Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Alexander Prestel
WS 2008/2009

ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

5. Übungsblatt
Abgabe am Fr 28.11. in der Vorlesung

Sei im folgenden K stets ein algebraisch abgeschlossener Körper, $\mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n(K)$ und $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n(K)$.

5.1. Sei $V_1 := V(Y - X^2) \subset \mathbb{A}^2(K)$ und $V_2 := V(XY - 1) \subset \mathbb{A}^2(K)$. Zeigen Sie:

a) $K[V_1]$ ist isomorph zum Polynomring $K[T]$, $K[V_2]$ dagegen nicht.

b) Ist $f \in K[X, Y]$ irreduzibel vom Grad 2, und ist $W = V(f) \subset \mathbb{A}^2$ die durch f definierte Quadrik, so ist $K[W] \cong K[V_1]$ oder $K[W] \cong K[V_2]$. Wann gilt was?

Lösung. a) $Y - X^2$ ist ein irreduzibles Polynom in $K[X, Y]$ (leicht zu sehen, man nehme einfach mal an, dass nicht...) somit ist das Hauptideal $(Y - X^2)$ ein Primideal, insbesondere ein Radikalideal, drum $\mathcal{I}(V_1) = (Y - X^2)$, also $K[V_1] = K[X, Y]/(Y - X^2) = K[x, y]$. Hierbei bezeichenen x und y die Restklassen von X und Y in $K[V_1]$. Definieren nun Homomorphismus $K[T] \to K[V_1]$ durch Einsetzungshomomorphismus $f(t) \mapsto f(x) = f(X) + (Y - X^2)$. Sei zunchst bemerkt, dass dieser Homomorphismus injektiv ist, da $f(x) = 0$ gdw. $f(X) \in (Y - X^2)$, was aber aus Y-Gradgründen nur für das Nullpolynom möglich ist. Die Surjektivität ist sofort klar, wenn man sich bewusst macht, dass $g(x, y) = g(x, x^2)$.
$K[V_2] = K[X, Y]/(XY-1)$, da $XY-1$ irreduzibel ist und somit auch das Hauptideal $(XY-1)$ prim. Bezeichen wieder x die Restklasse von X und y die Restklasse von Y. Währe $K[V_2]$ isomorph über K zu $K[t]$, so dürfte es if $K[V_2] \setminus K$ keine Einheiten geben, ebenso wie in $K[t] \setminus K$. Jedoch ist $xy = 1$. Widerspruch.

b) Sei f_2 die homogene Komponente von Grad 2 von f. Da K algebraisch abgeschlossen, und f ein Polynom in 2 Variablen ist, ist $f_2 = (a_1X + b_1Y)(a_2X + b_2Y)$.
Falls (a_1, b_1) und (a_2, b_2) linear abhängig sind, gibt es $(a, b) \in K^2$ mit $f_2 = (aX + bY)^2$. Wir setzen $X' := aX + bY$. Da f irreduzibel ist, ist $f_1 \neq \lambda X'$ für alle $\lambda \in K$. Wenn wir nun $Y' := -f_1 - f_0$ definieren, erhalten wir einen affinen Koordinatenwechsel, der f in $X'^2 - Y'$ überführt. Somit ist in diesem Fall $K[W] \cong K[V_1]$.
Falls (a_1, b_1) und (a_2, b_2) linear unabhängig sind, können wir $X' := a_1X + b_1Y$ und $Y' := a_2X + b_2Y$ definieren. Es gibt eindeutig bestimmte $u, v \in K$ mit $f = X'Y' + uX' + vY' + f_0$. Da f irreduzibel ist, ist $f \neq (X' + v)(Y' + u)$, also ist $f_0 \neq uv$. Mit $\tilde{X} := \frac{(X'+v)}{\sqrt{uv-f_0}}$ und $\tilde{Y} := \frac{(Y'+u)}{\sqrt{uv-f_0}}$ erhalten wir einen affinen Koordinatenwechsel, der f auf $(uv - f_0)\left(\tilde{X}\tilde{Y} - 1\right)$ abbildet. Somit ist in diesem Fall also $K[W] \cong K[V_2]$. □

5.2. Verifizieren Sie anhand der folgenden Beispiele, da Homöomorphismen zwischen Varietäten keine Isomorphismen zu sein brauchen:

a) $\varphi : \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ mit $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ definiert einen bijektiven bistetigen Morphismus zwischen $\mathbb{A}^1$ und $V(Y^2 - X^3)$, aber keinen Isomorphismus.

b) Ist $\mathrm{char}(K) = p > 0$, so definiert der Frobenius-Automorphismus $t \mapsto t^p$ auf $\mathbb{A}^1$ ebenfalls einen Homöomorphismus und ebenfalls keinen Isomorphismus.

