B}''}}$

$\left(\overline{\mathcal{B}''} := \{\overline{\alpha} \,;\, \alpha \in \mathcal{B}''\}\right).$

Wir brauchen ein Lemma: Sei V endl. dim,

(1) Sei $W \subseteq V$ Unterraum;

$\mathcal{B}' \subseteq W$ Basis für W; $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ ergänz. Basis für V,

dann ist $\overline{\mathcal{B}''}$ eine Basis für V/W.

(2) Umgekehrt sei $\{\overline{\alpha_{r+1}}, \dots, \overline{\alpha_n}\}$

eine Basis für V/W;

dann ist

$\mathcal{B}' \cup \{\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$ Basis für V.

$\boxed{\text{ÜA – ÜB.}}$ $\blacksquare$

Beweis vom Satz. setze $r := \dim W$; B ist $r \times r$.
Also ist $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n\}$.

- Die Aussage über B ist bereits in der 15. Vorlesung bewiesen worden.

- Wir analysieren die $(n-r) \times (n-r)$ Matrix D.

Die Matrix $A = [T]_{\mathcal{B}}$ ist durch die folgende Gleichungen definiert:

$$(*) \quad T(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji}\, \alpha_j' \qquad 1 \le i \le n$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \underset{r \times r}{B} & [T(\alpha_{r+1})]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\alpha_n)]_{\mathcal{B}} \\ \hline & & & \end{array}\right)$$

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_r}_{|\mathcal{B}'| = r}, \underbrace{\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n}_{|\mathcal{B}''| = (n-r)}\}$$

$$\overline{\mathcal{B}''} = \underbrace{\{\overline{\alpha_{r+1}}, \ldots, \overline{\alpha_n}\}}_{|\overline{\mathcal{B}''}| = n-r}$$

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} & A_{1\,r+1} & & A_{1n} \\ B & \vdots & & \vdots \\ & A_{r(r+1)} & & A_{rn} \\ \hline & A_{(r+1)(r+1)} & \cdots & A_{(r+1)n} \\ & \vdots & & \vdots \\ & A_{n(r+1)} & & A_{nn} \end{array}\right)$$

oder

$$(**) \quad T(\alpha_i) = \underbrace{\sum_{j=1}^{r} A_{ji}\, \alpha_j}_{\in W} + \sum_{j=r+1}^{n} A_{ji}\, \alpha_j \qquad \text{und damit}$$

$1 \le i \le n$

ist:

$$\overline{T(\alpha_i)} = \sum_{j=r+1}^{n} A_{ji}\, \overline{\alpha_j} = \overline{T}(\overline{\alpha_i}) \quad \text{für } r+1 \le i \le n \qquad \blacksquare$$

Korollar 1 Char Pol T = (Char Pol T_W)(Char Pol $\overline{T}$) ∎

(Für Mini Pol T siehe ÜB 8 Aufgabe 8.2) ∎

Korollar 2 T ist trigonalisierbar gdw Char Pol zerfällt über K in Produkt von linearen Faktoren.

Bem: Wir haben schon diese Tatsache bewiesen, hier geben wir kurz einen zweiten Beweis (mit T_W und $\overline{T}$).

Beweis. "$\Rightarrow$" wie in 1. Beweis

"$\Leftarrow$" Per Induktion (nach $\dim V$) [Wir wollen eine Basis $\mathcal{B}$ für V so daß die Matrix Darst. von T Dreieck.]

I. Anfang: $n = 1$ ist trivial

I. Annahme: gilt für $n-1$.

Sei c_1 ein Eigenwert von T und $\alpha_1 \neq 0$ ein Eigenvektor dazu

Setze $W := \{c\alpha_1 ;\ c \in K\}$. Es ist klar daß

W ist T-invariant.

Betrachte V/W und $\overline{T} \in \mathcal{L}(V/W, V/W)$

Nun ist $\dim V/W = (n-1)$.

Wir haben

$$(+) \quad \text{Char Pol } T = (\text{Char Pol } T_W)(\text{Char Pol } \overline{T}).$$

$T_W \in \mathcal{L}(W, W)$, und $T_W(\alpha) = c_1 \alpha \qquad \forall \alpha \in W$

$\left(\begin{array}{l} \text{weil } T(\alpha) = T(c\alpha_1) = cT(\alpha_1) = c\,c_1\alpha_1 = c_1\,c\alpha_1 \\ \alpha = c\alpha_1 \end{array} \right)$

Also ist $A_W := [T_W]_{\{\alpha_1\}} = [c_1]$ und

$\det(xI - A_W) = \det(x.1 - c_1) = (x - c_1)$.

Also mit $(+)$ bekommen wir

$\text{Char Pol } T = (x - c_1)\ \text{Char Pol } \overline{T}$

Wir sehen also daß auch Char Pol $\overline{T}$ ein Produkt von linearen Faktoren über K zerfällt. Die I. Annahme liefert nun eine Basis $\overline{\beta}_2, \ldots, \overline{\beta}_n$ von V/W wofür die Matrix Darstellung von $\overline{T}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Setze $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$. ∎

Nun betrachten wir diese Aussage für

Min Pol (T).

<u>**Korollar 3**</u> : sei V endl dim, $T \in \mathcal{L}(V,V)$.

T ist trigonalisierbar gdw Min Pol (T)

ein Produkt von linearen Faktoren über K

zerfällt.

Beweis: Wir zeigen: Char Pol (T) zerfällt in Produkt von linearen Faktoren über K

gdw

Min Pol (T) zerfällt in Produkt von lineare Faktoren über K.

"$\Rightarrow$" Min Pol (T) teilt Char Pol (T). Da lineäre Faktoren irreduzible sind folgt es aus der Eindeutigkeit der Primfaktorisierung in $K[x]$ daß auch Min Pol (T) Produkt von lin. Faktoren ist.

"$\Leftarrow$" Sei Min Pol $(T) = \prod_{i=1}^{k} (x - c_i)^{\nu_i}$

Min Pol (T) teilt Char Pol (T) und beide Polynome haben dieselben NS in K (und in jeder

Körpererweiterung).

Also $\text{Char Pol}(T) = \text{Min Pol}(T)\ q(x)$

$q(x) \in K[x]_i$ nun ist $q(x)$ reduzible

in einer alg. abg. Körpererweiterung $\mathbb{C} \supseteq K$

und zerfällt in Produkt

$$q(x) = \prod_{j=1}^{\ell} (x - d_j) \quad \text{über } \mathbb{C}.$$

Wir behaupten daß d_j bereits in K

liegen und $d_j = c_i$ für geeignetes i.

Dies gilt weil d_j sonst eine NS

von $\text{Min Pol}(T)$ wäre mit $d_j \in \mathbb{C} \setminus K$

(i.e $d_j \in \mathbb{C}$ aber $d_j \notin K$).

Dies ist aber unmöglich da

$\text{Min Pol}(T)$ bereits alle seine NS

in K hat. $\boxtimes$

- Lineare Algebra II -

- Kuhlmann -

17. Vorlesung.

Am 18. 06. 2012.

---

§ Direkte Summen.

Lemma Sei V K-VR, $W_1, \dots, W_k$ Unterräume.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

üA – üB.

(i) $W_1, \dots, W_k$ sind unabhängig, d.h

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0 \ (\text{mit } \alpha_i \in W_i, \ 1 \leq i \leq k) \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i.$$

(ii) $W_j \cap (W_1 + \dots + W_{j-1}) = \{0\}$

für $2 \leq j \leq k$

(iii) Ist $\mathcal{B}_i$ Basis für W_i so ist

$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ Basis für V.

Notation: Wir schreiben $V = W_1 + \dots + W_k$ wenn V nur die Summe der W_i's ist und $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ falls

$V = W_1 + \dots + W_k$ und eine der äquivalente

Bedingungen (i), (ii) oder (iii) gilt.

Im dem Fall heißt V die <u>direkte Summe</u>

der W_i's.

<u>Satz (Primzerlegung von V bezgl T).</u>

Sei V K-VR, $\dim V < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V, V)$

$\text{Min Pol}(T) = p = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$

(wobei p_i verschiedene normierte irreduzible in $K[x]$ Polynome und $r_i \in \mathbb{N}$)

die Primfaktorisierung in $K[x]$ von p.

Setze $W_i := \ker p_i(T)^{r_i}$ $1 \le i \le k$.

