Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. A. Prestel
WS 2008/2009

ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

11. Übungsblatt
Abgabe am Freitag, den 30. Januar 2009 in der Vorlesung

11.1. Sei $C := V(x^3 - y^2) \subset \mathbb{A}^2$. Sei φ: $\mathbb{A} \longrightarrow C$, $\varphi(x) = (x^2, x^3)$. Zeigen Sie, daßφ bijektiv, bistetig, birational aber kein Isomorphismus ist.

11.2. Sei X eine projektive und Y eine quasiprojektive Varietät und $\varphi : X \to Y$ ein Morphismus. Beweisen Sie, dass $\varphi(X)$ abgeschlossen ist.

11.3. Sei $\varphi : X \to Y$ surjektiver Epimorphismus projektiver Varietäten und sei Y irreduzibel. Seine sämtliche Fasern $\varphi^{-1}(y)$ irreduzibel und von gleicher Dimension n. Zeigen Sie, dass X irreduzibel ist.
(*Hinweis: Sei $\varphi : \tilde{X} \to Y$ ein dominanter Morphismus von irreduziblen Varietäten. In der Vorlesung wurde bewiesen: Es gibt ein $U \subset Y$ offen mit $U \subset \varphi(\tilde{X})$.*
Was nicht gezeigt wurde, aber für die Aufgabe verwendet werden darf: Für jedes $y \in U$ ist $\dim(\mathcal{F}) = \dim(\tilde{\mathrm{X}}) - \dim(\mathrm{Y})$ *für jede Komponente $\mathcal{F}$ der Faser $\varphi^{-1}(y)$.*
Nehmen Sie nun an, dass $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n$. Überlegen Sie sich, dass es ein i geben muss mit $\varphi(X_i) = Y$ und $n = \dim(\mathrm{X_i}) - \dim(\mathrm{Y})$.)

11.4. Beweisen Sie die Zusatzaussage (betreffend die Faserdimension) zum Satz aus der Vorlesung, welche in obigem Hinweis behauptet wurde.