Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Alexander Prestel
WS 2008/2009

ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

6. Übungsblatt
Abgabe am Fr 5.12. in der Vorlesung

6.1. Sei $\varphi : X \longrightarrow Y$ ein Morphismus zwischen irreduziblen Prävarietäten. Zeiden Sie:

a) Für jedes $x \in X$ induziert φ einen Homomorphismus der lokalen Ringe

$$\varphi_x^* : \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

b) φ ist genau dann ein Isomorphismus, wenn φ ein Homöomorphismus ist und φ_x^* für alle x ein Isomorphismus ist.

c) Ist $\varphi(X)$ dicht in Y, so ist φ_x^* injektiv.

Lösung. a) Wir wissen bereits, dass für jedes offene $U \in Y$ die Abbildung

$$\varphi_U^* : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U)), r \mapsto r \circ \varphi$$

ein K-Algebrenhomomorphismus ist. (Das ist einfach Teil der Definition von Morphismus von Prävarietäten...)
Wir definieren nun analog eine Abbildung φ_x^*. Sei (r, V) ein Repräsentant eines Keimes im Punkt x (die Keime sind die Elemente der lokalen Ringe...), d.h. V ist eine offene Umgebung von $\varphi(x)$ in X und r darauf eine reguläre Funktion. Diesen Repräsentanten bilden wir ab auf den Keim $[r \circ \varphi, \varphi^{-1}(V)]$. Man muss sich überlegen, dass die Definition nicht von der Wahl des Repräsentanten des Keims abhängt. Homomorphie ist fast trivial.

b) Sei zunächst angenommen, das φ ein Isomorphismus ist, d.h. φ ist ein Homöomorphismus und $\varphi^{-1*}(\varphi(U)) : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(\varphi(U))$ sowie $\varphi^*(U) : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$ sind gegenseitig inverse Isomorphismen von K-Algebren. Man kann sich einfach überlegen, dass dann auch φ_x^* und $\varphi_{\varphi(x)}^{-1*}$ gegenseitig invers sind.
Sei umgekehrt angenommen, dass φ_x^* für jedes $x \in X$ ein Isomorphismus ist. Sei $\rho_x : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)}$ seine Umkehrabbildung. Sei nun $U \subset X$ beliebige offene Menge. Wir definieren $\rho_U : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(\varphi(U)), r \mapsto \rho_U(r)$, wobei $\rho_U(r)(y) := \rho_x([r, U])(y)$ für $x = \varphi^{-1}(y)U$. Wir müssen uns erst überlegen, dass $\rho_U(r)$ wohldefiniert als Mitglied von $\mathcal{O}_Y(\varphi(U))$ ist. Dazu überlegen wir uns, dass U überdeckt werden kann von offenen Teilmengen V_i, so dass $\rho_U(r)|_{V_i} \in \mathcal{O}_U(V_i)$ für alle i, und mit Garbeneigenschaft ist dann schon $\rho_U(r) \in \mathcal{O}_Y|_U(U) = \mathcal{O}_Y(U)$.

Woran liegt das nun? Nun, $\rho_x([r, U])$ ist für jedes $x \in U$ ein Keim von regulären Funktionen in $\varphi(x) \in \varphi(U)$. Man wähle daraus einen Repräsentanten $(\tilde{r}_x, V_x)$ mit $\tilde{r}_x \in \mathcal{O}_{\varphi}(U)(V_x)$. Die V_x bilden eine Überdeckung von $\varphi(U)$. Es gilt $\tilde{r}_{x_1}|_{V_{x_1} \cap V_{x_2}} = \tilde{r}_{x_2}|_{V_{x_1} \cap V_{x_2}}$, da

$$[\tilde{r}_{x_1} \circ \varphi, \varphi^{-1}(V_{x_1})] = \varphi^*_{x_1}([\tilde{r}_{x_1}, V_{x_1}]) = \varphi^*_{x_1} \circ \rho_{x_1}([r, U]) = [r, U] = \\ \varphi^*_{x_2} \circ \rho_{x_2}([r, U]) = \varphi^*_{x_2}([\tilde{r}_{x_2}, V_{x_2}]) = [\tilde{r}_{x_2} \circ \varphi, \varphi^{-1}(V_{x_2})].$$

