Auflösung von Singularitäten ebener Kurven

Seminarausarbeitungen des Seminars *Algebraische Kurven* im Sommersemester 2009 an der Universität Konstanz[1]

Dominic Barth, David Grimm, Tibor Herrmann,
Lukas Prinzen, Peter Schanbacher, Anastasia Staub

[1]Seminarbetreuung durch Karim Johannes Becher und David Grimm

Vorwort

Dieses kurze Buch ist enstanden aus den Ausarbeitungen der Vorträge im Hauptstudiumsseminar 'Algebraische Kurven' im Sommersemester 2009 an der Universität Konstanz.
Inhaltlich war das Ziel, mit relativ wenigen Vorträgen das Thema *Auflösung von Singularitäten ebener Kurven über algebraisch abgeschlossenen Körpern* abzudecken, wobei wir uns in der Vorgehensreihensweise lose an *Fultons* Buch [**Fu**] gehalten haben.
Der geringen Teilnehmerzahl, aber auch der Tatsache, dass die meisten der Teilnehmer im vorangegangenen Semester eine Einführungsvorlesung zur *algebraischen Geometrie* von Prof. A. Prestel gehört haben, hat uns dazu bewogen ausgehend von den Begriffen und Wissen dieser Vorlesung in die Thematik einzusteigen, und nicht im Fultonstil erst langsam die Begrifflichkeiten aufzubauen. Im Anhang an die Ausarbeitungen ist deswegen ein Appendix, der nocheinmal zusammenfasst von welchem Wissen über die algebraische Geometrie die Seminarteilnehmer in ihren Vorträgen haben ausgehen dürfen.
An dieser Stelle möchte ich das Engagement der Studenten hervorheben, die ja die nicht ganz einfache Aufgabe hatten, alles was im Buch von Fulton zu ihrem Thema zu finden war in den Kontext der Begriffe der vorangegangenen Vorlesung zu setzen. Dies verlangte stellenweise etwas andere Beweiswege, auf die die Studenten selbst - natürlich unter Betreuung durch die Seminarleiter - kommen und dann auch selbst formulieren mussten.
Ausschliesslich der geringen Teilnehmerzahl war geschuldet, das das Thema *Intersection numbers*, welchem im Buch [**Fu**] viel Platz eingeräumt wird, nicht behandelt wurde, und deshalb der *Satz von Bezout* bei einem Algorithmus im Vortrag *quadratische Transformationen* leider unbewiesen verwendet wird. Es ist aber anzumerken, dass in allen anderen Beweise in dieser Ausarbeitungssammlung die Verwendung des Konzepts der '*intersection numbers*' ohne allzugrossen Aufwand umgangen wurde, was letztlich die Beweise hier, im Vergleich zu den entsprechenden in [**Fu**], etwas transparenter macht.
Zu guter Letzt möchte ich darauf hinweisen, dass es sich bei dieser Zusammenstellung um eine vorläufige handelt, wobei klar sein dürfte, dass fast alle Fehler und Inkonsistenzen in den Ausarbeitungen noch unkorrigiert sind, so wird an einigen Stellen im ersten Vortrag zum Beispiel auf Übungen in [**Fu**] verwiesen (was allerdings nicht weiter schlimm ist, da die dadurch bewiesenen Tatsachen doch relativ einfach selbst zu verifizieren sind). Ausserdem mag es beim Durchlesen etwas verwirrend erscheinen, dass teilweise der Grundkörper als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt wird und teilweise nicht (und darüberhinaus die Bezeichnungen zwischen K und k hin- und-herwechseln). Dies liegt daran, dass es unser ursprüngliches Ziel war, Auflösung von Singularitäten über allgemeinen Körpern, statt nur über algebraisch abgeschlossenen Körpern zu zeigen. Erst im Laufe des Seminars ist uns klar geworden, dass dieses Vorhaben für uns im Rahmen der Vorgehensweise von Fulton doch zu ambitioniert war.
Mit diesen Warnungen im Kopf, denke ich, dass die Ausarbeitungssammlung einen knappen Zugang zum Thema 'Auflösung von Singularitäten ebener Kurven' bietet für Studenten, die gerade eine Einführungsvorlesung in

'algebraische Geometrie' gehört haben, und sich die Zeit sparen wollen den etwas altmodischeren Zugang von Fulton zu diesen Grundlagen anzueignen. Wir hoffen, dass so Auflösungserscheinungen der Lernmotivation verhindert werden, bevor man sich überhaupt den Auflösungserscheinungen bei Kurven widmen kann.