Es gilt: W_i sind T-invariant (siehe 15. Vorlesung)

und (i) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$

(ii) $\text{Min Pol}(T|_{W_i}) = p_i^{r_i}$ für $1 \le i \le k$.

Wir beweisen den Fall $k = 2$ (der allgemeiner Fall folgt per Induktion nach k).

__Proposition__: Sei $\dim V < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V,V)$

$\mathrm{MinPol}(T) = m = m_1 m_2$ mit $ggT(m_1, m_2) = 1$.

Setze $V_i := \ker m_i(T)$ $\quad i = 1, 2$

Es gilt $V = V_1 \oplus V_2$ und $\mathrm{MinPol}(T/V_i) = m_i$ $\quad i = 1, 2$.

__Beweis__. Da m_1, m_2 relativprim sind,

$\exists\, q_1, q_2 \in k[x]$ mit

$$1 = m_1 q_1 + m_2 q_2$$

also $\quad I = m_1(T)\, q_1(T) + m_2(T)\, q_2(T) \quad (*)$.

__Beh.__ $V_1 = \mathrm{Im}\, m_2(T)$ und $V_2 = \mathrm{Im}\, m_1(T)$.

__Bew__ $\underset{\substack{\uparrow \\ m \text{ MinPol}}}{0 =} m(T) = m_1(T)\, m_2(T)$ also $\mathrm{Im}\, m_2(T) \subseteq \ker m_1(T)$.

Umgekehrt sei $v \in \ker m_1(T)$, mit $(*)$ gilt

$$v = \underbrace{q_1(T)\, m_1(T)(v)}_{\doteq\, 0} + \underbrace{m_2(T)\, \overline{q_2(T)(v)}}_{\in\, \mathrm{Im}\, m_2(T)} \qquad \square$$

Wir zeigen $V = V_1 \oplus V_2$

1. Summe: $v \in V_1$ mit (*) gelt

$$v = \underbrace{m_1(T) q_1(T) v}_{\in \operatorname{Im} m_1(T)} + \underbrace{m_2(T) q_2(T) v}_{\in \operatorname{Im} m_2(T)}.$$

2 Direkt: sei $v \in V_1 \cap V_2$, mit (*) gelt

$$v = \underbrace{q_1(T) m_1(T)(v)}_{=0 \text{ weil } v \in V_1} + \underbrace{q_2(T) m_2(T)(v)}_{=0 \text{ weil } v \in V_2}. \blacksquare$$

Sei nun $\tilde{m}_i = \text{Min Pol } T\big|_{V_i}$ $\quad i = 1, 2$

Da $V_i = \ker m_i(T)$ ist es klar daß

$$m_i(T|_{V_i}) = 0 \qquad i = 1, 2$$

also $\tilde{m}_1 \mid m_1$ und (**)
$\tilde{m}_2 \mid m_2$

<u>Beh.</u> $\tilde{m}_1 \tilde{m}_2$ annihiliert T.
<u>Bew.</u> Berechne
$$\tilde{m}_1(T)\tilde{m}_2(T)(v_2 + v_1) = \tilde{m}_1(T)\left[\tilde{m}_2(T)(v_2) + \tilde{m}_2(T)(v_1)\right]$$
$v_2 \in V_2,\ v_1 \in V_1$

$= \tilde{m}_1(T)\left(0 + \underbrace{\tilde{m}_2(T)(v_1)}\right)$

$\in V_1$ weil V_1 $\tilde{m}_2(T)$-invariant ist, siehe 15. Vor.

$= 0.$ $\square$

Da $\tilde{m}_2 \tilde{m}_1$ annihiliert T folgt

$$m_1 m_2 = m \mid \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 . \quad (***)$$

Da m_1, m_2 relativprim folgt nun aus $(**)$ und $(***)$ daß $\tilde{m}_i = m_i \quad i = 1, 2.$ $\square$

Sonderfall: p_i ist linear und

$$p = (x - c_1) \dots (x - c_k)$$

mit $c_i \neq c_j$ für $1 \leq i \neq j \leq k$

Hier ist $W_i = \ker(T - c_i I)$ = Eigenraum zum Eigenwert c_i.

So Primzerlegungsatz besagt:

$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, also hat V eine Basis aus Eigenvektoren, und damit ist T diagonalisierbar.

Wir haben damit die Umkehrung (von Prop 1. B. Vor. 01. 06. 2012) nun gezeigt. Wir haben also bewiesen:

Satz (Diag. Kriterium für Min Pol).

T ist diag $\Leftrightarrow$ Min Pol(T) zerfällt in verschiedenen lineare Faktoren über $K[x]$.

---

§ Jordan Ketten

Definition: Sei $T: V \to V$ linear, c EigW; $v_1 \neq 0$, $v_2, \dots, v_r \in V$.

$(v_1, \dots, v_r)$ heißt Jordan Kette wenn

$$(T - cI)(v_1) = 0 \qquad (v_1 \text{ EigV zum } c)$$

und

$$(T - cI)(v_i) = v_{i-1} \qquad i = 2, \dots, r.$$

üA üB

Lemma: Sei $(v_1, \dots, v_r)$ J.K. Es gelten für $W = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$:

(i) $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_r\}$ ist eine Basis für W,

(ii) W ist T-invariant und

(iii) $$[T_W]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & c \end{pmatrix} \leftarrow \text{Jordan Zelle}$$

Lineare Algebra II

Kuhlmann

18. Vorlesung

Am 22. 06. 2012.

---

1. V K-VR, $T \in \mathcal{L}(V,V)$, $c \in K$ EigW, $l \in \mathbb{N}$; $v_i \in V$:
$(v_1, \dots, v_l)$ ist eine J. K. der Länge l
zum EigW. c falls

$$(T - cI)\, v_i = v_{i-1} \qquad i = 2, \dots, l$$
$$(T - cI)\, v_1 = 0 \qquad \text{und } v_1 \neq 0.$$

2. $(v_1, \dots, v_l)$ J.K $\Rightarrow$ $\underbrace{\{v_1, \dots, v_l\}}_{:= \mathcal{B}'}$ lin. unab.

$W = \operatorname{span}\{v_1, \dots, v_l\}$ ist T-invariant und

$\boxed{\text{üB \#9}}$

$$[T|W]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} c & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & c \end{pmatrix} \leftarrow J_l(c) :=$$

$l \times l$

Jordanzelle der Dimension l zum EigW c.

3. $\underbrace{W \subseteq V,\ W' \subseteq V}_{\text{Unterraum}}$; W' ist Komplement von W in V

falls
$$V = W \oplus W'$$

Bem: (i) Komplemente existieren und sind i.a. nicht eindeutig.

(ii) Sei $W \subseteq V$ Unterraum

$v_1^1, \ldots, v_s^1 \in V$ lin. unab sodaß

ÜB #9

$\mathrm{span}\{v_1^1, \ldots, v_s^1\} \cap W = \{0\}$.

Dann kann man $\{v_1^1, \ldots, v_s^1\}$ zu einer Basis von Komplement von W in V ergänzen.

Satz (Jordan Normal Form)

Sei V K-VR, $\dim V < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V,V)$, sei

$\mathrm{Min\,Pol}(T) = (x-c)^r \quad c \in K$.

Dann hat V eine Basis aus J.K zum EigW c. Die längste Ketten haben Länge r, die Anzahl der Ketten in jeder Länge ist eindeutig bestimmt.

Beweis Beh. seien $v^1, \ldots, v^s \in \ker(T-cI)^j$

lin. unab und

$$\operatorname{span}\{v^1, \dots, v^s\} \cap \ker (T - cI)^{j-1} = \{0\}$$

then

$$w^1 := (T - cI) v^1, \dots, w^s := (T - cI) v^s \in$$

$\ker (T - cI)^{j-1}$, sind l. unab und

$$\operatorname{span}\{w^1, \dots, w^s\} \cap \ker (T - cI)^{j-2} = \{0\}.$$

Bew der Beh.

$$0 = (T - cI)^j v^i = (T - cI)^{j-1} \underbrace{(T - cI) v^i}_{w^i}$$

Also $w^i \in \ker (T - cI)^{j-1}$. ✓

Sei nun $\sum_{i=1}^{s} c_i w^i = 0$ so $\sum_{i=1}^{s} c_i (T - cI) v^i = 0$

$c_i \neq 0$ für ein i

so $(T - cI) \sum_{i=1}^{s} c_i v^i = 0$.

