Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Alexander Prestel
WS 2008/2009

ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

2. Übungsblatt
Abgabe am Fr 7.11 in der Vorlesung

2.1. Sei K ein Körper. Zu $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ sei $\hat{f} : K^n \to K, a \mapsto f(a)$. Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$K[X_1, \dots, X_n] \to \mathrm{Abb}(\mathrm{K}^\mathrm{n}, \mathrm{K})$$
$$f \mapsto \hat{f}$$

genau dann injektiv ist, wenn K unendlich ist.

2.2. Sei K ein endlicher Körper: Zeigen Sie

a) Zu jedem $a \in K^n$ gibt es ein $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ mit $f(a) = 1$ und $f(b) = 0$ für alle $b \in K^n \setminus \{a\}$.
b) Die in Aufgabe 2.1 definierte Abbildung $K[X_1, \dots, X_n] \to \mathrm{Abb}(\mathrm{K}^\mathrm{n}, \mathrm{K}), \mathrm{f} \mapsto \hat{\mathrm{f}}$ ist surjektiv.
c) Jede Teilmenge $V \subset K^n$ ist Nullstellenmenge eines geeigneten Polynoms $f \in K[X_1, \dots, X_n]$.

2.3. Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie: Ist R noethersch, so auch $R[X]$.
(Hinweis:
Zu nicht endlich erzeugbarem Ideal $I \subset R[X]$, betrachte aufsteigende Folge von endlicherzeugten Teilidealen $(f_1, \dots, f_k) \subset I$.Dabei wähle iterativ $f_k \in I \setminus (f_1, \dots, f_{k-1})$ von minimalem grad.
(Betrachte nun das von den Leitkoeffizienten der f_k erzeugte Ideal in R.)

2.4. Sei ein kommutativer Ring mit Eins. Ein R-Modul heißt noethersch, wenn jeder seiner Untermoduln endlich erzeugt ist. Zeigen Sie:

a) Ist R ein noetherscher Ring, so ist $R^n = R \times \cdots \times R$ ein noetherscher Modul.
b) Ist R ein noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul, so ist M ein noetherscher Modul.

Lösung. a) Wir zeigen dies durch Induktion über n. Sei $n > 1$. Angenommen M ist nicht noethersch, d.h. es gibt ein nicht endlich erzeugter Untermodul $U \subset M$. Dann gibt es eine abzählbare Folge $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Elementen in U, welche eine echte aufsteigende Folge von Untermodulen $U_k = Rw_1 + \cdots + Rw_k$ von U definieren. Ohne Einschränkung $U = \bigcup_k U_k$. Man betrachte die beiden Projektionen

$$\begin{aligned} \rho_{n-1} : R^n &\longrightarrow R^{n-1} \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}) \\ &\text{sowie} \\ \rho_1 : R^n &\to R \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_n \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist das Ideal $\rho_1(U)$ endlich erzeugt. Das Ideal $\rho_1(U)$ wird, da es endlich erzeugt ist, bereits von einer endlichen Auswahl der $\rho_1 w_i$ erzeugt, etwa $\rho_1(w_1), \dots, \rho_1(w_r)$ für ein $r \in \mathbb{N}$. Für $1 \leq j \leq r$ setzen wir $\tilde{w}_j = w_j$, für $j > r$ setzen wir $\tilde{w}_j = w_j - (\alpha_1^{(j)} w_1 + \dots + \alpha_r^{(j)} w_r)$, wobei $\alpha_1^{(j)}, \dots, \alpha_r^{(j)} \in R$ so, dass $\rho_1(w_j) = \rho_1(\alpha_1^{(j)} w_1 + \dots + \alpha_r^{(j)} w_r)$. Induktiv sehen wir, dass $U_k = R\tilde{w}_1 + \dots + R\tilde{w}_k$, und somit ist U von den $(\tilde{w}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ erzeugt. Setze $U = U_1 + U_2$, wobei U_1 der Untermodul ist, der von $\tilde{w}_1, ..., \tilde{w}_r$ erzeugt ist und U_2 von $(\tilde{w}_i)_{i > r}$. Es gilt $\rho_1(U_2) = 0$ und $\rho_{n-1}|U_2$ ist injektiv. Da $\rho_{n-1}(U_2)$ nach Induktionsvoraussetzung endlich erzeugt ist, gilt dies auch für U_2, und somit ist U endlich erzeugt. Widerspruch.

b) Sei M von n Elementen $v_1, \dots, v_n$ erzeugt, und $U \subset M$ ein Untermodul. Der R-Modulhomomorphism $\varphi : R^n \to M$ der durch die Wertevorgabe $\varphi(e_i) = v_i$ definiert ist, wobei $(e_i)_i$ die kanonische Basis des freien R-Moduls R^n bezeichne, ist surjektiv. $\varphi^{-1}(U)$ ist ein Untermodul von R^n und nach Aufgabenteil a) damit endlich erzeugt. Folglich ist auch $U = \varphi(\varphi^{-1}(U))$ endlich erzeugt. $\square$

2.5. Sei K ein Körper und S die Menge aller Polynome aus $K[X_1, \dots, X_n]$, die keine Nullstelle in $\mathbb{A}^n(K)$ haben. Zeigen Sie, daß jedes Ideal $I \subset K[X_1, \dots, X_n]$ mit $I \cap S = \emptyset$ eine Nullstelle in $\mathbb{A}^n(K)$ hat.