

Mathematische Logik

6. Übungsblatt

Aufgabe 1 Sei L eine formale Sprache und \mathcal{A} eine L -Struktur. Sei t ein konstanter L -Term, d.h. ein Term in L ohne Variablen. Zeige dass für beliebige L -Terme \tilde{t} und alle Variablenbelegungen h gilt

$$\tilde{t}(x/t)^{\mathcal{A}}[h] = \tilde{t}^{\mathcal{A}}[h\left(\begin{smallmatrix} x \\ t^{\mathcal{A}} \end{smallmatrix}\right)]$$

Sei L eine formale Sprache und \mathcal{A} eine L -Struktur. Sei t ein konstanter L -Term, d.h. ein Term in L ohne Variablen. Zeige dass für beliebige L -Formeln φ und alle Variablenbelegungen h gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi(x/t)[h] \iff \mathcal{A} \models \varphi[h\left(\begin{smallmatrix} x \\ t^{\mathcal{A}} \end{smallmatrix}\right)].$$

Aufgabe 2 Sei die Sprache $L = (R_1; c_0)$ gegeben, wobei R_1 ein zweistelliges Relationszeichen und c_0 ein Konstantenzeichen ist. Sei die L -Aussagenmenge Σ gegeben durch

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \quad & (R_1(x, y) \wedge R_1(y, z) \rightarrow R_1(x, z)) \\ \forall x \exists y \quad & R_1(x, y) \\ \forall x \quad & \neg R_1(x, x) \end{aligned}$$

- (i) Zeige, daß Σ widerspruchsfrei ist.
- (ii) Zeige, daß für jede L -Struktur \mathcal{A} mit $\mathcal{A} \models \Sigma$ gilt: $|\mathcal{A}|$ ist unendlich.

Abgabe: Mittwoch 20. Dezember 2006, in der Vorlesung.