David Grimm
Konstanz, 5.August 2009

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Lokale Funtionenringe und Regularität

Vortragsausarbeitung von Tibor Herrmann

Ziel des gemeinsamen Vortrags mit Peter Schanbacher ist es, zu einer algebraischen Definition für singuläre Punkte zu gelangen, welche im ebenen Fall mit der geometrischen übereinstimmt. Im ersten Teil wird bewiesen, dass jeder Punkt auf einer irreduziblen k-Varietät eine Umgebung isomorph zu einer affinen Varietät besitzt. Mit diesem Resultat genügt es dann, solche Eigenschaften eines Punktes auf einer irreduziblen k-Varietät, welche nur von Umgebungen des Punktes abhängen, bloß für den affinen Fall zu beweisen und anschließend den allgemeinen Fall auf die Isomorphie zurückzuführen.
Im zweiten Teil wird eine Formel für die Vielfachheit eines Punktes auf einer irreduziblen ebenen Kurve bewiesen, welche nur vom lokalen Ring des Punktes abhängt. Der Satz wird benötigt um eine Richtung des Theorems in Peters Vortrag zu beweisen.

1. Lokale Funktionenringe

1.1. Proposition. *Sei V eine irreduzible k-Varietät. Dann besitzt jeder Punkt $x \in V$ eine Umgebung, welche isomorph zu einer affinen Varietät ist.*

Beweis: (nach Shafarevich, "Basic Algebraic Geometry") Sei zunächst V quasiprojektiv. Ist $(x_0 : \cdots : x_n)$ eine Darstellung von $x \in V \subset \mathbb{P}^n$, so ist mindestens ein $x_i \neq 0$. ObdA sei $x_0 \neq 0$. Wir definieren

$$\mathbb{A}_0^n := \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n \mid x_0 \neq 0\}$$

Nun ist $\mathbb{A}_0^n$ kanonisch isomorph zum $\mathbb{A}^n$. Dann ist $V \cap \mathbb{A}_0^n$ isomorph zu einer quasiaffinen Varietät so daß $V \cap \mathbb{A}_0^n = Y \backslash Y_1$ mit $\mathbb{A}_0^n$-abgeschlossenen Mengen Y, Y_1 (ab hier auch quasiaffiner Fall).
Da $x \in V \cap \mathbb{A}_0^n$ gibt es mindestens ein Polynom F in Koordinaten von $\mathbb{A}_0^n$, so daß $F(y) = 0$ für alle $y \in Y_1$ und $F(x) \neq 0$. Wir schreiben $\mathcal{V}(F) \subset Y$ für die Nullstellenmenge von F in Y. Es ist dann $x \in Y \setminus \mathcal{V}(F) =: D(F)$ und $D(F)$ ist eine offene Umgebung von x. Wir zeigen, daß $D(F)$ die gesuchte Isomorphie erfüllt:
Da Y abgeschlossen gibt es Polynome $G_1, \ldots, G_m$ in Koordinaten von $\mathbb{A}_0^n$, deren gemeinsame Nullstellenmenge Y ist: $G_1(Y) = \cdots = G_m(Y) = \{0\}$. Wir betrachten die affine Varietät $W \subset \mathbb{A}^{n+1}$, welche gegeben ist durch die Gleichungen

$$G_1(X_1, \ldots, X_n) = \cdots = G_m(X_1, \ldots, X_n) = 0$$

$$F(X_1, \ldots, X_n) \cdot X_{n+1} = 1$$

Es ist dann $\varphi : \; W \to D(F), \; (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots x_n)$ bzw. $\varphi^{-1} : D(F) \to W, \; (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \left(x_1, \ldots, x_n, F(x_1, \ldots, x_n)^{-1}\right)$ der gesuchte Isomorphismus.