5.3. Man zeige:

a) Jede irreduzible Quadrik in $\mathbb{P}^2$ ist isomorph zu $\mathbb{P}^1$

b) $\mathbb{A}^2$ ist nicht homöomorph zu $\mathbb{P}^2$

Lösung. a) nehmen wir zunächst an, dass $Q = \mathcal{V}(XZ - Y^2)$. In diesem Fall lässt sich der Isomorphismus $\sigma : Q \to \mathbb{P}^1$ recht einfach hinschreiben:

$$[x : y : z] \to \left\{ \begin{array}{ll} (x : y) & \text{falls } (x, y) \neq (0,0) \\ (y : z) & \text{falls } (y, z) \neq (0,0) \end{array} \right\}$$

Natürlich muss man sich erstmal überzeugen, dass diese Abbildung wohldefiniert ist, nämlich dass in dem Fall wo sowohl $(x, y) \neq (0, 0)$, als auch $(y, z) \neq (0, 0)$ gilt $[x : y] = [y : z]$. Dies ist der Fall, da $x/y = y/z$.

Wir geben zu σ eine Umkehrabbildung an: $\rho : \mathbb{P}^1 \to Q, [s : t] \mapsto [s^2 : st : t^2]$. Man prüft leicht nach, dass die eine Umkehrabbildung ist. Ebenso sieht man einfach, dass diese Abbildungen abgeschlossene Teilmengen ineinander überfuhren, dazu müssen wir uns nur klarmachen, dass die abgeschlossenen Teilmengen einer Quadrik gerade endliche Teilmengen, sowie die leere Menge und die gesamte Quadrik sind. Somit handelt es sich bei den Abbildungen um gegenseitig inverse Homöomorphismen.

Um nun zu zeigen, dass es sich bei diesen Abbildungen um Isomorphismen von Prävarietäten handelt, müssen wir die projektive Varietäten mit einer Funktionengarbe versehen. Wir nennen eine K-wertige Funktion $r : U \to K$ auf einer offenen Teilmenge einer projektiven Varietät *regulär* in einem Punkt $P \in U$, wenn es eine Umgebung $V \subset U$ von P gibt und homogene Polynome vom gleichen Grad (!!!!!!), so dass $h|_V \neq 0$ und $r = \frac{g}{h}$ auf V gilt. Die Menge dieser Funktionen bilden einen Ring...

Damit haben wir eine Garbe von Funktionen auf einer projektiven Varietät X definiert:

$$\mathcal{O}_X(U) := K\text{-wertige Funktionen auf } U\text{, die überall regulär sind.}$$

(selber nachprüfen).

Bezeichen $\mathcal{O}_Q$ die entsprechende Garbe auf der Konik Q, und $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ die entsprechende auf dem $\mathbb{P}^1$. Wir müssen nun nach prüfen, dass für eine beliebige offenen Teilmen $U \subset \mathcal{P}^1$ die Zuordnung $r \mapsto r \circ \rho$ einen K-Algebrenisomorphismus $\rho^* \mathcal{O}_Q(\rho(U)) \to \mathcal{O}_{\mathcal{P}^1}$ ist. Zunächst kann man feststellen, dass wenn r ein K-wertige Funktion auf $\rho(U)$ ist, die überall regulär ist, dann ist auch $r \circ \rho$ regulär auf U, da ρ lokal durch homogene Polynome vom selben Grad beschrieben werden kann, und somit $r \circ \rho$ lokal wiederum durch Brüche von Polynomen vom selben Grad. Homomorphieeigenschaften sind unmittelbar klar, und Bijektivität ebenso, da man ja eine

Umkehrabbildung σ^* gegeben hat.

Jetzt wären wir eigentlich fertig mit dem Beweis, dass Q und $\mathbb{P}^1$ isomorph als Prävarietäten sind, wenn wir schon gezeigt hätten, dass sie Prävarietäten sind. Bisher haben wir nur gezeigt, dass sie als topologische Räume mit den von uns gewählten Garben von regulären Funktionen isomorph sind.