Also $\sum_{i=1}^{s} c_i v^i \in \ker (T - cI)^{j-1}$ weil

$$(T - cI)^{j-1} \left(\sum c_i v^i\right) = (T - cI)^{j-2} \underbrace{(T - cI)\left(\sum c_i v^i\right)}_{0} = 0$$

Also ist

$$\sum_{i=1}^{s} c_i v^i \in \text{Span}\{v^1, \dots, v^s\} \cap \ker(T - cI)^{j-1}$$

Also ist $\sum_{i=1}^{s} c_i v_i = 0$ with $c_i \neq 0$ für ein i

↯ da $\{v_1, \dots, v_s\}$ lin. unab.

Betrachte nun $\sum c_i w^i$ so daß

$(T - cI)^{j-2}(\sum c_i w^i) = 0$ dann ist

$(T - cI)^{j-1}(\sum c_i v^i) = 0$ so

$\sum c_i v^i = 0$ so $(T - cI)(\sum c_i v^i) = 0$

also $\sum c_i (T - cI) v^i = 0 = \sum c_i w^i$ ∎ Beh

Wir bauen nun J. K folgendermassen.

(Beachte daß $\ker(T - cI) \subseteq \dots \subseteq \ker(T - cI)^r = V$)

Betrachte

$$V = V_r \oplus \ker(T - cI)^{r-1}$$

$n_r = \dim \ker(\ )^r - \dim \ker(\ )^{r-1}$

sei $\{v_r^1, \dots, v_r^{n_r}\}$ Basis für V_r.

Setze $v_{r-1}^1 := (T-cI)v_r^1, \dots, v_{r-1}^{n_r} := (T-cI)v_r^{n_r}$

$\in \ker(T-cI)^{r-1}$

Betrachte nun

$\ker(T-cI)^{r-1} = V_{r-1} \oplus \ker(T-cI)^{r-2}$

ergänze zu einer Basis von Komplement von $\ker(T-cI)^{r-2}$ in $\ker(T-cI)^{r-1}$:

$\{v_{r-1}^1, \dots, v_{r-1}^{n_r}, v_{r-1}^{n_r+1}, \dots, v_{r-1}^{n_r+n_{r-1}}\}$

Also $n_{r-1} =$ $\dim\ker(\ )^{r-1} - \dim\ker(\ )^{r-2} - n_r$.

Wir verfahren so weiter, im letztem Schritt bekommen wir

$v_1^1 = (T-cI)v_2^1, \dots, v_1^{n_r+\dots+n_2} = (T-cI)v_2^{n_r+\dots+n_2}$

welches wir zu eine Basis von $\ker(T-cI)$ ergänzen:

$v_1^1, \dots, v_1^{n_r+\dots+n_2}, v_1^{n_r+\dots+n_2+1}, \dots, v_1^{n_r+\dots+n_2+n_1}$

Hier ist die Gestalt der Gesammt Basis für V die wir erhalten:

$$
\begin{array}{l|l|l}
v_r^1, \dots, v_r^{n_r} & & \\
v_{r-1}^1, \dots, v_{r-1}^{n_r}, & v_{r-1}^{n_r+1}, \dots, v_{r-1}^{n_r+n_{r-1}} & \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
v_1^1, \dots, v_1^{n_r}, & v_1^{n_r+1}, \dots, v_1^{n_r+n_{r-1}}, & \dots, v_1^{n_r+\dots+n_2+1}, \dots, v_1^{n_r+\dots+n_2+n_1} \\
\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{} & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{} & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{} \\
n_r \text{ J. K der Länge } r & n_{r-1} \text{ J. K der Länge } r-1, \dots, & n_1 \text{ J. K der Länge } 1.
\end{array}
$$

$\blacksquare$

<u>Bemerkung</u>: Die Matrix Darstellung in der Basis der J. K ist:

$$
A_c := \begin{pmatrix}
\underbrace{J_r(c) \quad \ddots \quad J_r(c)}_{n_r \text{ mal}} & & 0 \\
& \ddots & \\
0 & & \underbrace{J_1(c) \quad \ddots \quad J_1(c)}_{n_1 \text{ mal}}
\end{pmatrix}
$$

<u>Korollar:</u> Sei V K-VR, $\dim V < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V,V)$.
Falls
Min Pol(T) (oder Char Pol(T)) zerfällt über K,
dann hat V eine Basis von J. K zu den
verschiedenen EigW. Die Anzahl der J. K
in jeder Länge ist eindeutig bestimmt.

<u>Beweis:</u>

$$\text{Min Pol}(T) = (x-c_1)^{r_1} \cdots (x-c_k)^{r_k} \; ;$$

Prim Zerlegung satz $\Rightarrow$

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

mit W_i invariant und

$$\text{Min Pol } T|_{W_i} = (x-c_i)^{r_i}$$

Jordan NF liefert Basen $\mathcal{B}_{c_i}$

von J. K für $T|W_i$ und jeden c_i.

Setze $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{c_i}$ (die geordnete Basis). ∎

<u>Bemerkung:</u> ÜA ÜB #9

Sei $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$, W_i T-inv.

$\mathcal{B}_i$ = Basis für W_i ; $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_{c_i}$ (die geord. Basis)

Es gilt

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

wobei $A_i = [T/W_i]_{\mathcal{B}_i}$.

<u>Korollar</u>: Sei K alg. abg, V K-VR $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V so daß

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_{c_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{c_k} \end{pmatrix}$$

wobei $c_1, \dots, c_k$ die EigW von T sind und A_{c_i} wie in S. 6 beschrieben. ∎

Lineare Algebra II

Kuhlmann

19. Vorlesung.

Am 25.06.2012.

Sei $K = \mathbb{R}$, oder $\mathbb{C}$. V K-VR mit $(x|y) \in K$.

Bemerkung: $(x|x) = \overline{(x|x)}$, also ist $(x|x) \in \mathbb{R}$.

Erinnerung:

Definition: Ein inneres Produkt auf V ist eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow K$$
$$(x,y) \longmapsto (x|y)$$

so daß

(1) $(x|y) = \overline{(y|x)}$

(2) $(c_1 x_1 + c_2 x_2 | y) = c_1 (x_1|y) + c_2 (x_2|y)$

(3) $(x|x) \geq 0$ und $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Notation:

$(x|x) := \|x\|^2$ und $\|x\| := \sqrt{(x|x)}$ (Norm von x).

Bem: (i) Es gilt

$$\|cx\| = |c|\,\|x\|.$$

(ii) (2') $(x | c_1 y_1 + c_2 y_2) = \overline{(c_1 y_1 + c_2 y_2 | x)} =$

$\overline{c_1 (y_1|x) + c_2 (y_2|x)} = \bar{c}_1 \overline{(y_1|x)} + \bar{c}_2 \overline{(y_2|x)} =$

$\bar{c}_1 (x | y_1) + \bar{c}_2 (x | y_2)$.

Terminologie:

$K = \mathbb{R}$ } V heißt Euklischerraum und das innere Produkt $(\,|\,)$ } heißt symmetrisch bilineare positive definite Form.

$K = \mathbb{C}$ V heißt {Hermitescherraum / Unitärerraum} und das innere Produkt $(\,|\,)$ ist Hermitesch symmetrisch (1) konjugiert bilinear (2) und (2') positive definite Form (3)

Beispiel auf $V = K^n$ Das Standard Inneres Produkt

$x = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \bar{\eta}_i$$

Definition

(i) x, y sind orthogonal falls $(x|y) = 0$

(äquivalent $(y|x) = 0$).

(ii) $W_1, W_2 \subseteq V$ sind orthogonal falls

$$(x|y) = 0 \quad \forall x \in W_1, \ \forall y \in W_2$$

(iii) $S \subseteq V$ ist <u>orthonormal</u> falls

$$(x|y) = 0 \quad \text{wenn} \quad x \neq y$$
$$(x|y) = 1 \quad \text{wenn} \quad x = y.$$

Also $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ ist orthon. falls

$$(x_i | x_j) = \delta_{ij}$$

(iv) S orthonormal ist <u>vollständig</u> falls

S maximal (bezüglich Inklusion) mit der

Eigenschaft "orthonormal" ist.

<u>Bem.</u> (i) S orthon. $\Rightarrow$ S l. u.

Bew. $\sum c_i x_i = 0 \Rightarrow 0 = \left(\sum c_i x_i \,|\, x_j \right) = \sum c_i (x_i | x_j) = c_j$.