Wir stellen zunächst fest, daß φ bijektiv ist, da x_{n+1} über F bereits durch $x_1, \ldots, x_n$ bestimmt ist.

Stetigkeit von φ^{-1}: Wir zeigen, daß die Urbilder W-abgeschlossener Mengen abgeschlossen in $D(F)$ sind. OBdA genügt es dafür zu zeigen, daß das Urbild einer in W abgeschlossenen Menge, welche die durch das Verschwinden eines einzelnen Polynoms gegeben ist in $D(F)$ abgeschlossen ist.

Sei $B := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in W \mid p(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0\}$ für ein beliebiges p aus $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$. Gesucht ist ein Polynom $\tilde{p} \in k[X_1, \ldots, X_n]$, mit

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in D(F) \mid \tilde{p}(x_1, \ldots, x_n) = 0\} = \varphi^{-1}(B)$$

Da für alle $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in W$ gilt $x_{n+1} = \frac{1}{F(x_1, \ldots, x_n)}$ ist $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Nullstelle der gebrochenrationalen Funktion

$$q(X_1, \ldots, X_n) = p\left(X_1, \ldots, X_n, \frac{1}{F(X_1, \ldots, X_n)}\right)$$

Ist $d = \deg_{X_{n+1}} p$ der maximale Grad von X_{n+1} in p so definieren wir $\tilde{p} := F(X_1, \ldots, X_n)^d \cdot q(X_1, \ldots, X_n)$. Ähnlich wie beim Homogenisieren bzw. Dehomogenisieren macht man sich klar, daß $\tilde{p}$ ein Polynom in $k[X_1, \ldots, X_n]$ ist. Also $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Nullstelle von $\tilde{p}$ für jedes $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in W$.

Wir zeigen: Es ist $x \in W$ genau dann eine Nullstelle von p, wenn sein (eindeutig bestimmtes) Urbild $\varphi^{-1}(x)$ eine Nullstelle von $\tilde{p}$ in $D(F)$ ist. Wegen $F \neq 0$ auf $D(F)$ gilt

$$\begin{aligned} & \tilde{p}(x_1, \ldots, x_n) = \left(F^d \cdot q\right)(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \iff \quad & q(x_1, \ldots, x_n) = p\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{1}{F(x_1, \ldots, x_n)}\right) = p(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0 \end{aligned}$$

Stetigkeit von φ: Sei $p \in k[X_1, \ldots, X_n]$, und $V = \mathcal{V}(p) \cap D(F)$ so gilt $\varphi^{-1}(V) = \mathcal{V}(\widetilde{p}) \cap W$ für $p = \widetilde{p} \in k[X_1, \ldots X_{n+1}]$. Also sind Urbilder von abgeschlossenen Mengen abgeschlossen.

Erhaltung der Regulatität durch φ: Sei $U \subset D(F)$ offen und ist $r \in \mathcal{O}_{D(F)}(U)$ regulär auf U. Es ist zu zeigen, daß dann auch $r \circ \varphi$ regulär auf $\varphi^{-1}(U)$ ist. Da r regulär auf U gibt es eine endliche offene Überdeckung $\{U_i\}_{i=1,\ldots,j}$ von U und zu jedem U_i existieren Polynome $p_i, \; q_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$, so daß $\forall \xi \in U_i : \; q_i(\xi) \neq 0$ und $r_{|U_i} = \frac{p_i}{q_i}$. Wegen der Stetigkeit ist dann $\varphi^{-1}(U)$ offen in W und $\left\{\varphi^{-1}(U_i)\right\}_{i=1,\ldots,n}$ ist eine offene Überdeckung von $\varphi^{-1}(U)$. Identifizieren wir $k[X_1, \ldots, X_n]$ mit seiner Einbettung in $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ und fassen die p_i und q_i darüber als Elemente von $k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ auf, so ist $r \circ \varphi_{|U_i} = \frac{p_i}{q_i}$ also regulär auf $\varphi^{-1}(U)$.