Daran sieht man, dass $\rho_U(r)(y) = \tilde{r}_x(y)$ für alle $y \in V_x$. Aufgrund der dritten Garbeneigenschaft folgt dann, dass $\rho_U(r)$ schon selbst ein reguläre Funktion auf U ist, was wir zeigen wollten. Bleibt noch zu überlegen, dass $\rho_U(r)$ die Umkehrfunktion von φ^*_U ist. Das ist aber punktweise einfach nachzuprüfen... □

6.2. Beweisen Sie dass das projektive Produkt von $\mathbb{P}^1$ und $\mathbb{P}^1$ isomorph zu $V_{\mathbb{P}^3}(X_0X_1 - X_2X_3)$ ist

6.3. Sei $f \in K[X_0, ..., X_n]$ irreduzibel und homogen und sei $H = V(f) \subset \mathbb{P}^n$ die durch f definierte Hyperfäche. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^n \backslash H$ affin ist.

Hinweis:
Verifizieren Sie dies zunächst für Hyperebenen,d.h. für deg(f)=1 und betrachten Sie dann die Einbettung $\rho : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ *definiert durch* $\rho([x_0, .., x_n]) := [M_0(x_0, .., x_n), ..., M_m(x_0, ..., x_n)]$, *wobei* $M_0, ..., M_m$ *sämtliche Monome in* $X_0, ..., X_n$ *vom Grad d=deg(f) seien*

Lösung. Kümmern wir uns zunächst um die Einbettung $\rho : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$. Wir wollen die homogenen Koordinaten eines Punktes $z \in \mathbb{P}^m$ zunächst einmal auf eine für uns nützlichere Art und Weise indizieren. Anstatt der Indizes $\{1, \ldots, m\}$ verwenden wir die Multiindizes $\Sigma = \{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \mid \alpha_0 + \cdots + \alpha_n = d\}$, passend zur Abbildung $\rho(x) := [x^\alpha]_{\alpha \in \Sigma}$. Betrachte die Menge

$$Z = \{z \in \mathbb{P}^\Sigma \mid z_\alpha z_\beta = z_\gamma z_\delta \text{ für alle } \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ mit } \alpha + \beta = \gamma + \delta\}$$

. Es braucht nicht viel Anstrengung um zu sehen, dass $\rho(\mathbb{P}^n) \subseteq Z$. Wir werden zeigen, dass $\rho : \mathbb{P}^n \to Z$ ein Isomorphismus von Prävarietäten ist. Dazu bauen wir uns eine Umkehrabbildung $\psi : Z \to \mathbb{P}^n$ zu ρ. Wir definieren diesen zunächst nur lokal, nämlich auf den offenen Teilen $U_{\alpha,i} = \{z \in Z \mid \alpha_i \geq 1, z_\alpha z_{\alpha - e_i} \neq 0\}$ für alle $\alpha \in \Sigma$ und $0 \leq i \leq n$ mit $\alpha_i \geq 1$. Und zwar wie folgt:

$$\psi_{\alpha,i} : U_{\alpha,i} \to \mathbb{P}^n$$
$$z \mapsto [z_{(\alpha - e_i + e_0)} : \cdots : z_{(\alpha - e_i + e_n)}]$$

Wir können uns leicht davon überzeugen, dass diese Definitionen auf Schnitten $U_{\alpha,i} \cap U_{\beta,j}$ übereinstimmt, denn in diesem Fall ist

$$z_{(\beta - e_j)}(z_{(\alpha - e_i + e_0)}, \ldots, z_{(\alpha - e_i + e_n)}) = z_{(\alpha - e_i)}(z_{(\beta - e_j + e_0)}, \ldots, z_{(\beta - e_j + e_n)}) \neq 0,$$

und somit $\psi_{\alpha,i}(z) = \psi_{\beta,j}(z)$. Somit gibt es eine gemeinsame Fortsetzung ψ auf die Vereinigung Z all dieser offenen Teile. Man sieht ziemlich leicht, dass $\psi \circ \rho([x_0 : \cdots : x_n]) = [x_0 : \cdots : x_n]$, d,h $\psi \circ \rho = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^n}$. Umgekehrt ist $\rho \circ \psi = \mathrm{id}_Z$, denn sei $z \in Z$ so, dass $\psi(z) = \psi_{\alpha,i}(z)$. Dann ist

$$\rho \circ \psi_{\alpha,i}(z) = [(\psi_{\alpha,i}(z))^\beta]_{\beta \in \Sigma} = [z^{\beta_0}_{(\alpha - e_i + e_0)} \cdots z^{\beta_n}_{(\alpha - e_i + e_n)}]_{\beta \in \Sigma} = [y_\beta]_{\beta \in \Sigma}.$$

