Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. A. Prestel
Tim Netzer

22. Dezember 2005

Mathematische Logik

9. Übungsblatt

Sei L eine formale Sprache und $\mathcal{A}$ eine L-Struktur. Sei weiter φ eine Formel in L in den freien Variablen $x, y_1, \ldots, y_m$.
Zu $a \in |\mathcal{A}|$ und $b = (b_1, \ldots, b_m) \in |\mathcal{A}|^m$ definieren wir die Variablenbelegung $h_{a,b}$ durch

$$h_{a,b}(x) := a \text{ und } h_{a,b}(y_j) := b_j \text{ für } j = 1, \ldots, m.$$

Schließlich sei

$$\varphi(\mathcal{A}, b) := \{a \in |\mathcal{A}| \ \mid \mathcal{A} \models \varphi[h_{a,b}]\}\,.$$

Wir nennen eine Teilmenge U von $|\mathcal{A}|$ *definierbar über* $|\mathcal{A}|$, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$, eine Formel φ in den freien Variablen $x, y_1, \ldots, y_m$ und ein $b = (b_1, \ldots, b_m) \in |\mathcal{A}|^m$ gibt mit $U = \varphi(\mathcal{A}, b)$. Ist dabei φ quantorenfrei, so nennen wir U *quantorenfrei über* $|\mathcal{A}|$ *definierbar*.

Aufgabe 1 Sei $L = (+, \cdot, 0, 1)$ die Sprache der Körpertheorie und sei K ein Körper.

(i) Bestimme alle Teilmengen von K, die quantorenfrei über K definierbar sind.

(ii) Wie sehen allgemeine über K definierbaren Teilmengen von K aus?

Aufgabe 2 Sei L eine formale Sprache und $\mathcal{A}$ eine L-Struktur. Sei für $i = 1, \ldots, m$ φ_i eine L-Formel in der freien Variablen y_i und sei Θ eine L-Formel in den freien Variablen $y_1, \ldots, y_m, x$. Definiere dann die Formel ψ wie folgt:

$$\psi: \ \exists y_1, \ldots, y_m \left[\bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i \wedge \Theta \wedge \left(\exists x_1, \ldots, x_p \forall x \ (\Theta \to \bigvee_{j=1}^{p} x = x_j) \right) \right].$$

Es gilt $\mathrm{Fr}(\psi) = \{x\}$.

(i) Zeige: Falls für alle $i = 1, \ldots, m$ die Mengen

$$\varphi_i(\mathcal{A}) := \{a \in |\mathcal{A}| \ \mid \mathcal{A} \models \varphi_i[h : y_i \mapsto a]\}$$

endlich sind, so ist es auch die Menge

$$\psi(\mathcal{A}) := \{a \in |\mathcal{A}| \ \mid \mathcal{A} \models \psi[h : x \mapsto a]\}\,.$$

Bitte wenden

(ii) Sei B eine Teilmenge von $|\mathcal{A}|$ und $a \in |\mathcal{A}|$. Wir nennen a *algebraisch über* B, falls es ein $m \in \mathbb{N}$, eine L-Formel φ in den freien Variablen $x, y_1, \ldots, y_m$ und ein $b = (b_1, \ldots, b_m) \in B^m$ gibt, so dass $a \in \varphi(\mathcal{A}, b)$ gilt und $\varphi(\mathcal{A}, b)$ endlich ist.

Zeige: Ist $C \subseteq B \subseteq |\mathcal{A}|$, und ist jedes Element aus B algebraisch über C, so ist jedes a aus $|\mathcal{A}|$, das algebraisch über B ist, auch algebraisch über C.

Aufgabe 3 Diese Aufgabe ist zur Überprüfung der eigenen Kenntnisse gedacht, darf aber auch abgegeben werden.

(i) Was ist eine formale Sprache L? Was ist eine L-Formel? Was ist der Unterschied zwischen einer gebundenen und einer freien Variablen?

(ii) Was ist eine L-Struktur? Wie ist das "Gelten" einer L-Aussage in einer L-Struktur definiert? Was versteht man unter der Theorie einer L-Struktur?

(iii) Was ist ein Modell einer Aussagenmenge? Was für ein Zusammenhang besteht zwischen einer Aussagenmenge und der Theorie eines Modells davon?

(iv) Sei Σ eine Menge von L-Aussagen, φ eine L-Aussage und $\mathcal{A}$ eine L-Struktur. Was bedeuten die folgenden Ausdrücke:

$$\Sigma \vdash \psi \qquad \Sigma \models \varphi \qquad \mathcal{A} \models \varphi \qquad \mathcal{A} \models \Sigma$$

(iv) Was besagt der Gödel'sche Vollständigkeitssatz? Wie beweist man daraus den Endlichkeitssatz?

(v) Was bedeutet deduktiv abgeschlossen? Was ist eine vollständige Aussagenmenge?

(vi) Was versteht man unter einem Axiomensystem einer Theorie? Was versteht man unter Axiomatisierbarkeit einer Klasse von Strukturen?

Abgabe: Donnerstag, 12. Januar 2006, 10 Uhr, in die Briefkästen auf F4.