(ii) ~~Dim~~ $V = n \Rightarrow |S| \leq n$ für S orthon.

Im diesem Fall:

<u>Definition</u> orthog. Dim $(V) = \max \{ |S| \mid S \text{ orthon.} \}$.

<u>Bem.</u> orthog Dim $(V) \leq$ Dim (V).

<u>Notation</u>. $S^\perp := \{ x \in V \mid (x|s) = 0 \quad \forall s \in S \}$

<u>Bem.</u> (i) $S^\perp$ ist Unterraum: Seien $x_1, x_2 \in S^\perp$, $c \in K$

<u>Bew.</u> $0 = (0|y) \Rightarrow \{0\} \subseteq S^\perp$; $(x_1 + c x_2 | s) = (x_1 | s) + c (x_2 | s)$
$= 0 + 0 = 0$.

(iii) $S \subseteq (S^{\perp})^{\perp} := S^{\perp\perp}$

(iv) $\mathrm{Span}(S) \subseteq S^{\perp\perp}$

Definition : $W \subseteq V$ unterraum
$W^{\perp} :=$ orth. Komplement.

Satz 1 (Bessel's ungleichung)

Sei $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ orthon., $x \in V$.

Setze $c_i := (x | x_i)$. Es gelten

(i) $\sum_i |c_i|^2 \leq \|x\|^2$

(ii) $x' := x - \sum c_i x_i$

ist orthogonal zu x_j $(j = 1, \dots, n)$.

Bew: $0 \leq (x' | x') = \left(x - \sum c_i x_i \,\middle|\, x - \sum c_i x_i\right) =$

$(x|x) - \sum_i c_i (x_i | x) - \sum_i \overline{c_i} (x | x_i)$

$+ \sum_{i,j} c_i \overline{c_j} (x_i | x_j) =$

$\|x\|^2 - \sum_i c_i \overline{c_i} - \sum_i \overline{c_i} c_i + \sum_i c_i \overline{c_i}$

$= \|x\|^2 - \sum_i |c_i|^2$. Damit ist (i) bewiesen.

$$(x' \mid x_j) = (x \mid x_j) - \sum_i c_i (x_i \mid x_j) = c_j - c_j = 0$$

damit ist (ii) bewiesen ∎

Satz 2 (Char. von Vollständigkeit).

Sei $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ orthon. Folgende sind äquivalent:

(i) S ist vollständig

(ii) Aus $(x \mid x_i) = 0$ $\forall\, i = 1, \dots, n$ folgt $x = 0$

(iii) $\operatorname{span} S = V$

(iv) $\forall x \in V: \quad x = \sum_i (x \mid x_i) x_i$

(v) $\forall x, y \in V: (x \mid y) = \sum_i (x \mid x_i)(x_i \mid y)$

(vi) $\forall x \in V: \quad \|x\|^2 = \sum_i |(x \mid x_i)|^2$

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $x \neq 0$ setze $x_{n+1} := \dfrac{x}{\|x\|}$

Dann ist $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ orthon.

$$\left[(x_{n+1} \mid x_i) = 0 \text{ und } (x_{n+1} \mid x_{n+1}) = \frac{1}{\|x\|^2} (x \mid x) = 1 \right].$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Sei $x \in V$, $x \notin \operatorname{span} S$ dann ist $x' = x - \sum (x \mid x_i) x_i \neq 0$ und (Satz 1) ist zu jedem x_i orthogonal. Widerspruch

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sei $x \in V$ $\quad x = \sum c_i x_i$ also

$$(x | x_j) = \sum c_i (x_i | x_j) = c_j .$$

(iv) $\Rightarrow$ (v)

$$\left(\sum_i (x | x_i) x_i \,\middle|\, \sum_j (y | x_j) x_j \right) =$$

$$\sum_{i,j} (x | x_i) \overline{(y | x_j)} (x_i | x_j) = \sum_i (x | x_i)(x_i | y)$$

(v) $\Rightarrow$ (vi) $\quad (x | x) = \sum_i (x | x_i)(x_i | x)$

$$= \sum_i (x | x_i) \overline{(x | x_i)}$$

$$= \sum_i |(x | x_i)|^2$$

(vi) $\Rightarrow$ (i) Sei $x \notin S$ $\quad$ wenn $S \cup \{x\}$ orthon. dann

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x | x_i)|^2 = 0 = (x | x) \neq 1$$

Widerspruch. $\blacksquare$

<u>**Satz 3**</u> (Schwarz)

$$|(x | y)| \leq \|x\| \, \|y\|$$

<u>Bew</u>: $y = 0$ ✓. Sei $y \neq 0$; $y_1 := \frac{y}{\|y\|}$

ist orthonormal und Bessel impliziert

$$|(x|y_1)|^2 \leq \|x\|^2$$

also $\frac{1}{\|y\|^2} |(x|y)|^2 \leq \|x\|^2$

$$\Rightarrow \quad |(x|y)|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 \quad . \qquad \boxtimes$$

Definition: $\delta(x,y) := \|x-y\|$

Proposition 1.

(i) $\delta(x,y) = \delta(y,x)$

(ii) $\delta(x,y) \geq 0$; $\delta(x,y) = 0 \iff x = y$

(iii) $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$ $\quad \Delta$ Ungl.

(iv) $\delta(x,y) = \delta(x+z, y+z)$.

Beweis: In der 20. Vorlesung. $\boxtimes$

Ein Inneres Produkt definiert also auch eine Norm:

Bem und Definition $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, V K-VR

$$V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$x \longmapsto \|x\|$$

ist eine **Norm** falls

(i) $x = 0 \iff \|x\| = 0$ (ii) $\|cx\| = |c|\,\|x\|$ (iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. $\boxtimes$

Lineare Algebra II

Kuhlmann

20. Vorlesung

Am 29. 06. 2012

Beweis (iii) (Dreiecksungleichung für Norm und Distanz).

$\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = \|x\|^2 + (x/y) + (y/x) + \|y\|^2$

$= \|x\|^2 + (x/y) + \overline{(x/y)} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,Re(x/y) + \|y\|^2$

$\leq \|x\|^2 + 2\,|(x/y)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$

Schwarz

$= (\|x\| + \|y\|)^2.$ ▪

Satz (Gram-Schmidt).

Sei V n-dim Inneres Produkt K-VR.

Dann hat V eine Basis bestehend aus

eine orthonormale (vollständige) Menge.

Definition. Sei S eine Basis, S orthonormal,

S heißt orthonormale Basis.

Beweis. Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis.

Wir werden eine orthonormale Basis

$$\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_n\} \quad \text{per Induktion.}$$

I.Anf: $x_1 \neq 0$ setze $y_1 := x_1 / \|x_1\|$.

I.A: seien $y_1, \dots, y_r$ schon definiert so daß $\{y_1, \dots, y_r\}$ orthonormal und $y_j \in \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_j\}$ für $j = 1, \dots, r$.

I.S. Betrachte

$$(*) \qquad Z := x_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} c_i y_i \qquad c_i \in K$$

Berechne:

$$(Z \mid y_j) = (x_{r+1} \mid y_j) - c_j \quad \text{für } j = 1, \dots, r.$$

Nun setze $c_j := (x_{r+1} \mid y_j)$. Mit dieser Wahl in $(*)$

$$(Z / y_j) = 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, r \quad \text{und}$$

$$Z \in \operatorname{Span}\{x_{r+1}, y_1, \dots, y_r\} \subseteq \operatorname{span}\{x_{r+1}, x_1, \dots, x_r\},$$

$Z \neq 0$ das $x_1, \dots, x_{r+1}$ l. u und der Koeffizient ein ⊛ of x_{r+1} ist nicht Null.

Nun setze $y_{r+1} := z / \|z\|$ ∎

Satz 2. Sei W Unterraum, es gilt

(1) $V = W \oplus W^\perp$

(2) $W^{\perp\perp} = W$

Beweis. Sei $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ eine orthonormale Basis für W und $z \in V$. schreibe

$$W \ni x := \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \quad \text{where } c_i = (z/x_i)$$

Bessel liefert: $y := z - x$ ist orthogonal zu x_i und damit zu W; d.h $y \in W^\perp$.

also $z = x + y \qquad x \in W, \ y \in W^\perp$.

Es gilt ferner daß $W \cap W^\perp = \{0\}$

(weil $(x/x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$).

