Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. A. Prestel
David Grimm

10. Januar 2007

# Mathematische Logik

8. Übungsblatt

**Aufgabe 1** Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nichtleere Mengen. Sei $L(+, -, \cdot, A, B, 0, 1)$ die übliche Sprache der Körpertheorie, erweitert durch die einstelligen Relationszeichen $A$ und $B$, die jeweils Zugehörigkeit eines Elementes zur Menge $A$ bzw. $B$ ausdrücken sollen.

Finde eine Formel in der Sprache $L$, die

$$\inf B \leq \sup A$$

ausdrückt.

**Aufgabe 3** Sei $E$ ein zweistelliges Relationszeichen und $L = (E)$ die *Sprache der Graphen*. Unter einem *Graph* verstehen wir eine (möglicherweise unendliche) $L$-Struktur $\mathcal{A}$, in der die zweistellige Relation $E^{\mathcal{A}}$ symmetrisch und irreflexiv ist (man stelle sich den Individuenbereich als Menge von Punkten vor, in der zwei Punkte $x, y$ genau dann durch eine Linie verbunden sind, wenn $E^{\mathcal{A}}(x, y)$ gilt).

Welche der folgenden Klassen von $L$-Strukturen sind axiomatisierbar? Gib jeweils ein Axiomensystem an oder zeige mit dem Endlichkeitssatz, dass es kein Axiomensystem geben kann.

(i) Die Klasse aller Graphen

(ii) Die Klasse aller $L$-Strukturen, die keine Graphen sind

(iii) Die Klasse aller endlichen Graphen, d.h. Graphen mit endlichem Individuenbereich

(iv) Die Klasse aller unendlichen Graphen

(v) Die Klasse aller zusammenhängenden Graphen. Dabei heißt ein Graph zusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten $x, y$ einen endlichen Weg von $x$ nach $y$ gibt, d.h. eine endliche Abfolge von Linien, die bei $x$ beginnt und bei $y$ endet.

**Aufgabe 4** Sei $L$ eine formale Sprache. Sei $X_L$ die Klasse aller $L$-Strukturen.

(i) Zeige, dass die Teilklassen

$$\mathrm{Mod}_\Sigma := \{\mathcal{A} \in X_L \mid \mathcal{A} \models \Sigma\} \subset X_L, \quad \Sigma \subset \mathrm{Aus}(L)$$

die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $X_L$ sind.

(ii) Zeige mit Hilfe des Endlichkeitssatzes, daß $X_L$ bzgl. dieser Topologie quasikompakt ist.

(iii) Zeige, daß umgekehrt aus der Annahme, daß $X_L$ quasikompakt ist, der Endlichkeitssatz folgt.

(iv) Man überlege sich ein Beispiel, das belegt, daß $X_L$ bezüglich der Topologie i.a. nicht hausdorffsch ist.
*Ein topologischer Raum heißt quasikompakt, wenn es zu jeder Überdeckung durch eine beliebige Familie von offenen Mengen eine endliche Teilfamilie gibt, die bereits den Raum übderdeckt. Ein topologischer Raum heißt hausdorffsch, wenn es zu je zwei Punkten zwei offene disjunkte Umgebungen der Punkte gibt. Ein topologischer Raum, der sowohl quasikompakt, als auch hausdorffsch ist nennt man kompakt (in manchen Lehrbüchern wird allerdings auf die Forderung "hausdorffsch" verzichtet).*

Abgabe: Mittwoch, 17. Januar 2007, in der Vorlesung.