Wir zeigen nun, dass $[y_\beta]_{\beta\in\Sigma} = [z_\beta]_{\beta\in\Sigma}$. Sei dazu $\beta, \gamma \in \Sigma$ beliebig. Genügt zu zeigen (?....!) $y_\beta z_\gamma = y_\gamma z_\beta$. Dies ist aber der Fall, da

$$y_\beta z_\gamma = z^{\beta_0}_{(\alpha-e_i+e_0)} \cdots z^{\beta_n}_{(\alpha-e_i+e_n)} \cdot z_\gamma = z_\beta z^{\gamma_0}_{(\alpha-e_i+e_0)} \cdots z^{\gamma_n}_{(\alpha-e_i+e_n)} = z_\beta y_\gamma,$$

(dies sieht zunächst einmal sehr schwierig zu zeigen aus, aber es beruht auf den definirenden Gleichungen von Z, die wir mit Induktion und etwas Hirnanstrengung verallgemeinern können zu $z_{\alpha^{(1)}} \cdots z_{\alpha^{(k)}} = z_{\beta^{(1)}} \cdots z_{\beta^{(k)}}$ falls $\alpha^{(1)} + \cdots + \alpha^{(k)} = \beta^{(1)} + \cdots + \beta^{(k)}$ in $\mathbb{N}^n$. Dann sieht man schnell, dass obige Gleichheit gilt, da $|\beta| = d = |\alpha|$ und wir insgesamt nur nachprüfen müssen, dass $(\beta_0+\cdots+\beta_n)(\alpha-e_i)+\beta_0 e_0+\cdots+\beta_n e_n+\gamma = (\gamma_0+\cdots+\gamma_n)(\alpha-e_i)+\gamma_0 e_0+\cdots+\gamma_n e_n+\beta$. Dies ist aber der Fall, da $\beta_0 + \cdots + \beta_n = \gamma_0 + \cdots + \gamma_n = d$, sowie $\beta_0 e_0 + \cdots + \beta_n e_n = \beta$ und $\gamma_0 e_0 + \cdots + \gamma_n e_n = \gamma$.) Somit gilt also $\rho \circ \psi = \mathrm{id}_Z$.
Es ist offensichtlich sowohl ρ stetig, als auch lokal alle $\psi_{\alpha,i}$, also auch ψ.
Bleibt noch zu zeigen, dass die jeweilige Garbenstruktur respektiert wird. Sei also $U \subset Z$ offen und f eine reguläre Funktion auf U, d.h. eine Funktion, die lokal jeweils zu einer regulären Funktion auf $\mathbb{P}^m$ fortgesetzt werden kann. Wir wollen zeigen, dass dann auch $f \circ \rho$ regulär auf $\varphi^{-1}(U)$ ist. Sei also $U = (U_1 \cap Z) \cup \cdots \cup (U_r \cap Z)$ für gewisse U_i offen in $\mathbb{P}^m$ und sein f_i regulär auf U_i mit $f_i|_{U_i\cap Z} = f|_{U_i\cap Z}$. regulär auf U_i heiss in diesem Fall f_i lässt lokal als Bruch von homogenen Polynomehn gleichen Grades schreiben; OE können wir annehmen, dass man dies schon global (auf U_i) tuen kann, also $f_i = \frac{g_i}{h_i}$. Betrachten wir nun $f_i \circ \rho = \frac{g_i\circ\rho}{h_i\circ\rho}$, so stellen wir fest, dass dies wieder ein Bruch von Polynomen gleichen Grades ist, da ρ Komponentenweise durch homogne Polynome vom selben Grad definiert ist, also ist $f_i \circ \rho$ eine reguläre Funktion auf $\rho^{-1}(U_i)$, und da sich das dann alles zu $f \circ \rho$ herunterschneidet, ist dann auch $f \circ \rho$ regulär auf $\rho^{-1}(U)$. Die Injektivität von ρ^* ist wieder recht einfach zu zeigen, da $f \circ \rho$ nur dann die Nullfunktion ist, wenn f die Nullfunktion war (ρ ist bijektiv). Und zur Surjektivität verwenden wir einfach die Umkehrfunktion ψ^*, was wir jetzt nicht weiter ausführen, sondern nur darauf verweisen, dass die Argumentation genauso läuft, wie sie später im Text nocheinmal für einen andere Abbildung vorkommt.

