Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Alexander Prestel
WS 2008/2009

ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

3. Übungsblatt
Abgabe am Fr 14.11. in der Vorlesung,
Übungsgruppen finden Dienstags 8.30 - 10.00 Uhr in G 201, sowie 10.15 - 11.45 in E 405 statt

3.1. a) Finden Sie ein Beispiel eines reduziblen, aber zusammenhängenden topologischen Raumes X.

b) Läßt sich X auch als Teilraum eines affinen Raumes (bezüglich der Zariskitopologie) finden?

Lösung. b) Sei K ein unendlicher Körper und sei $V = \{(x, y) \in \mathbb{A}^2(K) \mid x = 0 \vee y = 0\} = V(XY)$. Dann ist V nicht irreduzibel, denn $V = V(X) \bigcup V(Y)$, aber $V \neq V(X)$ und $V \neq V(X)$. V ist aber zusammenhängend, denn sei $V = A \bigcup B$ mit A, $B \subset \mathbb{A}^2(K)$ abgeschlossen. Sei etwa $A = V(f_1, \ldots, f_r)$ und $B = V(g_1, \ldots, g_s)$. Also ist $V = V(f_i g_j)$. Damit ist aber $f_i g_j(x, 0) = 0$ für alle $x \in K$ und $f_i g_j(0, y) = 0$ für alle $y \in K$ und für jedes Paar i, j. Daraus folgt $X, Y \mid f_i g_j$ für jedes Paar i, j. Falls ein f_i nicht von X geteilt wird und ein anderes f_k nicht von Y geteilt wird, werden alle g_j von XY geteilt, damit wäre $V = B$. Es werden also o. E. alle f_i von X geteilt, und mindestens eines nicht von Y. Dann müssen aber alle g_j von Y geteilt werden, also ist $A \bigcap B \supset \{(0, 0)\}$. Es ist also nicht möglich V als disjukte Vereinigung abgeschlossener Mengen zu schreiben und damit ist V zusammenhängend. □

3.2. Sei L/K eine Körpererweiterung und sei $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, daß die K- Zariskitopologie auf $\mathbb{A}^n(L)$ genau dann hausdorffsch ist, wenn L endlich und $K = L$ ist.

Lösung. Sei zunächst angenommen $K = L$ ist endlich. Dann entspricht die Zariskitopologie der diskreten Topologie (zeigen!) und wir sind fertig. Sei umgekehrt angenommen, dass die Topologie hausdorffsch ist. Seien $x \neq y \in \mathbb{A}^n$. Seien U_x und U_y jeweils dsjunkte offene Umgebungen. Diese wiederum sind nach Definition Komplemente von 'nichttrivialen' Varietäten V und W mit $\mathbb{A}^n = V \cup W$. Seien $f, g \in K[X_1, \ldots, X_n] \setminus \{0\}$ Polynome, die jeweils an der Definition von V und W beteiligt sind. Dann ist $f \cdot g \in L[X_1, \ldots, X_n] \setminus \{0\}$ ein Polynom mit $f \cdot g(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{A}^n(L)$. Mit Aufgabe 2.1 folgt, dass L endlich ist. Angenommen $K \neq L$. Da L endlich ist, ist die Erweiterung L/K galoisch. Sei nun $y \in \mathbb{A}^n(L) \setminus \mathbb{A}^n(K)$. Sei y' eine Konjugierte von y mit $y' \neq y$ (solch eine gibts, da L/K galoisch). Jede K-Varietät, die y' enthält, enthält dann auch y, und somit währen y und y' nicht durch offene Umgebungen trennbar (?...!). □

3.3. Sei L/K ein Körpererweiterung und L unendlich. Zeigen Sie, daß jede lineare K-Varietät in $\mathbb{A}^n(L)$ irreduzibel ist.

3.4. Sei L/K eine Körpererweiterung, $V \subset \mathbb{A}^n(K)$ eine K-Varietät und $\overline{V} \subset \mathbb{A}^n(L)$ ihr Abschluss in der L-Zariskitopologie. Zeigen Sie:

a) Das Ideal $\mathcal{I}(\overline{V})$ von $\overline{V}$ in $L[X_1, \ldots, X_n]$ ist das Erweiterungsideal

$$\mathcal{I}(V) \cdot L[X_1, \ldots, X_n]$$

des Ideals $\mathcal{I}(V)$ in $K[X_1, \ldots, X_n]$.

b) $V = \overline{V} \cap \mathbb{A}^n(K)$.

c) Ist $\overline{V} = V_1^* \cup \cdots \cup V_s^*$ die Zerlegung von $\overline{V}$ in irreduzible Komponenten (bzgl. der L-Topologie und $V_i := V_i^* \cap \mathbb{A}^n(K)$, $(i = 1, \ldots, s)$, so ist $V = V_1 \cup \cdots \cup V_s$ die Zerlegung von V in irreduzible Komponenten (bzgl. der K-Topologie von $\mathbb{A}^n(K)$). Ferner ist $V_i^* = \overline{V}_i$ der Abschluss von V_i in $\mathbb{A}^n(L)$. (Im Fall $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$ heißt $\overline{V}$ die "Komplexifizierung" der $\mathbb{R}$-Varietät $V \subset \mathbb{A}^n(\mathbb{R})$).

