Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. A. Prestel
David Grimm

20. Dezember 2006

Mathematische Logik

7. Übungsblatt

Aufgabe 1 Finde in den jeweils angegebenen Sprachen Axiomensysteme für die folgenden Klassen von Strukturen:

(i) Mengen mit höchstens n Elementen ($I = J = K = \emptyset$)

(ii) Mengen mit mindestens n Elementen ($I = J = K = \emptyset$)

(iii) Unendliche Mengen ($I = J = K = \emptyset$)

(iv) Körper mit Charakteristik 0 $(+, \cdot, 0, 1)$

(v) Körper ohne echte Einheitswurzeln $(+, \cdot, 0, 1)$

Aufgabe 2 Sei $L = (+, -, \cdot, 0, 1)$ die Sprache der Körpertheorie.

(i) Finde ein Axiomensystem $\Sigma \subseteq \text{Aus}(L)$, das den Körper $\mathbb{F}_{49}$ bis auf Isomorphie charakterisiert.

(ii) Finde ein Axiomensystem $\Sigma \subseteq \text{Aus}(L)$, welches gerade die endlichen Körpererweiterungen von $\mathbb{F}_{49}$ vom Grad ≤ 7 beschreibt.

Aufgabe 3 Sei $L = (+, -, \cdot, 0, 1)$ wie oben. Sei weiter $\Sigma \subseteq \text{Aus}(L)$ die Menge aller Aussagen, die in $\mathbb{Q}$ gelten. Wir erweitern L nun durch Hinzunahme der neuen Konstanten $\{c_r\}_{r \in \mathbb{R}}$ (also überabzählbar viele) zur Sprache L'. Sei $\Lambda \subseteq \text{Aus}(L')$ die folgende Menge von Axiomen:

$$\Lambda := \{c_r \neq c_t \mid r, t \in \mathbb{R}, r \neq t\}.$$

(i) Zeige, dass die Menge $\Sigma \cup \Lambda$ ein Model besitzt.

(ii) Zeige, dass kein Modell von $\Sigma \cup \Lambda$ zu $\mathbb{Q}$ isomorph sein kann.

(iii) Folgere aus (i) und (ii), dass es kein Axiomensysten in der Sprache L geben kann, das $\mathbb{Q}$ bis auf Isomorphie charakterisiert.

Aufgabe 4 Sei wieder L wie oben die Sprache der Körpertheorie.

Für welche Körper $\mathcal{A}$ ist der Individuenbereich $|\mathcal{A}|$ gleich der Menge

$$\left\{t^{\mathcal{A}} \mid t \text{ ist konstanter Term } \right\}?$$

Abgabe: Donnerstag, 10. Januar 2007, 10 Uhr, in der Vorlesung.