Wir wollen uns noch schnell überlegen, dass es für beide projektiven Varietäten X mit ihrer Garbe $\mathcal{O}_X$ jeweils eine endliche offene Überdeckung von offenen U_i gibt, so dass U_i mit der jeweils eingeschränkten Garbe $\mathcal{O}_X|_{U_i}$ als topologischer Raum mit Garbe isomorph zu einer affinen Variet"at mit herkömmlicher Garbe ist. Für den $\mathbb{P}^1$ wissen wir schon aus der Vorlesung, dass die offenen Mengen $U_1 = \{[x : y] \mid x \neq 0\}$ und $U_2 = \{[x : y] \mid y \neq 0\}$ den $\mathbb{P}^1$ überdecken und jeweils homöomorph zum $\mathbb{A}^1$ sind (via der Zuordnung $\pi : [x : y] \mapsto \frac{y}{x}\}$ bzw. $[x : y] \mapsto \frac{x}{y}\}$). Exemplarisch für U_1 wollen wir uns noch überlegen, dass die Garbenstruktur ebenfalls respektiert wird. Sei $V \subset \mathbb{A}^1$ eine offene Teilmenge. betrachte die Abbildung $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}(V) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\pi^{-1}(V)), r \mapsto r \circ \pi$. Wir sehen ein, dass $r \circ \pi$ eine reguläre Funktion auf $\pi^{-1}(V)$ ist, wenn r eine auf V war: r ist lokal ein Bruch von Polynomen $\frac{g(t)}{h(t)}$, dann ist $r \circ \pi$ lokal $\frac{g(y/x)}{h(y/x)}$. Sei $d = \max\{\deg(\mathrm{g}), \deg(\mathrm{h})\}$, dann is $r \circ \pi$ lokal $\frac{x^d g(y/x)}{x^d h(y/x)}$, also lokal durch ein bruch von homogenen Polynomen gleichen grades, also ist $r \circ \pi$ regulär in $\pi^{-1}(V)$. Die Isomorphi der Abbildung π^* ist wiederum relativ einfach zu zeigen.

Nun folgt das ganze Spiel für die Quadrik Q. Halten wir es kurz: Als offene Überdeckung wird man die Schnitte der Quadrik mit der kanonischen offenen Überdeckung U_i (i=1,2,3) des $\mathbb{P}^2$ wählen. die entsprechende Dehomogenisierungsabbildung der U_i auf den $\mathbb{A}^2$ liefert eine Dehomogenisierung der projektiven Konik $XZ - Y^2$ zu affinen Koniken $X - Y^2$, bzw. $XZ - 1$, bzw. $Z - Y^2$. Auch hier muessen wir dann nur noch zeigen, dass die entsprechenden Garben von regulaeren Funktionen isomorph sind. Lasst uns dies exemplarisch fuer die Dehomogenisierung von y tun. Sei also $r \in \mathcal{O}_C(U)$ eine regulaere Fkt., wobei C nun die affine Quadrik $XZ - 1 = 0$ abkuerze. Dann wird r lokal durch $\frac{g(X,Z)}{h(X,Z)}$ dargestellt. die Dehomogenisierungsabbildung $\pi : U_2 \to C$ war $[x : y : z] \mapsto (x/y, z/y)$, also wird $r \circ \pi$ lokal durch $\frac{g(x/y,z/y)}{h(x/y,z/y)}$ dargestellt, und durch angemessene Erweiterung mit genugend hoher Potenz von y kriegen wir wieder einen Bruch von homogenen Polynomen gleichen Grades in x, y, z. Injektivitaet und Surjektivitaet nach $\mathcal{O}_Q|_{U_1}$sollte man sich dann auch noch ueberlegen....

Aber dann sind wir fertig!! (Schweiss-von-Stirn-wisch)

Halt das stimmt noch nicht ganz!! Wir haben uns ja die Arbeit leicht gemacht, und uns eine porjektive Quadrik ganz einfacher Bauart $(XZ - Y^2)$ hergenommen... Jetzt muessen wir uns eigentlich noch ueberlegen, dass durch eine lineare Transformation man jedes homogene quadratische Polynom in 3 Unbest. auf diese Form bekommt, und das eine solche lineare Koordinatentransformation einen Praevarietaetenisomorphismus zwischen den projektiven Quadriken liefert, aber ich denke die Leser waeren ebenso ermuedet sich das jetzt noch durchzulesen, wie ich das noch hinzuschreiben...

$\square$

5.4. Sei $V := \{(t, t^2, t^3) \mid t \in K\} \subset \mathbb{A}^3$

a) Überzeugen Sie sich davon, da V eine irreduzible Varietät ist.

b) Beschreiben Sie den projektiven Abschluss $\overline{V}$ von V in $\mathbb{P}^3$

c) Finden Sie Erzeugende für die Ideale $I(V)$ und $I(\overline{V})$.

d) Schließen Sie daraus, da $I(\overline{V})$ i.a *nicht* von den Homogenisierungen vorgegebener Erzeugender von $I(V)$ erzeugt wird.