Erhaltung der Regulatität durch φ^{-1}: Sei nun $\tilde{U} \subset W$ offen und $\tilde{r} \in \mathcal{O}_W(\tilde{U})$ regulär auf $\tilde{U}$ mit $\tilde{r}_{|\tilde{U}_i} = \frac{\tilde{p}_i}{\tilde{q}_i}$ für eine endliche offene überdeckung $\tilde{U} = \cup_{i=1}^{j} \tilde{U}_i$ und $\tilde{p}_i, \; \tilde{q}_i \in k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ mit $\tilde{q}_i \neq 0$ in $\tilde{U}_i$. Analog zu oben sind dann

$\varphi\left(\tilde{U}\right)$ und $\varphi\left(\tilde{U}_i\right)$ offen in $D(F)$ und $\varphi\left(\tilde{U}\right) = \cup_{i=1}^{j}\varphi\left(\tilde{U}_i\right)$. Es gilt eine Darstellung $\tilde{r}\circ\varphi^{-1}{}_{|\varphi(\tilde{U}_i)} = \frac{s_i}{t_i}$ zu finden mit $s_i,\, t_i \in k[X_1,\ldots,X_n]$ und $t_i \neq 0$ auf $\varphi\left(\tilde{U}_i\right)$.

Ist $d := \max\left(\deg_{X_{n+1}}\tilde{p}_i,\ \deg_{X_{n+1}}\tilde{q}_i\right)$ der maximale Grade von X_{n+1} in $\tilde{p}_i$ und $\tilde{q}_i$, so gilt

$$\tilde{r}\circ\varphi^{-1}{}_{|\varphi(\tilde{U}_i)} = \frac{F(X_1,\ldots,X_n)^d\cdot\tilde{p}_i\left(X_1,\ldots,X_n,\frac{1}{F(X_1,\ldots,X_n)}\right)}{F(X_1,\ldots,X_n)^d\cdot\tilde{q}_i\left(X_1,\ldots,X_n,\frac{1}{F(X_1,\ldots,X_n)}\right)} =: \frac{s_i}{t_i}$$

wobei s_i und t_i Polynome in $K[X_1,\ldots,X_n]$ sind.
Wegen $F(X_1,\ldots,X_n)\neq 0$ auf $W\supset\varphi\left(\tilde{U}_i\right)$ gilt

$$t_{i|\varphi(\tilde{U}_i)} = 0 \Leftrightarrow \tilde{q}_{i|\varphi^{-1}\circ\varphi(\tilde{U}_i)} = 0$$

also nach Vorraussetzung $t_{i|\varphi(\tilde{U}_i)} \neq 0$. Es ist damit gezeigt, daß $\tilde{r}\circ\varphi^{-1}$ regulär auf $\varphi\left(\tilde{U}\right)$ ist.

□

1.2. Korollar. *Sei V eine irreduzible k-Varietät. Dann gibt es eine endliche offene überdeckung, deren Mengen isomorph zu affinen Varietäten sind.*

1.3. Bemerkung. Äquivalenz zwischen unserer Definitionen von lokalen Ringen und derjenigen in [**Fu**] im affinen, irreduziblen Fall:
Bei Fulton ist der lokale Ring eines Punktes P auf einer affinen, irreduziblen k-Varietät V definiert als

$$\mathcal{O}_P^{[F]}(V) := \left\{ f\in \text{Quot }(k[V]) \mid \exists\, p\in k[V],\ q\in k[V]\setminus\{0\}\ q(P)\neq 0\ :\ f=\frac{p}{q}\right\}$$

wobei $k[V]$ den Koordinatenring von V bezeichnet. Erinnerung: Unsere Definition 5.29 ist

$$\mathcal{O}_P(V) \quad := \{(U,r)\mid U \text{ offen um } P,\ r\in\mathcal{O}_V(U)\}/_{\sim_P}$$

wobei $(U_1,r)\ \sim_P\ (U_2,s) :\Longleftrightarrow r_{|U_1\cap U_2} = s_{|U_1\cap U_2}$ für $r\in\mathcal{O}_V(U_1),\ s\in\mathcal{O}_V(U_2)$ mit $U_1,\,U_2$ offene Umgebungen von P in V.