Lösung. a) Sei $f \in \mathcal{I}(\overline{V}) \subset L[X_1, \ldots, X_n]$, d.h. $f|_V = 0$. Seien $\alpha_1, ..., \alpha_s$ die Koeffizienten von f in L. Sei $\mathcal{W}$ der K-Untervektorraum von L erzeugt von $\alpha_1, ..., \alpha_s$. Dieser hat eine Basis, etwa $\beta_1, \ldots, \beta_m$. Nun lässt sich f schreiben als

$$f = \beta_1 g_1 + \cdots + \beta_m g_m$$

mit $g_1, \ldots, g_m \in K[X_1, \ldots, X_n]$, und für $x \in V$, lässt sich folgt aus $f(x) = 0$ aufgrund der linearen Unabhngigkeit folgern, dass $g_1(x) = \cdots = g_m(x) = 0$, also $g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{I}(V)$. Also $\mathcal{I}(\overline{V}) \subseteq \mathcal{I}(V)L[X_1, \ldots, X_n]$. Die umgekehrte Inklusion ist trivial.

b) Offenischtlich ist $V \subseteq \overline{V} \cap \mathbb{A}^n(K)$. Umgekehrt, ist $x \in \overline{V} \cap \mathbb{A}^n(K)$, so ist $f(x) = 0$ für alle $f \in \mathcal{I}(V) \subseteq \mathcal{I}(\overline{V})$. Also $x \in V$.

c) Wir zeigen zunchst, d □

3.5. Für welche Körper K stimmt die K-Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}^2(K) = \mathbb{A}^1(K) \times \mathbb{A}^1(K)$ nicht mit der Produkttopologie überein? Welche der Topologien ist feiner?

Lösung. Falls K endlich ist, ist nach Aufgabe 2.2.c) jede Teilmenge von $\mathbb{A}^2(K)$ bzgl. der K-Zariskitopologie abgeschlossen. Jede Teilmenge von $\mathbb{A}^2(K)$ ist aber auch Vereinigung von endlich vielen einpunktigen Mengen $\{(a, b)\} = V(X - a) \times V(Y - b)$ ist also auch abgeschlossen in der Produkttopologie. Für endliche Körper stimmt die Zariskitopologie also mit der Produkttopologie überein.
Falls K unendlich ist, so ist jede in der Produkttopologie abgeschlossene Menge Durchschnitt von endlichen Vereinigungen von Mengen $A \times B$ mit $A, B \subset \mathbb{A}^1(K)$ abgeschlossen. Sei also $A = V(f_1, \ldots, f_r)$ und $B = V(g_1, \ldots, g_s)$.
Dann ist $A \times B = V(f_1(X) \ldots, f_r(X), g_1(Y) \ldots, g_s(Y))$ auch in der Zariskitopologie abgeschlossen.
Jede in der Produkttopologie abgeschlossene Menge ist also auch in der Zariskitopologie

abgeschlossen.
Die Diagonale $\Delta = V(X - Y)$ ist abgeschlossen in der Zariskitopologie, aber nicht abgeschlossen in der Produkttopologie, denn wäre $\Delta^C = \mathbb{A}^2(K) \setminus \Delta$ offen in der Produkttopologie, so wäre $\Delta^C = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \times V_\lambda$ mit $U_\lambda, V_\lambda \subset \mathbb{A}^1(K)$ offen. Seien also $U, V \subset \mathbb{A}^1(K)$ offen. Sei etwa

$$U = \left\{x \in \mathbb{A}^1(K) \mid f_1(x) \neq 0 \vee \ldots \vee f_r(x) \neq 0\right\}$$

$$V = \left\{x \in \mathbb{A}^1(K) \mid g_1(x) \neq 0 \vee \ldots \vee g_s(x) \neq 0\right\}$$

Wir zeigen $U \bigcap V \bigcap \Delta \neq \emptyset$.

$$U \times V = \left\{(x, y) \in \mathbb{A}^2(K) \mid (f_1(x) \neq 0 \vee \ldots \vee f_r(x) \neq 0) \wedge (g_1(y) \neq 0 \vee \ldots \vee g_s(y) \neq 0)\right\}$$

Wäre $U \bigcap V \bigcap \Delta = \emptyset$, so gilt für alle $x \in \mathbb{A}^1$
$(f_1(x) = \ldots = f_r(x) = 0) \vee (g_1(x) = \ldots = g_s(x) = 0)$ also haben entweder alle f_i oder alle g_j unendlich viele gemeinsame Nullstellen, da K unendlich ist, sind also entweder alle $f_i = 0$ oder alle $g_j = 0$. Dies ist ein Widerspruch. Also ist die Zariskitopologie feiner als die Produkttopologie. $\square$