Universität Konstanz 21. November 2005
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. A. Prestel
David Grimm

Mathematische Logik

4. Übungsblatt

Aufgabe 1 Gegeben sei die Formale Sprache L von Blatt2 Aufgabe 3, zusammen mit dem dort gegebenen Axiomensystem Σ. Zeige

$$\Sigma \vdash \forall x\ 0 + x \doteq x, \text{ sowie } \Sigma \vdash \forall x\ (-x) + x \doteq 0.$$

Freiwilliger Zusatz: Zeige

$$\Sigma \cup \{1 \cdot x \doteq x\} \vdash (-1) \cdot x \doteq -x$$

Aufgabe 2 Zeige:

(i) $\emptyset \vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

Hinweis: Die Verwendung der aussagenlogischen Tautologien

$$(\alpha \to (\varphi \to \psi)) \to ((\beta \to \varphi) \to (\alpha \land \beta \to \psi))$$

sowie

$$(\alpha \land \beta \to \psi) \to (\alpha \to (\beta \to \psi))$$

mit geeigneten Formeln α und β könnten hilfreich sein.

(ii) $\emptyset \vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x\varphi \to \psi)$ falls $x \notin \mathrm{Fr}(\psi)$.

(iii) Finde eine formale Sprache L, einen (mathematischen) Bereich, bezügliche welchem den Zeichen der Sprache "sinnvoll" eine Bedeutung "zugeordnet" werden kann. Und gib Formeln φ und ψ mit $\mathrm{Fr}(\varphi) \cup \mathrm{Fr}(\psi) = \{x\}$ an, so daß die Aussage

$$\forall x\varphi \to \forall x\psi$$

in dem mathematischen Bereich "gilt", nicht aber die Aussage

$$\forall x\,(\varphi \to \psi)\,.$$

Aufgabe 3 Zeige, dass aus $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ nicht notwendig

$$\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)$$

folgt, wenn φ keine Aussage ist.

Hinweis: Um zu zeigen dass eine Formel nicht beweisbar aus einem Axiomensystem ist, darf man einen mathematischen Bereich (wie z.B. die reellen Zahlen) angeben, in dem alle Axiome "gelten", nicht aber besagte Formel.

Abgabe: Mittwoch 29. November 2005, in der Vorlesung.