(2) $z = x + y$ also $(z/x) = \|x\|^2 + (y/x) = \|x\|^2$

Analog $(z|y) = \|y\|^2$.

Wenn $z \in W^{\perp\perp}$ dann $(z|y) = 0 = \|y\|^2$

so $z = x \in W$. $\blacksquare$

§ Lineare Funktionale

Satz 3 (Riesz-Darstellung).

Sei V endl. dim Inneres Produkt K-VR.

Sei $f \in V^*$; $\exists!\, y \in V$ mit

$$(+) \quad f(x) = (x|y) \quad \forall x \in V.$$

Beweis. $\exists^z$: $f = 0 \Rightarrow y = 0$ ✓.

Sei $f \neq 0$; $W := \ker(f) \subsetneq V$

$$W^\perp \neq \{0\}.$$

Sei $y_0 \neq 0$ $y_0 \in W^\perp$; OE $\|y_0\| = 1$.

Setze $y := \overline{f(y_0)}\, y_0$

Beobachte:
$(y_0|y) = (y_0 | \overline{f(y_0)}\, y_0) = f(y_0)(y_0|y_0) = f(y_0)$

So $(+)$ ist ~~er~~füllt.

$x = \lambda y_0 \Rightarrow$

$$f(\lambda y_0) = \lambda f(y_0) = \lambda (y_0 | y) = (\lambda y_0 | y) \checkmark$$

$x \in W \Rightarrow$

$$(x | y) = (x | \overline{f(y_0)}\, y_0) = f(y_0)(x | y_0) = 0 = f(x) \checkmark$$

Sei nun $x \in V$ schreibe

$$x = x_0 + \lambda y_0 \quad \text{mit } \lambda := \frac{f(x)}{f(y_0)} \text{ und } x_0 := x - \lambda y_0$$

Berechne $f(x_0) = f(x) - \dfrac{f(x)}{f(y_0)} f(y_0) = 0$ so $x_0 \in W$,

und $f(x) = f(x_0) + f(\lambda y_0) = (x_0 | y) + (\lambda y_0 | y)$

$$= (x_0 + \lambda y_0 | y) = (x | y).$$

Eindeutigkeit. Seien $y_1, y_2 \in V$ mit

$(x | y_1) = (x | y_2) \quad \forall x \in V$. Dann

$(x | y_1 - y_2) = 0 \quad \forall x \in V$ insbesondere

für $x := (y_1 - y_2)$ bekommen wir

$\| y_1 - y_2 \|^2 = 0$ so $y_1 - y_2 = 0$. $\blacksquare$

Satz 4. Die Abbildung

$$\rho : V^* \longrightarrow V$$

$$f \longmapsto y$$

erfüllt

(i) $\rho(f_1 + f_2) = \rho(f_1) + \rho(f_2)$

(ii) ρ ist surjektiv

(iii) ρ ist injektiv

aber

(iv) $\rho(cf) = \bar{c}\rho(f) \qquad \forall c \in K.$

i.e ρ ist konjugierter Isomorphismus.

Beweis.

(ii) $y \in V$ betrachte $f(x) := (x \mid y)$.

$f \in V^*$ und $\rho(f) = y$.

(iii) $\underset{\forall x}{f(x) = (x \mid 0) = 0} \implies f = 0.$

(iv) $z := \rho(cf) \quad y := \rho(f)$. Zeige: $z = \bar{c}\, y$

i.e $\forall x \in V$:

$(Cf)(x) = (x \mid z)$.

Berechne: $(cf)(x) = cf(x) = c(x \mid y) = (x \mid \bar{c}y)$. ∎

Folgerungen.

I. $(f_1 \mid f_2) := (\rho(f_2) \mid \rho(f_1))$

definiert ein Inneres Produkt auf V^*.

II. Sei $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ Basis für V

$\exists\ Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ Basis für V mit

$$(x_i \mid y_j) = \delta_{ij}.$$

III. $W^0 \subseteq V^*$ wird ersetzt durch $W^\perp \subseteq V$.

IV. Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Definiere T^* durch

$$(Tx \mid y) := (x \mid T^* y) \quad \forall x \in V$$

[d.h. $T^*(y) = z$ gdw

$$\forall x \in V : (x \mid z) = (Tx \mid y).]$$

Es gilt $T^* \in \mathcal{L}(V,V)$.

T^* ist die $\left\{\begin{array}{l}\text{transponierte (adjungierte)} \\ \text{konjugierte}\end{array}\right.$.

Eigenschaften der Transponierte ~~k~~ konjugierte:

(1) $(cT)^* = \bar{c}\, T^*$

(2) sei $[T]_\chi := A$ und

$\mathcal{Y}$ die Basis wie in II.

Es gilt

$$[T^*]_{\mathcal{Y}} = \overline{A^t} := A^*$$

[i.e die ij^{te} Koeffiziente von A^*

sind $\overline{a_{ji}}$ wobei a_{ij} der ij^{te}

Koeffizient von A ist.]

(3) $\det A^* = \overline{\det A}$

(4) Die Eigenwerte von A^* sind

die konjugierte der Eigenwerte von A. $\blacksquare$

Folgerungen I. II. III. IV. werden

im ÜB # 11 ausarbeitet. $\blacksquare$

Lineare Algebra II.

\- Kuhlmann -

21. Vorlesung

Am 2. 7. 2012.

---

§ Beziehung zum Bidual

Erinnerung.

Prop 1. 24. Vorlesung am 27.01.2012 S. 4

$$y_0 \in V \longmapsto L_{y_0} \in V^{**}$$

$$L_{y_0}(f) := f(y_0) \qquad \forall f \in V^*$$

und

Satz 1. 24. Vorlesung am 27.01.2012 S. 5

$$\begin{aligned} \lambda : V &\longrightarrow V^{**} \\ y_0 &\longmapsto L_{y_0} \end{aligned}$$

ist ein (kanonischer) Isomorphismus.

Vergleiche mit:

$$\begin{aligned} \delta : V &\longrightarrow V^* \\ y_0 &\longmapsto y_0^* \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} \gamma : V^* &\longrightarrow V^{**} \\ y_0^* &\longmapsto y_0^{**} \end{aligned}$$

$$y_0^*(x) := (x \mid y_0) \quad \forall x \in V \qquad y_0^{**}(y^*) = (y^* \mid y_0^*) \quad \forall y^* \in V^*$$

Also $\quad \lambda : V \longrightarrow V^{**}$

$\qquad\qquad y_0 \longmapsto L_{y_0}$

mit $\quad L_{y_0}(y^*) := y^*(y_0) \quad$ für $y^* \in V^* \qquad (*)$

einerseits und

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\delta"] \arrow[rr, bend right, "\gamma \circ \delta"'] & V^* \arrow[r, "\gamma"] & V^{**} \end{tikzcd}$$

$$y_0 \longmapsto y_0^{**}$$

andenseits.

Behauptung: $L_{y_0} = y_0^{**}$

Es genügt z.z. daß y_0^{**} $(*)$ erfüllt.

Wir berechnen:

$$y_0^{**}(y^*) = (y^* \mid y_0^*) = (y_0 \mid y) = y^*(y_0) \quad . \quad \blacksquare$$

---

§ Hermite'sche Operatoren.

Definition (i) $T \in \mathcal{L}(V, V)$ ist Hermite'sch (oder Selbstadjungiert) falls $T = T^*$ i.e $(Tx \mid y) = (x \mid Ty)$ $\forall\, x, y \in V$

2 2. 1. 2012

(ii) $K = \mathbb{R}$ $T = T^*$, T heißt auch

reell symmetrisch.

(iii) $K = \mathbb{C}$ $T = T^*$ heißt auch

Komplex Hermite'sch.

Matrizen Darstellung von Hermite'sche Operatoren.

Sei $\mathcal{X}$ orthon. Basis, ~~also~~ $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$

($\mathcal{X}$ ist selbst-dual, siehe ÜB # 11).

Also $T = T^*$ impliziert A ist Hermite'sch, wobei

$$A := [T]_{\mathcal{X}} = [T^*]_{\mathcal{Y}} = [T^*]_{\mathcal{X}} = \overline{A^t} := A^*$$

Das heißt $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, und im reellem Fall (A ist komplex Hermite'sch)

$a_{ij} = a_{ji}$ i.e $A = A^t$ (A ist symmetrisch).