Behandeln wir nun den Hauptteil der Aufgabe: Wir zeigen, dass das Komplement einer Hyperflächen im $\mathbb{P}^n$ immer isomorph zu einer affinen Varietät ist. Sei dazu zunächst angenommen, dass das homogenen Polynome f, welches die Hyperfläche definiert, linear ist, d.h. die Hyperfl"ache sogar eine Hyperebene ist. in diesem Fall ist bereits klar, dass $\mathbb{P}^n \setminus H$ isomorph zum $\mathbb{A}^n$ ist (genau genommen wurde dies in der Vorlesung nur für spezielle Hyperebenen gezeigt, nämlich für die Koordinatenebenen, aber es ist wirklich sehr einfach zu überlegen, dass ein linearer Koordinatenwechsel einen Automorphismus von $\mathbb{P}^n$ als Prävarietät liefert).

Sei nun deg(f) = d > 1, etwa

$$f = \Sigma_{\alpha\in\mathbb{N}^n, |\alpha|=d} a_\alpha X^\alpha$$

. Es ist offensichtlich, dass $\rho(H)$ der Schnitt der Hyperebene $H' = \{z \mid \sum a_\alpha z_\alpha = 0\}$ mit der Abgeschlossenen Menge $\rho(\mathbb{P}^n)$ im $\mathbb{P}^m$ ist. Entsprechend ist $\rho(\mathbb{P}^n \setminus H)$ abgeschlossen in $\mathbb{P}^m \setminus H'$. Letzteres ist aber isomorph zum $\mathbb{A}^m$, und der selbe Isomorphismus φ schickt $\rho(\mathbb{P}^n \setminus H)$ homöomorph auf eine affine Varietät $V \subset \mathbb{A}^m$. Jetzt müssen wir uns nur noch überlegen, dass $\varphi \circ \rho|_{\mathbb{P}^n\setminus H}$ ein Isomorphismus von top. Räumen mit Garbe ist. Da wir uns bereits überlegt haben, dass $\rho : \mathbb{P}^\ltimes \to Z$ eine Isomorphismus ist (und somit auch $\rho|_{\mathbb{P}^n\setminus H} : \mathbb{P}^n \setminus H \to \rho(\mathbb{P}^n \setminus H)$),

