Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Alexander Prestel
WS 2008/2009

ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

4. Übungsblatt
Abgabe am Fr,21. November

4.1. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Beschreiben Sie die drei irreduziblen Komponenten der Varietät
$$V := V(X^2 - YZ, XZ - X) \subset \mathbb{A}^3(K).$$

4.2. Seien K und L Körper mit $K \subseteq L$. Dann heißt K *existenziell abgeschlossen in* L, falls für alle $n, r, s \in \mathbb{N}$ und alle Polynome $f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_s \in K[X_1, \ldots, X_n]$ gilt:
$$\exists x \in L^n : (f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0 \wedge g_1(x) \neq 0 \wedge \cdots \wedge g_s(x) \neq 0)$$
$$\Downarrow$$
$$\exists x \in K^n : (f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0 \wedge g_1(x) \neq 0 \wedge \cdots \wedge g_s(x) \neq 0)$$

Zeigen Sie:

a) K ist existenziell abgeschlossen in L genau dann wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ jede nichtleere K-Varietät $V \subset \mathbb{A}^n(L)$ einen K-rationalen Punkt besitzt.
b) Ist K in L existenziell abgeschlossen, so ist das Produkt $V \times W \subset \mathbb{A}^{m+n}(L)$ von irreduziblen K-Varietäten $V \subset \mathbb{A}^m(L)$ und $W \subset \mathbb{A}^n(L)$ stets irreduzibel.
c) Finden Sie ein Beispiel für K und L so, dass K in L zwar algebraisch, nicht aber existentiell abgeschlossen ist.

4.3. a) Geben Sie $\mathbb{R}$-Varietäten $V \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ mit den folgenden Koordinatenringen $K[V]$ an:
$$\mathbb{R}, \qquad \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \qquad \mathbb{C}[X], \qquad \mathbb{R}[X, \sqrt{1+X}],$$
$$\mathbb{C}, \qquad \mathbb{R}[X], \qquad \mathbb{C}[X, \tfrac{1}{X}], \qquad \mathbb{R}[X, \sqrt{-1-X^2}]$$

b) Welche dieser affinen Algebren lassen sich als Koordinatenringe von $\mathbb{R}$-Varietäten $V \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ realisieren?

4.4. Beweisen Sie, dass der Graph eines Morphismus $V \to W$ zwischen affinen K-Varietäten V und W in $V \times W$ abgeschlossen ist.