1.4. Bemerkung. Ist V eine irreduzible affine k-Varietät und $P\in V$, dann gilt $\mathcal{O}_P^{[\mathcal{F}]}(V)\cong\mathcal{O}_P(V)$.

Beweis: Zu $f\in\mathcal{O}_P^{[\mathcal{F}]}(V)$ sei $f=\frac{\bar{p}}{\bar{q}},\ \bar{q}(P)\neq 0$ eine Darstellung. Es gibt dann Vertreter $p,\,q\in k[X_1,\ldots,X_n]$, so daß $p\equiv\bar{p} \bmod I(V)$ und $q\equiv\bar{q}\bmod I(V)$ ist. Wir zeigen daß

$$\begin{array}{rrcl} \pi: & \mathcal{O}_P^{[\mathcal{F}]}(V) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_P(V) \\ & f & \longmapsto & \left[\left(D(\bar{q}),\frac{p}{q}\right)\right] \end{array}$$

ein Isomorphismus ist. Für $\bar{q}\in k[V]$ mit $\bar{q}(P)\neq 0$ bezeichnet $D(\bar{q})$ die Menge $V\setminus\{N\in V\mid \bar{q}(N)=0\}$. Dies ist die größte V-offene Umgebung von P, auf der $\bar{q}$ keine Nullstelle besitzt.

Zunächst zur Wohldefiniertheit der Abbildung: Sind $f = \frac{\bar{p}}{\bar{q}} = \frac{\bar{r}}{\bar{s}}$, $\bar{q}(P)$, $\bar{s}(P) \neq 0$ zwei verschiedene Darstellungen von f, so ist $D := D(\bar{q}) \cap D(\bar{s})$ offen in V und es gilt für $\xi \in D$: $f(\xi) = \frac{\bar{p}}{\bar{q}}(\xi) = \frac{\bar{r}}{\bar{s}}(\xi) = \frac{p}{q}(\xi) = \frac{r}{s}(\xi)$. Es sind $\frac{p}{q} \in \mathcal{O}_V(D(\bar{q}))$ und $\frac{r}{s} \in \mathcal{O}_V(D(\bar{s}))$ mit $\frac{r}{s}_{|D} = \frac{p}{q}_{|D}$. Also gilt $\left(D(\bar{q}), \frac{p}{q}\right) \sim_P \left(D(\bar{s}), \frac{r}{s}\right)$ und die Abbildung ist Wohldefiniert.
Die Injektivität von π ist die Umkehrrichtung der Wohldefiniertheit: Ist $\mathcal{O}_P(V) \ni \bar{r} = \left[\left(D(\bar{q}), \frac{p}{q}\right)\right] = \left[\left(D(\bar{s}), \frac{r}{s}\right)\right]$ bei gleicher Bezeichnung wie oben, so ist zu zeigen, daß $\frac{\bar{p}}{\bar{q}} = \frac{\bar{r}}{\bar{s}} \in \mathcal{O}_P^{[\mathcal{F}]}$ gilt. Nach definition von $\bar{r} \in \mathcal{O}_P(V)$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& \left(D(\bar{q}), \frac{p}{q}\right) \sim_P \left(D(\bar{s}), \frac{r}{s}\right) \\
\iff \quad & \frac{r}{s}_{|D} = \frac{p}{q}_{|D} \\
\iff \quad & \frac{\bar{p}}{\bar{q}}_{|D} = \frac{\bar{r}}{\bar{s}}_{|D} \\
\underset{D \text{ dicht in } V}{\iff} \quad & \frac{\bar{p}}{\bar{q}} = \frac{\bar{r}}{\bar{s}}
\end{aligned}
$$