müssen wir uns nur noch überlegen, dass auch $\varphi|_{\rho(\mathbb{P}^n\setminus H)} : \rho(\mathbb{P}^n \setminus H) \to V$ ein Isomorphismus von topologischen Räumen mit Garbe ist. (Anmerkung: dies folgt nicht einfach aus der Tatsache, dass φ ein Isomorphismus von top. Räumen mit Garbe ist, da $\rho(\mathbb{P}^n \setminus H)$ nicht offen in $\mathbb{P}^m \setminus H'$ ist). Sei dazu $U \subseteq V$ offen. Wir wollen, zeigen, dass $(\varphi^*|_{\rho(\mathbb{P}^n\setminus H})$ eine bijektive Abbildung $\mathcal{O}_V(U) \to \mathcal{O}_{\rho(\mathbb{P}^n\setminus H)}(\varphi^{-1}(U))$ induziert. Sei also f eine reguläre Funktion in U, d.h. insbesondere Es gibt offene Mengen $U_1, \ldots, U_r \subset \mathbb{A}^m$ und reguläre Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ auf $U_1, \ldots, U_r$, so dass $U = (U_1 \cap V) \cup \cdots \cup (U_r \cap V)$, und $f_i|_{U_i\cap V} = f|_{U_i\cap V}$. Es ist somit $f_i\circ\varphi \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m\setminus H'}(\varphi^{-1}(U_i))$ für alle i. Wir wollen nun zeigen, dass $f\circ\varphi$ eine reguläre Funktion auf $\varphi^{-1}(U)$ ist, dies ist der Fall, wenn $f\circ\varphi$ lokal fortgesetzt werden kann zu regulären Funktionen auf offenen Teilmengen von $\mathbb{P}^m \setminus H'$. Das haben wir aber durch die $f_i \circ \varphi$ gegeben. Um die Injektivität von $\varphi|^*_{\rho(\mathbb{P}^n\setminus H)}$ müssen wir uns keine Gedanken machen, da eine Nichtnullfunktion f nicht zur Nullfunktion $f \circ \varphi$ geliftet wird (φ ist bijektiv).
Surjektivität: Sei g eine reguläre Funktion auf $\varphi^{-1}(U)$, d.h. lokal fortsetzbar zu regulären Funktionen g_i auf offenen Teilmengen W_i im $\mathbb{P}^m \setminus H'$ für $i = 1, ..., s$ mit $\varphi^{-1}(U) = (W_1 \cap \rho(\mathbb{P}^n \setminus H)) \cup \cdots \cup (W_s \cap \rho(\mathbb{P}^n \setminus H))$. Da φ ein Isomorphismus auf $\mathbb{P}^m \setminus H'$ ist, sind dann auch $f_i = g_i \circ \varphi^{-1}$ regulär auf $U_i = \varphi(W_i)$. Und es gilt $U = (U_1 \cap V) \cup \cdots \cup (U_s \cap V)$. Zu guter Letzt ist $g \circ \varphi^{-1}|_(U_i \cap V) = g_i|_(U_i \cap V)$, also $g \circ \varphi$ regulär auf U und damit ein Urbild von g. □

6.4. Zeigen Sie, dass sich zwei Kurven im $\mathbb{P}^2$ immer schneiden.

Lösung. Dies ist nun eine relativ einfache Anwendung der vorigen Aufgabe. Seien C_1 und C_2 zwei Kurven (OE irreduzibel) im $\mathbb{P}^2$. angenommen $C_1 \subset \mathbb{P}^2 \setminus C_2$. Nach voriger Aufgabe ist $\mathbb{P}^2 \setminus C_2$ eine affine Varietät, und somit C_1 als abgeschlossene Teilmenge ebenfalls isomorph zu einer irreduziblen affine Varietät C (?....!). Andererseits sieht man an der Tatsache, dass $\mathcal{O}_{C_1}(C_1) = K$ deutlich, dass dies nicht sein kann, da $K[V] \neq K$, da V nicht nur aus einem Punkt besteht. □

0.0.1 Ergänzungsaufgabe zu Tensorprodukten

Sei R ein kommutativer Ring mit 1, seien A, B zwei R-Moduln. Sei $\mathcal{F}$ der freie R-Modul erzeugt von $A \times B$ und $\mathcal{U}$ der Untermodul erzeugten von den Teilmengen

$$\{(ra_1 + a_2, b) - r(a_1, b) - (a_2, b) \mid a_1, a_2 \in A, b \in B, r \in R\},$$

$$\{(a, rb_1 + b_2) - r(a, b_1) - (a, b_2) \mid a \in A, b_1, b_2 \in B, r \in R\}.$$

Wir schreiben $A \otimes_R B$ für den R-Modul $\mathcal{F}/\mathcal{U}$, und $a \otimes b$ für die *Elementartensoren* $(a, b) + \mathcal{U}$. Zeigen Sie:

a) $T = A \otimes_R B$ erfüllt mit der R-bilinearen Abbildung $\gamma : A \times B \to T, (a, b) \mapsto a \otimes b$ folgende Eigenschaft $(\star)$:
Für jeden R-Modul M und jede bilineare Abbildung $\psi : A \times B \to M$ gibt es genau einen R-Modulhomomorphismus $\varphi : T \to M$ mit $\varphi \circ \gamma = \psi$.