Bemerkungen. (ÜA) $\left\{ \begin{array}{l} \text{weitere} \\ \text{Eigenschaften von Hermite'sche Oper.} \end{array} \right\}$

(i) Umgekehrt sei A Hermite'sch und $\mathcal{X}$ orth.

Basis für V; $\mathcal{X} = \{x_1, .., x_n\}$.

Definiere $T\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right) := A \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$.

Dann ist T Hermite'sch.

(ii) T_1, T_2 Hermite'sch $\Rightarrow T_1 + T_2$ Hermite'sch.

(iii) $T \neq 0$ Hermite'sch, $d \in K$, $d \neq 0$,

dann ist dT Hermite'sch gdw $d \in \mathbb{R}$.

(iv) T invertierbar, und Hermite'sch

gdw T^{-1} Hermite'sch.

Satz 1. Seien T_1, T_2 Hermite'sch.

Es gilt: $T_1 T_2$ ist Hermite'sch gdw

$$T_1 T_2 = T_2 T_1.$$

Beweis. $T_1 T_2 = T_2 T_1 \Leftrightarrow (T_1 T_2)^* = (T_2 T_1)^*$

$$\Leftrightarrow T_2^* T_1^* = T_1^* T_2^* \Leftrightarrow T_2 T_1 = T_1 T_2. \quad \square$$

Satz 2. (i) Sei T_1 Hermite'sch, dann ist $T_2^* T_1 T_2$ Hermite'sch.

(ii) Umgekehrt ist $T_2^* T_1 T_2$ Hermite'sch und T_2 invertierbar, dann ist T_1 Hermite'sch.

Beweis (i) $(T_2^* \, T_1 \, T_2)^* = T_2^* \, T_1^* \, T_2^{**} = T_2^* \, T_1 \, T_2$.

(ii) $T_2^* \, T_1 \, T_2 = (T_2^* \, T_1 \, T_2)^* = T_2^* \, T_1^* \, T_2$

Multiplizieren links mit $(T_2^*)^{-1}$ und rechts mit T_2^{-1}

ergibt $\quad T_1 = T_1^*$. ∎

Definition. $T \in \mathcal{L}(V, V)$ ist schief-Hermite'sch

falls $T^* = -T$. [wenn $K = \mathbb{C}$

heißt es "komplex schief-Hermite'sch",

und wenn $K = \mathbb{R}$ heißt es "schief-Symmetrisch".]

---

§ Cartesische Zerlegung eines Operators.

Sei $T \in \mathcal{L}(V, V)$ schreibe $T = T_1 + T_2$ wobei

$$\left.\begin{aligned} T_1 &:= \frac{T + T^*}{2} \quad \text{und} \\ T_2 &:= \frac{T - T^*}{2} \end{aligned}\right\} \begin{array}{c} \text{Berechne:} \\ T_1^* = T_1 \\ \text{und} \\ T_2^* = -T_2 \end{array}$$

Also T_1 ist Hermite'sch und
T_2 ist schief-Hermite'sch.

Ferner T_2 schief-Hermite'sch und $K = \mathbb{C} \Leftrightarrow T_2 = iT_3$ mit
T_3 komplex Hermite'sch. Also $T = T_1 + iT_3$. ∎

Lineare Algebra II.

– Kuhlmann –

22. Vorlesung.

Am 06.07.2012

Unser Ansatz ist weiterhin: V endl. dim. Inneres Produkt Raum

Satz 1. Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$ Hermite'sch.
Es gelten: $(Tx \mid x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in V$
und alle Eigenwerte von T sind reell.

Beweis: $(Tx \mid x) = (x \mid T(x)) = \overline{(Tx \mid x)}$

Sei nun $Tx = cx$ mit $x \neq 0$, dann ist

$$\underbrace{(Tx \mid x)}_{\in \mathbb{R}} = (cx \mid x) = c \underbrace{\|x\|^2}_{\in \mathbb{R}}$$

also $c \in \mathbb{R}$. ∎

Erinnerung: T^* ist definiert durch $(Tx \mid y) = (x \mid T^*y)$ oder
$(x \mid Ty) = (T^*x \mid y)$. ∎

§ Isometrie.

Definition: Sei $U \in \mathcal{L}(V,V)$ so daß

$$U^* = U^{-1},$$ dann heißt U eine Isometrie.

Wenn $K = \mathbb{R}$ und $U^t = U^{-1}$ heißt U orthogonal
Wenn $K = \mathbb{C}$ und $U^* = U^{-1}$ heißt U unitär.

Satz 2. $U \in \mathcal{L}(V,V)$. Sind äquivalent

(1) $U^* U = U U^* = I_d$

(2) $(Ux \mid Uy) = (x \mid y) \quad \forall x, y$ [U erhält $(\,|\,)$]

(3) $\|Ux\| = \|x\| \quad \forall x$ [U erhält die Norm]

Beweis (1) $\Rightarrow$ (2):

$$(Ux \mid Uy) = (x \mid U^* U y) = (x \mid y). \quad \forall x, y \in V.$$

(2) $\Rightarrow$ (3): (2) anwenden mit $x = y$.

(3) $\Rightarrow$ (1) $\quad (Ux \mid Ux) = (U^* U x \mid x) = (x \mid x)$

also $\quad \left([U^* U - Id]\, x \mid x \right) = 0 \quad \forall x \in V.$

Nun ist aber $T := U^* U - Id$ Hermite'sch

und $(Tx \mid x) = 0$ $\forall x$ impliziert $T = 0$

(dazu siehe ÜB # 12) ∎

Bemerkungen.

(i) (3) impliziert U erhält Distanz:

$$(4) \quad \|Ux - Uy\| = \|x - y\| \quad \forall x, y \in V$$

(ii) Isometrien sind invertierbar und erhalten das Innere Produkt also $\mathcal{U} : (V, (\,|\,)) \xrightarrow{\sim} (V, (\,|\,))$

ist eine <u>Automorphismus</u> des Inn. Produkt

Vektorraum $(V, (\,|\,))$. ∎

<u>Satz 3</u>. Eigenwerte von Isometrien haben absolut Betrag gleich 1.

<u>Beweis</u>. Sei $\mathcal{U}x = cx \qquad x \neq 0 \qquad c \in \mathbb{C}$.

Es ist : $\|\mathcal{U}x\| = \|x\|$ und $\|\mathcal{U}x\| = \|cx\| = |c|\,\|x\|$

also $\|c\| = 1$. ∎

§ <u>Orthonormal Basis Wechseln</u>.

<u>Satz 4</u>. Sei $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ orthonormal Basis

und $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(V, V)$ eine Isometrie.

Dann ist $\mathcal{U}\mathcal{X} := \{\mathcal{U}x_1, \ldots, \mathcal{U}x_n\}$ eine Orth. Basis.

Umgekehrt ist $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(V, V)$
$\mathcal{X}$ orth. Basis so daß
$\mathcal{U}\mathcal{X}$ wieder orth. Basis ist,

dann ist $\mathcal{U}$ eine Isometrie.

Beweis: "$\Rightarrow$" $(Ux_i \mid Ux_j) = (x_i \mid x_j) = \delta_{ij}$

also $U\mathcal{X}$ orth. und $U\mathcal{X}$ ist eine Basis

weil U invertierbar ist.

"$\Leftarrow$" Sei $U\mathcal{X}$ orth. Es gelt also

$$(Ux_i \mid Ux_j) = \delta_{ij} = (x_i \mid x_j) \quad \forall\, 1 \leq i, j \leq n$$

und damit durch linearität gelt

$$(Ux \mid xy) = (x \mid y) \quad \forall\, x, y \in V. \qquad \boxed{}$$

Matrix Version.

Definition $A \in M_{n \times n}(K)$ ist orthogonal ($K = \mathbb{R}$)

oder Unitär ($K = \mathbb{C}$) falls $AA^* = A^*A = I_n$.

Bemerkungen.

(i) U Isometrie und $\mathcal{X}$ orthon. Basis implizieren

$$A := [U]_{\mathcal{X}} \text{ ist unitär (bzhw. orthogonal).}$$

(üA) (üB 12)

(ii) Matrix Version von Satz 4:

Sei $\mathcal{X}$ orthonormal Basis und $\mathcal{B}'$ eine beliebige Basis

Dann ist $\mathcal{B}'$ orthonormal gdw die Basiswechsel matrix unitär ist. ÜA ÜB # 12. $\boxed{}$

§ Spektral Theorie.

Sei wie immer $\dim V < \infty$.

