Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. A. Prestel
WS 2008/2009

ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

9. Übungsblatt
Abgabe am Freitag, den 9. Januar 2008 in der Vorlesung

9.1. Seien X und Y Prävarietäten.

a) Man zeige, dass die Projektionen $\pi_1 : X \times Y \to X$ und $\pi_2 : X \times Y \to Y$ offene Abbildungen sind *(d.h. Bilder offener Teilmengen sind offen).* Sind die Projektionen auch notwendigerweise abgeschlossene Abbildungen? *(d.h. Bilder abgeschlossener Teilmengen sind abgeschlossen)*

b) Zeigen Sie: Ist $W \subset X$ offen (bzw. abgeschlossen), dann ist auch $W \times Y$ offen (bzw. abgeschlossen) in $X \times Y$.

9.2. Sei X eine projektive Varietät und Y eine offene Teilmenge einer projektiven Varietät (in der Literatur auch Quasiprojektive Varietät genannt). Zeigen Sie, dass die Projektion $\pi_2 : X \times Y \to Y$ abgeschlossen ist.

9.3. Beschreiben Sie jeweils die Ringe der (globalen) regulären Funktionen von $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{P}^1$, sowie $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$.

9.4. Sei $\varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ der durch die Polynome $f_1, \ldots, f_n \in K[X_1, \ldots, X_n]$ definierte Morphismus und sei $J_\varphi := \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ das *Jacobische Polynom* von φ.
In Aufgabe 7.3 war zu zeigen: Ist φ ein Isomorphismus, so ist $J_\varphi \in K \setminus \{0\}$ konstant.
Gilt für $n \geq 2$ auch die Umkehrung?

Ergänzungsaufgaben zum Tensorprodukt

Definition Eine kurze Sequenz $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ von Objekten (z.B. Moduln über einem kommutativen Ring R mit 1) und Morphismen (z.B. R-Modulhomomorphismen) in eine Kategorie (z.B. der Kategorie der R-Moduln zusammen mit den R-Modulhomomorphismen) heißt exakt an der Stelle M, falls $\mathrm{im}\,(f) = \ker\,(g)$ ist.
Eine endliche Sequenz $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$ heißt exakt, falls sie exakt an den Stellen $M_2, \ldots, M_{n-1}$ ist.

0.2. Sind $f : M_1 \to N_1$ und $g : M_2 \to N_2$ zwei R-Modulhomomorphismen, dann ist durch

$$\begin{aligned} f \otimes g : M_1 \otimes_R M_2 &\to N_1 \otimes_R N_2 \\ m_1 \otimes m_2 &\mapsto f(m_1) \otimes g(m_2) \end{aligned}$$

ein R-Modulhomomorphismus definiert.

0.3. Sei

$$M' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{f} M'' \to 0$$

eine exakte Sequenz von R-Moduln, und sei N ein weiterer R-Modul. Dann ist auch die Sequenz

$$M' \otimes_R N \xrightarrow{f' \otimes \mathrm{id}} M \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}} M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$

exakt.

0.4. Sei M ein R-Modul und I ein Ideal von R. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$M \otimes_R (R/I) \to M/IM$$

von R-Moduln, wobei IM der von allen Elementen ax mit $a \in I$ und $x \in M$ erzeugte Untermodul von M ist.

0.5. Seien

$$M' \xrightarrow{f'} M \xrightarrow{f} M'' \to 0,$$

$$N' \xrightarrow{g'} N \xrightarrow{g} N'' \to 0$$

zwei exakte Sequenzen von R-Moduln. Zeigen Sie, dass dann auch die Sequenz

$$(M' \otimes_R N) \oplus (M \otimes_R N') \xrightarrow{(f' \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes g')} M \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes g} M'' \otimes_R N'' \longrightarrow 0$$

exakt ist.

0.6. Sei K ein Körper und seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Beschreiben Sie so explizit wie möglich:

1.) $\mathbb{Z}/(m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n)$;
2.) $K[X]/(X^m) \otimes_{K[X]} K[X]/(X^n)$;
3.) $K[X] \otimes_K K[X]$;
4.) $\mathbb{R}[X] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

0.7. Sei R ein kommutativer Ring mit 1 (nicht notwendigerweise Integritätsring). Sei $S \subset R$ eine multiplikative Menge ($S \cdot S \subset S$, $1 \in S$) und M ein R-Modul. Zeigen Sie, dass durch $\frac{r}{s} \otimes_R m \longmapsto \frac{rm}{s}$ ein Isomorphismus zwischen den R_S-Moduln $R_S \otimes_R M$ und M_S definiert wird, wobei M_S analog zu R_S aus den Äquivalenzklassen von formalen Brüchen $\frac{m}{s}$ mit $m \in M$, $s \in S$ besteht, wobei $\frac{m_1}{s_1} \sim \frac{m_2}{s_2}$ genau dann, wenn es ein $s \in S$ gibt mit $s(s_2 m_1 - s_1 m_2) = 0$.