Lösung. Sei $\psi : A \times B \to M$ eine R-bilineare Abbildung. Wir zeigen zuerst, dass durch $\varphi(a \otimes b) := \psi(a, b)$ ein R-Modulhomomorphismus definiert ist. Dazu betrachten wir zunächst den R-Modulhomomorphismus $\varphi' : \mathcal{F} \to M$, der durch Wertevorgabe auf der Basis $\varphi'(a, b) := \psi(a, b)$ wohldefiniert ist. Wenn wir zeigen, dass $\varphi'|_{\mathcal{U}} = 0$ ist, ist φ wie oben wohldefinierter Homomorphismus. Dazu genügt es zu zeigen, dass $\varphi'(x) = 0$ ist für alle x aus der $\mathcal{U}$ erzeugenden Teilmene... (diese kleine Rechnung darf jetzt jeder für sich ausführen).
Es ist völlig klar, dass φ eindeutig bestimmt ist, da die Werte auf den Elementartensoren $a \otimes b$ vorgegeben sind und diese den R-Modul $A \otimes B$ erzeugen. □

b) Sei T ein beliebiger R-Modul mit R-bilinearer Abbildung $\gamma' : A \times B \to T$, welcher obige Eigenschaft $(\star)$ erfüllt, so gibt es einen eindeutigen R-Modulisomorphismus σ zwischen T und $A \otimes_R B$, welcher γ' und γ respektiert (d.h. $\gamma = \sigma \circ \gamma'$).
(Man nennt ein solches T zusammen mit γ' dann *Tensorprodukt von A und B* und Eigenschaft $(\star)$ eine *universelle Eigenschaft des Tensorprodukts*).

Lösung. Betrachte die bilineare Abbildung $\gamma' : A \times B \to T$, dann gibt es nach voriger Aufgabe genau ein $\varphi : A \otimes B \to T$ mit $\varphi \circ \gamma = \gamma'$. Umgekehrt gibt es ebenso genau ein $\varphi' : T \to A \otimes B$ mit $\varphi' \circ \gamma' = \gamma$. Dies führt zu $\varphi' \circ \varphi \circ \gamma = \gamma$ und $\varphi \circ \varphi' \circ \gamma' = \gamma'$. Dann aber muss (wieder wegen Eigenschaft $(\star)$) sowohl $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id_T}$ als auch $\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id_{A \otimes B}}$ sein. □

c) Seien nun A und B zwei R-Algebren. Zeigen Sie, dass es genau eine Multiplikation auf $A \otimes_R B$ gibt mit $a_1 \otimes b_1 \cdot a_2 \otimes b_2 = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$ für alle $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$, welche $A \otimes_R B$ zu einer R-Algebra macht.

Lösung. Eindeutigkeit ist klar. Zur Existenz muss man eben die Wohldefiniertheit nachprüfen. Dafür wiederum genügt es für fixierten Elementartensor $a \otimes b$ die entsprechende Bilineare Abbildung $b_{a,b} : A \times B \to A \otimes B, (c, d) \mapsto ac \otimes bd$ zu betrachten und entsprechend mit γ über $A \otimes B$ umzuleiten. □

d) Seien A und B zwei R-Algebren mit 1, dann ist $T = A \otimes_R B$ eine R-Algebra mit 1, und durch $i_A : A \to T, a \mapsto a \otimes 1$ und $i_B : B \to T, b \mapsto 1 \otimes b$ sind R-Algebrenhomomorphismen gegeben mit $i_A(a) i_B(b) = i_B(b) i_A(a)$ für alle $a \in A, b \in B$.

e) Für die R-Algebra $T = A \otimes_R B$ mit 1 und i_A, i_B aus der vorigen Teilaufgabe gilt:
Zu einer R-Algebra C mit 1, und Algebrenhomomorphismen $j_A : A \to C$ und $j_B : B \to C$ mit $j_A(a)j_B(b) = j_B(b)j_A(a)$ für alle $a \in A, b \in B$, gibt es genau einen R-Algebrenhomomorphismus $\varphi : T \to C$ mit $\varphi \circ i_A = j_A$ und $\varphi \circ i_B = j_B$.

f) Zeigen Sie: Dies ist eine universelle Eigenschaft für Tensorprodukte von R-Algebren mit 1.