Bisher haben wir 3 wichtige Klassen von Operatoren studiert

(a) Hermite'sche (b) schief Hermite'sche (c) Unitäre

$T^* = T$ $\quad$ $T^* = -T$ $\quad$ $T^* = T^{-1}$

Alle erfüllen die folgende Eigenschaft.

<u>Definition</u>. $T \in \mathcal{L}(V,V)$ ist normal falls

$$T^* T = T T^*.$$

Wir werden die Struktur von normalen Operatoren genau untersuchen. Wir brauchen

<u>Lemma 1.</u> Sei $T \in \mathcal{L}(V,V)$, $W \subseteq V$ T-invariant, dann ist $W^\perp \subseteq V$ T^*-invariant.

<u>Beweis.</u> Sei $u \in W^\perp$, $w \in W$ und berechne

$(w \mid T^* u) = (Tw \mid u) = 0 \quad \forall w \in W$

also ist W $W^\perp$

$T^* u \in W^\perp$, ∎

Wir wollen unser Hauptsatz beweisen:

Satz (Spektralsatz für normale Operatoren).

Sei $\dim V < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V, V)$ normal.

$p := \text{Min Pol}(T)$. Es gilt

$$p = p_1 \cdots p_k$$

wobei $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ und p_i normiert und irreduzible ist (d.h $\deg p_i = 1$ oder $\deg p_i = 2$).

Setze $W_i := \ker p_i(T)$, $W_i \subseteq V$ ist T-invariant.

Dann ist: W_i orthogonal zu W_j für $i \neq j$ und

$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ (orthogonale direkte Summe).

Wir brauchen noch ein Lemma.

Lineare Algebra II.

- Kuhlmann -

23. Vorlesung.

Am 09.07.2012

Erinnerung. Lemma 1 06.07.2012:

$W \subseteq V$ T-invariant $\Rightarrow$ $W^{\perp} \subseteq V$ T^*-invariant

(oder $W \subseteq V$ T^* invariant $\Rightarrow W^{\perp}$ T-invariant).

Damit können wir ein Analog zum

Satz 2 S. 8 14. Vorlesung am 4.6.2012 zeigen.

Satz 1. (orthonormale Trigonalisierung).

Sei $K = \mathbb{C}$, V endl. dim. inneres Produkt K-VR;

$T \in \mathcal{L}(V,V)$. Dann gibt es eine orth. Basis $\mathcal{X}$

so daß $[T]_{\mathcal{X}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis. Induktion nach $n := \dim V$.

Sei $c \in \mathbb{C}$ und $x \neq 0$ mit $T^* x = c x$.

$W := (\mathrm{span}\{x\})^{\perp}$ $\qquad$ $\dim W = \dim V - 1 = n-1$

Lemma 1 06.07.2012 impliziert: W ist T-invariant, also ist $T\restriction_W$ wohldefiniert. Per Induktionsannahme: Setze: $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ orth Basis für W wofür die Matrix Darstellung von $T\restriction_W$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Setze $x_n := x/\|x\|$

Dann ist $\mathcal{X} := \{x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ die gesuchte

Basis. $\boxtimes$

<u>Korollar 1:</u> Für jede $n \times n$ Matrix über $\mathbb{C}$ A gibt es eine unitäre Matrix U so daß

$U^{-1}AU$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Beweis:
wähle $\mathcal{X}$ eine orth. Basis und definiere

$$T(x) = A\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \vdots \\ \varepsilon_n\end{pmatrix} \quad \text{wobei } x = \sum \varepsilon_i x_i$$

für $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Finde $\mathcal{Y}$ wie in Satz 1.

Set $U :=$ Matrix der Basis Wechsel.

Dann ist $U = U^*$ und $U^{-1}AU = B$ ist obere Dreiecks. $\boxtimes$

§ Orthonormale Diagonalisierung.

Lemma 2. Sei T normal, $g(x) \in K[x]$

$$W := \ker g(T).$$

Dann ist $W^\perp$ T-invariant.

Beweis. **Beh.** W ist T^*-invariant:

Sei $u \in W$ berechne

$$g(T)(T^*(u)) = T^*(g(T)(u)) = T^*(0) = 0.$$

(weil T^* kommutiert mit T also auch mit $g(T)$.) ∎

Lemma 1 impliziert nun: $W^\perp$ ist T-invariant ∎

Spektralsatz: sei T normal, $T \in \mathcal{L}(V, V)$
$p = \mathrm{Min\,pol}(T)$.

Es gilt (i) $p = p_1 \dots p_k$

wobei $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$, p_i irreduzibel

und normiert.

(ii) $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ und W_i ist orthogonal zu W_j für $i \neq j$

für $W_i = \ker p_i(T)$.

<u>Hilfsbemerkung</u>: Ist g ein Faktor von $\mathrm{Min\,Pol}(T)$ dann ist $g(T)$ <u>nicht</u> invertierbar.

Beweis: $p = gh$ wäre $g(T)$ invertierbar
$\deg h < \deg p$
dann hätten wir

$$0 = g(T)^{-1} p(T) = g(T)^{-1} g(T)\, h(T)$$

und damit $h(T) = 0$ ↯ $\deg p$ ist minimal. ∎

<u>Beweis vom Spektralsatz.</u> Per Induktion:

Lemma 2 impliziert: $W_1^\perp$ ist T-invariant.

Betrachte $T|_{W_1^\perp}$ und bemerke dass

$$p_1\left(T|_{W_1^\perp}\right) = \{0\} \quad \left(x \in W_1^\perp \text{ und } x \in \ker p_1(T) = W_1 \Rightarrow x = 0.\right)$$

Also ist $p_1(T|_{W_1^\perp})$ invertierbar und damit

ist p_1 <u>kein</u> Faktor vom $\mathrm{Min\,Pol}(T|_{W_1^\perp}) = p_2 \cdots p_k$

Aber $p_1 = \mathrm{Min\,Pol}(T|_{W_1})$;

und p_1 teilt nicht $p_2 \cdots p_k$. Also $p_1 \neq p_j$,

$j = 2, \dots, k$. $\left\{\begin{array}{l}\text{Argument.}\\ \text{Fortsetzung per Induktion}\end{array}\right\}$. ∎

Korollar 2. $K = \mathbb{C}$.

T normal $\Rightarrow$ es existiert eine orthonormale Basis

bestehend aus Eigenvektoren von T.

Beweis. p_i linear über $\mathbb{C}$ also W_i = Eigenraum zum
$p_i = (x - c_i)$ Eigenwert c_i.

G-S: wähle orthormale Basis $\mathcal{X}_i$ für W_i $(i = 1, \dots, k)$

$\mathcal{X}_i$ besteht aus EigenV. zum EigenW. c_i.

Also ist $\mathcal{X} = (\mathcal{X}_1 \cup \dots \cup \mathcal{X}_k)$

die gewünschte Basis. ∎

Definition: $B, A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$.

(i) A ist normal falls $AA^* = A^*A$

(ii) A ist unitär äquivalent zu B falls

es eine unitäre $U \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ gibt

mit $B = U^{-1} A U$.

Korollar 3. (Matrix version vom Korollar 2).

Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$; A normal $\Rightarrow$ A ist unitär äquiv.

zu einer diagonaler Matrix $D \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. $\boxminus$

§ **Anwendungen vom Spektralsatz.** V endl. dim.

Korollar 4. $K = \mathbb{C}$, T normal. Es ist:

T ist Hermite'sch $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte $\in \mathbb{R}$.

Beweis. "$\Rightarrow$" schon bewiesen worden.

"$\Leftarrow$" Seien alle EigenW. reell, und $\mathcal{Y}$ eine orthonorm. Basis bestehend aus EigenV. Also ist

$$D := [T]_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \qquad d_i \in \mathbb{R}.$$

Es ist klar daß D Hermite'sch ist

$(D^* = \overline{D^t} = D^t = D)$, also ist auch

T Hermite'sch. (ÜB). $\boxminus$

Korollar 5: $K = \mathbb{C}$, T normal. Es ist:

T ist unitär $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte haben Absolutbetrag 1.

Beweis. "$\Rightarrow$" schon bewiesen.

"$\Leftarrow$" Seien die EigenW. $z_1, \ldots, z_n$, und $\mathcal{Y}$ orthon.