Zum Beweis der Surjektivität wähle zu $\mathcal{O}_P(V) \ni \bar{r}$ einen Vertreter $\bar{r} = [(U, r)]$, U offen um P. Nach definition ist $r \in \mathcal{O}_V(U)$ und es gibt eine offene Umgebung $P \in \tilde{U} \subset U$, so daß $r_{|\tilde{U}} = \frac{p}{q}$ für $p, q \in k[X_1, \ldots, X_n]$, $q(P) \neq 0$. Mit $\mathcal{O}_P^{[\mathcal{F}]}(V) \ni f = \frac{\bar{p}}{\bar{q}}$ ist dann ein Urbild unter π gefunden.
Zum Beweis der Homomorphieeigenschaften wähle Bezeichnungen wie bisher. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\pi\left(\frac{\bar{p}}{\bar{q}} + \frac{\bar{r}}{\bar{s}}\right) &= \pi\left(\frac{\overline{p \cdot s + r \cdot q}}{\overline{q \cdot s}}\right) = \left[\left(D(\overline{qs}), \frac{p \cdot s + r \cdot q}{q \cdot s}\right)\right] \\
&= \left[\left(D(\bar{q}) \cap D(\bar{s}), \frac{p}{q} + \frac{r}{s}\right)\right] \\
&= \left[\left(D(\bar{q}) \cap D(\bar{s}), \frac{p}{q}\right)\right] + \left[\left(D(\bar{q}) \cap D(\bar{s}), \frac{r}{s}\right)\right] \\
&= \left[\left(D(\bar{q}), \frac{p}{q}\right)\right] + \left[\left(D(\bar{s}), \frac{r}{s}\right)\right] = \pi\left(\frac{\bar{p}}{\bar{q}}\right) + \pi\left(\frac{\bar{r}}{\bar{s}}\right) \qquad \surd
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\pi\left(\frac{\bar{p}}{\bar{q}} \cdot \frac{\bar{r}}{\bar{s}}\right) &= \pi\left(\frac{\overline{p \cdot r}}{\overline{q \cdot s}}\right) = \left[\left(D(\overline{qs}), \frac{p \cdot r}{q \cdot s}\right)\right] = \left[\left(D(\bar{q}) \cap D(\bar{s}), \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}\right)\right] \\
&= \left[\left(D(\bar{q}) \cap D(\bar{s}), \frac{p}{q}\right)\right] \cdot \left[\left(D(\bar{q}) \cap D(\bar{s}), \frac{r}{s}\right)\right] \\
&= \left[\left(D(\bar{q}), \frac{p}{q}\right)\right] \cdot \left[\left(D(\bar{s}), \frac{r}{s}\right)\right] = \pi\left(\frac{\bar{p}}{\bar{q}}\right) \cdot \pi\left(\frac{\bar{r}}{\bar{s}}\right) \qquad \surd
\end{aligned}
$$

Desweiteren ist klar, daß $\pi(\bar{1}) = [(V, 1)] = 1_{\mathcal{O}_P(V)}$ und $\pi(\bar{0}) = [(V, 0)] = 0_{\mathcal{O}_P(V)}$ gilt. Also ist π ein Isomorphismus von Ringen. $\square$

1.5. Proposition. *Für einen Ring R sind äquivalent:*

(1) Die Menge der Nichteinheiten $R \setminus R^\times$ ist ein Ideal.
(2) R besitzt ein eindeutiges maximales Ideal, welches alle echten Ideale aus R enthält.

Beweis: Ist $R \setminus R^\times$ ein Ideal, so ist dieses sicher maximal, denn in einem größeren Ideal könnten zusätzlich nur Einheiten liegen. Jedes größere Ideal ist also bereits ganz R.
Ist andererseits M ein eindeutiges maximales Ideal. Sei N die Menge der Nichteinheiten, welche nicht in M liegen. Es gilt $N = \varnothing$, denn falls $n \in N$, so wäre (n) ein Ideal, welches nicht in M enthalten ist. Widerspruch. □

1.6. Definition. Ein Ring der diese Bedingung erfüllt heißt *lokal*.

Das eindeutige maximale Ideal eines lokalen Ringes ist $R \backslash R^\times$.

