Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. A. Prestel
David Grimm

29. November 2006

Mathematische Logik

5. Übungsblatt

Aufgabe 1 Formuliere in der Sprache der Körpertheorie $(+, \cdot, 0, 1)$: Jedes irreduzible Polynom vom Grad n ist separabel.

Für die Nichtmathematiker: Ein Polynom f heißt irreduzibel, wenn in jeder Darstellung von f als Produkt zweier Polynome eines davon schon eine Konstante sein muss. Ein Polynom heißt separabel, wenn es außer Konstanten keine gemeinsamen Teiler mit seiner formalen Derivation (d.h. Ableitung) hat.

Aufgabe 2 Bezeichne Q einen beliebigen Quantor, d.h. $Q = \forall$ oder $Q = \exists$. Sei $Q^\vee$ dann der entsprechende andere Quantor, d.h. falls $Q = \forall$, dann ist $Q^\vee = \exists$ und umgekehrt.

(i) Seien φ und ψ Formeln. Zeige die folgende abgeleitete Regel:

$$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{Qx\ \varphi \leftrightarrow Qx\ \psi}$$

(ii) Sei φ eine Formel. Zeige:

$$\emptyset \vdash\ \neg Qx\ \varphi\ \leftrightarrow\ Q^\vee x\ \neg\varphi$$

(iii) Seien φ und ψ Formeln mit $x \notin \mathrm{Fr}(\varphi)$. Zeige $\emptyset \vdash (\varphi \wedge \forall x\psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \wedge \psi)$

(iv) Zeige, dass es zu jeder Formel φ eine Formel ψ der Gestalt $Q_1x_1 \cdots Q_rx_r\ \tilde{\varphi}$ mit quantorenfreiem $\tilde{\varphi}$ gibt, so dass gilt

$$\emptyset \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$$

Aufgabe 3 Sei Σ eine Aussagenmenge und $(\Sigma_i)_{i\in I}$ eine Familie von Aussagenmengen einer beliebigen Sprache L. Zeige

(i) Σ ist genau dann widerspruchsfrei, wenn es jede endliche Teilmenge von Σ ist.

(ii) Falls die Σ_i eine Kette bilden, d.h. falls zu je zwei $i, j \in I$ entweder $\Sigma_i \subseteq \Sigma_j$ oder $\Sigma_j \subseteq \Sigma_i$ gilt, so ist

$$\bigcup_{i\in I} \Sigma_i$$

genau dann widerspruchsfrei, wenn alle Σ_i widerspruchsfrei sind.

(iii) Gilt Aussage (ii) auch ohne die Kettenbedingung?

Abgabe: Donnerstag 6. Dezember 2006, in der Vorlesung.