Basis bestehend aus EigenV. so daß

$$[T]_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix} = D.$$

__Bh:__ D ist unitär:

Berechne: $A^* = \overline{A}^t = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z}_n \end{pmatrix}$

Also $AA^* = \begin{pmatrix} z_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{z}_n \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} z_1 \overline{z}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \overline{z}_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

Also ist auch T unitär (ÜB). $\square$

- Lineare Algebra II -

- Kuhlmann -

- 24. Vorlesung -

Am 13. 07. 2012.

Wir wollen nun den Spektralsatz anwenden im Fall $K = \mathbb{R}$. Dann sind die p_i entweder linear $p_i = (x - r_i)$ $r_i \in \mathbb{R}$ oder quadratische irreduzible d.h aus der Form

$$(x-a)^2 + b^2 \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0.$$

Beispiel. sei $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$; $\theta \neq n\pi$ $n \in \mathbb{Z}$
(i.e θ erfüllt $\sin\theta \neq 0$)

$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit Matrix (bzgl standard orthonormale Basis $\{e_1, e_2\}$)

$$A = r \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

A ist normal: $AA^t = A^t A$.

Sei $p = \text{char Pol}(T) = \det(xI - A)$

$= (x - r\cos\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta$

setze $a := r\cos\theta \quad b := r\sin\theta \quad b \neq 0$

also ist

$p = (x-a)^2 + b^2 \quad b \neq 0$; irreduzible in $\mathbb{R}[x]$.

Also ist

$\text{Min Pol } T = p$.

Wir zeigen nun die Umkehrung.

<u>Satz:</u> Sei $\dim V = n$; $T \in \mathcal{L}(V,V)$ normal, mit

$\text{Min Pol } T := p = (x-a)^2 + b^2$; $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Es gilt: es existieren 2 dimensionale T-invariante Unterräume $V_1, \ldots, V_s$ $\left(s = \frac{n}{2}\right)$ so daß:

(i) V_i ist orthogonal zu V_j für $i \neq j$

(ii) $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$

(iii) V_j hat eine orthonormale Basis $\{\alpha_j, \beta_j\}$ so daß:

$$T\alpha_j = a\alpha_j + b\beta_j$$

$$T\beta_j = -b\alpha_j + a\beta_j$$

(Das heißt: $[T/_{V_j}]_{\{\alpha_j, \beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

wobei $\{\alpha_j, \beta_j\}$ die geordnete orthonormale Basis ist), und

(iv) $\text{Char pol}(T) = p^s$ (vi) $TT^* = (a^2+b^2)I$.

(Also setze $r := \sqrt{a^2+b^2}$ wähle θ mit

$a = r\cos\theta$ und $b = r\sin\theta$

Dann ist V die orthogonale direkte Summe von 2. dim. Unterräume, und die Beschränkung $T/_{V_i}$ ist "r mal eine Drehung um die Winkel θ".

Wir brauchen eine Bemerkung und eine Hilfslemma bevor wir den Satz beweisen!

Bemerkung:

(i) Sei $K=\mathbb{R}$ $\quad U \in \mathcal{L}(V,V)$.

Es gilt

$$(U\alpha \mid \beta) = (U^*\beta \mid \alpha) \qquad \text{für } \alpha, \beta \in V$$

(ii) Sei nun U normal; es gilt

$$\|U\alpha\| = \|U^*\alpha\| \qquad \forall \alpha \in V$$

Beweis:

(i) $(U^*\beta \mid \alpha) = (\beta \mid U\alpha) = \overline{(U\alpha \mid \beta)} = (U\alpha \mid \beta)$

(ii) $\|U\alpha\|^2 = (U\alpha \mid U\alpha) = (\alpha \mid U^*U\alpha) = (\alpha \mid UU^*\alpha)$

$= (U^*\alpha \mid U^*\alpha) = \|U^*\alpha\|^2.$ $\qquad \square$

Hilfslemma. Sei $K=\mathbb{R}$; S normal sodaß

$$S^2 + I = 0$$

Sei $\alpha \in V$ und setze $\beta := S\alpha$.

Es ist:

$$(\dagger) \quad S^*\alpha = -\beta \text{ und } S^*\beta = \alpha \text{ und}$$

$$(\alpha \mid \beta) = 0 \text{ und } \|\alpha\| = \|\beta\|$$

Beweis: $S\alpha = \beta$ und $S\beta = S^2\alpha = -\alpha$

also $0 = \|S\alpha - \beta\|^2 + \|S\beta + \alpha\|^2 =$

$= \|S\alpha\|^2 - 2(S\alpha|\beta) + \|\beta\|^2 +$
$\|S\beta\|^2 + 2(S\beta|\alpha) + \|\alpha\|^2$.

Da S normal ist folgt (Bemerkung + Hilfslemma)

$0 = \|S^*\alpha\|^2 - 2(S^*\beta|\alpha) + \|\beta\|^2 +$

$\|S^*\beta\|^2 + 2(S^*\alpha|\beta) + \|\alpha\|^2$

$= \|S^*\alpha + \beta\|^2 \quad + \quad \|S^*\beta - \alpha\|^2$.

Daraus folgt (+).

Berechne nun:

$(\alpha|\beta) = (S^*\beta|\beta) = (\beta|S\beta)$

$= (\beta|-\alpha) = -(\alpha|\beta)$,

also $(\alpha|\beta) = 0$.

Schliesslich:

$\|\alpha\|^2 = (S^*\beta|\alpha) = (\beta|S\alpha) = (\beta|\beta) = \|\beta\|^2$. ∎

Beweis vom Satz. Sei $\{V_1, .., V_s\}$ eine maximale

Menge von 2. dim. Unterräume mit den

den Eigenschaften:

(i) V_i ist orth. zu V_j

(iii) und

(v): $T^* \alpha_j = a\alpha_j - b\beta_j$ $\quad 1 \leq j \leq s$

$T^* \beta_j = b\alpha_j + a\beta_j$

Setze $W := V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$.

<u>Beh.</u> $W = V$.

Sonst ist $W^\perp \neq \{0\}$ und (iii) + (v) implizieren

außerdem daß W ist T und T^* invariant

$\rightarrow$ also ist $W^\perp$ T^* und $T^{**} = T$ invariant.

Setze $S := b^{-1}(T - aI)$.

Bemerke daß

$$S^* = b^{-1}(T^* - aI)$$

so $S^*S = S^*S$ (S normal) und

$\rightarrow$ $W^\perp$ ist auch S und S^* invariant und $(T - aI)^2 + b^2 I = 0$ impliziert

$$S^2 + I = 0.$$

Also können wir Hilfslemma für S und $W^\perp$ anwenden, wir bekommen:

$\alpha \in W^\perp$, $\|\alpha\| = 1$

$\beta := S\alpha$, $\beta \in W^\perp$ und

$S\beta = -\alpha$.

Da $T = aT + bS$ haben wir außerdem

$$\left.\begin{array}{l} T\alpha = a\alpha + b\beta \\ T\beta = -b\alpha + a\beta \end{array}\right\} \text{(iii)} \checkmark$$

Darüberhinaus:

$S^* \alpha = -\beta$
$S^* \beta = \alpha$
$(\alpha | \beta) = 0$ und $\|\beta\| = 1$.

Nun ist $T^* = aI + bS^*$

also

$$\left.\begin{aligned} T^*\alpha &= a\alpha - b\beta \\ T^*\beta &= b\alpha + a\beta \end{aligned}\right\} (V) \checkmark$$

Widerspruch zum maximale Wahl von

$\{V_1, \dots, V_s\}$, also $W = V$. ∎

Nun $\det\begin{pmatrix} x-a & b \\ -b & x-a \end{pmatrix} = (x-a)^2 + b^2$

Es folgt aus (i), (ii), (iii) nun daß

$$\det(xI - T) = \left[(x-a)^2 + b^2\right]^s.$$ ∎

(vi) T ist invertierbar und

$$T^* = (a^2+b^2)\, T^{-1}$$

Beweis

Aus $\left\{\begin{matrix}(iii)\\(V)\end{matrix}\right\}$ haben wir

$$[T|V_j]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$ und

$$[T^*|V_j]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Nun ist aber:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$= [T^*|V_j]_{\{\alpha_j,\beta_j\}}\,[T|V_j]_{\{\alpha_j,\beta_j\}}$$

$$= [T^*T|V_j]_{\{\alpha_j,\beta_j\}} = (a^2+b^2)\, I_2;$$ Also $T^*T = (a^2+b^2) I$. ∎