1.7. Erinnerung. Ein Ring R heißt noethersch, falls jedes Ideal endlich erzeugbar ist. Äquivalent dazu ist die Aufsteigende Kettenbedingung: R heißt noethersch, falls jede unendlich aufsteigende Kette von Idealend stationär wird. Jeder Körper ist noethersch. Ist R ein noetherscher Ring, so auch $R[X]$ und R/I für ein Ideal I.

Die Folgenden Lemmata führen zu der Aussage, daß ein Isomorphismus von Varietäten einen Isomorphismus der lokalen Ringe induziert. Zusammen mit der in 1.1 gezeigten Isomorphie folgt dann, dass es genügt, Aussagen über die lokalen Ringe nur für den affinen Fall zu beweisen.

1.8. Lemma. *Ist V eine irreduzible k-Varietät und $W \subset V$ offen und $P \in W$, dann gilt:*

$$\mathcal{O}_P(V) = \mathcal{O}_P(W)$$

Beweis: Offensichtlich gilt $\mathcal{O}_P(W) \subset \mathcal{O}_P(V)$: Ist nämlich $U \subset W$ offen um P in W, so auch in V. Insbesondere ist eine W-offene überdeckung von $U \subset W$ auch V-offen und eine k-reguläre Funktion $r \in \mathcal{O}_W(U)$ ist auch in $\mathcal{O}_V(U)$ definiert durch die selben rationalen Funktionen auf den überdeckungsmengen. Damit gilt: $[(U, r)] \in \mathcal{O}_P(W) \Rightarrow [(U, r)] \in \mathcal{O}_P(V)$, also $\mathcal{O}_P(W) \subset \mathcal{O}_P(V) \quad \surd$.
Wir wollen nun zeigen, da auch $\mathcal{O}_P(V) \subset \mathcal{O}_P(W)$ gilt. Dazu zeigen wir, da jede lokale Funktion in $\mathcal{O}_P(V)$ bereits Äquivalenzklasse einer regulären Funktion aus $\mathcal{O}_W(U)$ für eine offen Umgebung $U \subset W$ um P ist. Sei nun $\tilde{U} \subset V$ offen um P und $\tilde{r} \in \mathcal{O}_V\left(\tilde{U}\right)$. Betrachte nun $U := W \cap \tilde{U}$ sowie $r := \tilde{r}_{|U}$. Zu $\tilde{r}$ gibt es eine V-offene Überdeckung $\left\{\tilde{U}_i\right\}_{i=1,\dots,n}$ mit $\tilde{r}_{|\tilde{U}_i} = f_{i|\tilde{U}_i}$ für geeignete Brüche von Polynomen f_i. Dann ist $U_i := \tilde{U}_i \cap W$ eine offene überdeckung von U in W und es gilt $r_{|U_i} = f_{i\,|U_i}$. Folglich ist $r \in \mathcal{O}_W(U)$. Außerdem gilt $r \in \mathcal{O}_V(U)$ und $(U, r) \sim \left(\tilde{U}, \tilde{r}\right)$, so da $\mathcal{O}_P(V) \ni \left[\left(\tilde{U}, \tilde{r}\right)\right] = [(U, r)] \in \mathcal{O}_P(W)$, also $\mathcal{O}_P(V) \subset \mathcal{O}_P(W)$. □

