Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. A. Prestel
WS 2008/2009

ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

1. Übungsblatt
Abgabe am Dienstag, den 28. Oktober 2008 in der Vorlesung

1.1. Sei $\mathcal{R}$ ein kommutativer Ring mit Eins und seien I und J Ideale von $\mathcal{R}$.
Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Rad(I)} = \bigcap_{\mathfrak{P}\supset \mathrm{I} \text{ prim}} \mathfrak{P}$.
b) $\mathrm{Rad(I \cap J)} = \mathrm{Rad(I \cdot J)} = \mathrm{Rad(I)} \cap \mathrm{Rad(J)}$.
Gilt auch $\mathrm{Rad(I \cdot J)} = \mathrm{Rad(I)} \cdot \mathrm{Rad(J)}$?
c) Ist $\mathcal{R}$ ein Integritätsbereich, so ist $\mathcal{R}$ genau dann ein Körper, wenn alle Ideale Radikalideale sind.

Lösung. a) Offensichtlich ist $\mathrm{Rad(I)} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{P}\supset \mathrm{I} \text{ prim}} \mathfrak{P}$, denn mit $a^n \in I \subset \mathfrak{P}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $a \in \mathcal{R}$, ist auch $a \in \mathfrak{P}$, für jedes Primideal $\mathfrak{P}$, das über I liegt. Es bleibt '$\supseteq$' zu zeigen. Sei $a \in \bigcap_{\mathfrak{P}\supset I \text{ prim}} \mathfrak{P}$. Setze $S := \{a^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Angenommen $S \cap I = \emptyset$. Betrachte die Lokalisierung (?....!) $S^{-1}\mathcal{R}$ von $\mathcal{R}$ nach S. Dann ist $S^{-1}I$ ein *echtes* Ideal in $\mathcal{R}$. Dieses lässt sich maximalisieren zu $\mathfrak{m}$. Betrachte nun den Homomorphismus $\varphi : \mathcal{R} \to S^{-1}\mathcal{R}, x \mapsto (1, x)$ und das Urbild vom $\mathfrak{P} = \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ in $\mathcal{R}$. Dieses ist ein Primideal mit $\mathfrak{P} \cap S = \emptyset$.

b) Sei $x \in \mathrm{Rad(I \cap J)}$, d.h. $x^n \in I \cap J$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $x^{2n} \in I \cdot J$, d.h. $x \in \mathrm{Rad(I \cdot J)}$.
Sei nun $x \in \mathrm{Rad(I \cdot J)}$, d.h. $x^n \in I \cdot J \subset I($ bzw. $\subset J)$, d.h. $x \in \mathrm{Rad(I)} \cap \mathrm{Rad(J)}$.
Sei nun $x \in \mathrm{Rad(I)} \cap \mathrm{Rad(J)}$, d.h. $x^n \in I$ und $x^m \in J$, dann $x^{n+m} \in I \cap J$.

c) Wenn $\mathcal{R}$ ein Körper ist, so ist natrlich jedes Ideal ein Radikalideal. Sei umgekehrt jedes Ideal ein Radikalideal. Sein $x \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$. Angenommen $\langle x \rangle$ ist ein echtes Ideal in $\mathcal{R}$, d.h. x ist keine Einheit in $\mathcal{R}$. Dann ist auch $\langle x^2 \rangle$ ein echtes Ideal. Damit ist dieses aber ein Radikalideal nach Voraussetzung und damit $x \in \langle x^2 \rangle$, ergo $x = ax^2$ für ein $a \in \mathcal{R}$. Da $\mathcal{R}$ nach Voraussetzung ein Integritätsbereich ist, dürfen wir kürzen und erhalten $1 = a \cdot x$. Widerspruch zur Annahme, dass x keine Einheit ist. □

1.2. Sei K ein Körper, der nicht algebraisch abgeschlossen ist. Zeigen Sie, dass sich dann jede K-Varietät $V \subseteq \mathbb{A}^n(K)$ als Nullstellen Menge eines einzigen Polynoms aus $K[X_1, ..., X_n]$ schreiben lässt.

(*Hinweis:*
Ist $f(X)$ ein nichtlineares irreduzibles Polynom in einer Unbestimmten, so gilt für die (Homogenisierung $f^h(X,Y) = Y^{\deg(f)} f(X/Y)$), dass $f^h(x,y) = 0$ genau dann wenn $(x,y) = (0,0)$.)

1.3. Sei L/K eine normale Körpererweiterung. Zwei Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$ und $(y_1, \ldots, y_n)$ heißen *konjugiert* über K, wenn es einen K-Automorphismus σ von L gibt, so dass $(\sigma(x_1), \ldots, \sigma(x_n)) = (y_1, \ldots, y_n)$ ist.

a) Für eine K-Varietät $V \subset \mathbb{A}^n(L)$ gehören mit $x \in V$ auch alle Konjugierten von x über K zu V.

b) Ist $V \subset \mathbb{A}^n(L)$ eine *endliche* Punktmenge mit der Eigenschaft, dass mit $x \in V$ auch alle Konjugierten von x über K zu V gehören, so ist V eine K-Varietät.
~~(*Anleitung*: Ist $x = (x_1, \ldots, x_n) \in L$, so ist $K[x_1, \ldots, x_n] = K[X_1, \ldots, X_n]/I$ für ein Ideal I, das von n Elementen erzeugt wird.)~~

Lösung. b) Wir können annehmen (?....!), dass V nur aus einer einzigen Bahn besteht, erzeugt vom Element $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{K}^n$. Wir definieren nun iterativ Polynome $f_1 \in K[X_1], f_2 \in K[X_1, X_2], \ldots, f_n \in K[X_1, ..., X_n]$ wie folgt: f_1 ist das irreduzible Polynom von x_1 in K. Sei $\tilde{f}_2 \in K[x_1][X_2]$ das irreduzible Polynom von x_2 über $K[x_1]$, dann wähle $f_2 \in K[X_1, X_2]$ so, dass $f_2(x_1, X_2) = \tilde{f}_2$. Allgemein sei $\tilde{f}_i$ das irreduzible Polynom von x_i über $K[x_1, \ldots, x_{i-1}]$. Dann wähle $f_i \in K[X_1, \ldots, X_i]$ so, dass $f_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, X_i) = \tilde{f}_i$. Wir zeigen, dass $V = \tilde{V}(f_1, \ldots, f_n)$. Klar ist $(x_1, \ldots, x_n) \in V$. Mit Augabenteil a) ist auch jede Konjugierte von $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$. Sei nun $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V$. Wir zeigen, dass y eine Konjugierte von x ist. Sei $i \leq n$ maximal, so dass es ein $\sigma \in \mathrm{Aut(L/K)}$ gibt mit $\sigma(x_1) = y_1, \ldots, \sigma(x_i) = y_i$. Angenommen $i < n$. Dann ist y_{i+1} Nullstelle vom irreduziblen Polynom $f_{i+1}(y_1, \ldots, y_i, X_{i+1})$, ebenso wie $\sigma(x_{i+1})$. Da $L/K[y_1 \ldots, y_i]$ normal ist, gibt es eine $K[y_1, ...y_i]$-Automorphismus τ von L mit $\tau(\sigma(x_{i+1})) = y_{i+1}$ (?....! Eine wesentliche Eigenschaft von normalen Körpererweiterungen L/K ist, dass sich K-Isomorphismen zwischen Teilkörpern zu K-Automorphismus auf L fortsetzen lassen); Betrachte nun $\sigma' = \tau \circ \sigma$. Widerspruch zu i maximal. $\square$