1.9. Lemma. *Sind V_1, V_2 irreduzible k-Varietäten, $P \in V_1$ und ist $\varphi : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ ein Isomorphismus, dann gilt:*

$$\mathcal{O}_P(V_1) \cong \mathcal{O}_{\varphi(P)}(V_2)$$

Beweis: N.V. gibt es für jede offene Umgebung $U \subset V_2$ von $\varphi(P)$ einen durch φ induzierten Isomorphismus $\varphi_U^* : \mathcal{O}_{V_2}(U) \to \mathcal{O}_{V_1}\left(\varphi^{-1}(U)\right),\ r \mapsto r \circ \varphi$, so daß für $r_2 \in \mathcal{O}_{V_2}(U)$, $r_1 := \varphi_U^*(r_2) \in \mathcal{O}_{V_1}\left(\varphi^{-1}(U)\right)$ und für alle $\xi \in U$ gilt: $r_1(\xi) = r_2(\varphi(\xi))$. Definiere daher die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathcal{O}_{\varphi(P)}(V_2) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}_P(V_1) \\ & [(U, r)] & \mapsto & \left[\left(\varphi^{-1}(U), \varphi_U^*(r)\right)\right] \end{array}$$

Wir zeigen: ψ ist der gesuchte Isomorphismus.
Seien nun U_2', U_2'' offen um $\varphi(P) \in V_2$ und $r_2 \in \mathcal{O}_{V_2}(U_2'),\ s_2 \in \mathcal{O}_{V_2}(U_2'')$. Seien ferner $U_1' := \varphi^{-1}(U_2'),\ U_1'' := \varphi^{-1}(U_2'')$ und $r_1 := \varphi_{U_2'}^*(r_2) \in \mathcal{O}_{V_1}(U_1'),\ s_1 := \varphi_{U_2''}^*(s_2) \in \mathcal{O}_{V_1}(U_1'')$ die Bilder von r_2, s_2 unter $\varphi_{U_2'}^*$ bzw. $\varphi_{U_2''}^\star$.
Zum Nachweis der Wohldefiniertheit von ψ ist zu zeigen, da

$$\left(U_2', r_2\right) \sim_2 \left(U_2'', s_2\right) \implies \left(U_1', r_1\right) \sim_1 \left(U_1'', s_1\right)$$

Für die Injektivität benötigt man davon die Gegenrichtung:

$$\left(U_1', r_1\right) \sim_1 \left(U_1'', s_1\right) \implies \left(U_2', r_2\right) \sim_2 \left(U_2'', s_2\right)$$

Es gilt

$$\begin{array}{cc} & r_{2|U_2'\cap U_2''} = s_{2|U_2'\cap U_2''} \\ \iff & r_2 \circ \varphi_{|\varphi^{-1}(U_2'\cap U_2'')} = s_2 \circ \varphi_{|\varphi^{-1}(U_2'\cap U_2'')} \\ \iff & r_{1|U_1'\cap U_1''} = s_{1|U_1'\cap U_1''} \\ \implies & (U_1', r_1) \sim_1 (U_1'', s_1) \iff (U_2', r_2) \sim_2 (U_2'', s_2) \end{array}$$

Somit sind Wohldefineirtheit und Injektivität gegeben.
Zum Nachweis der Surjektivität betrachten wir zu U offen um $P \in V_1$ eine Funktion $r \in \mathcal{O}_{V_1}(U)$. Diese besitzt ein Urbild unter $\varphi_{\varphi(U)}^*$, nämlich $r \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{O}_{V_2}(\varphi(U))$, denn es gilt:

$$\varphi_{\varphi(U)}^*\left(r \circ \varphi^{-1}\right) = r \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \in \mathcal{O}_{V_1}(U)$$

Damit gilt

$$\psi\left(\left[\left(\varphi(U), r \circ \varphi^{-1}\right)\right]\right) = [(U, r)]$$

und somit ist auch die Surjektivität gezeigt. □

1.10. Korollar. *Ist V eine irreduzible k-Varietät, $P \in V$ und ist W eine affine k-Varietät und $\varphi : W \to \varphi(W) \subset V$ ein Isomorphismus von Varietäten mit $\varphi(W)$ offen um P, dann gilt $\mathcal{O}_{\varphi^{-1}(P)}(W) \cong \mathcal{O}_P(V)$.*

1.11. Satz. *$\mathcal{O}_P(V)$ ist ein noetherscher, lokaler Integritätsbereich.*

Beweis: Wegen obigen Korrollars und Proposition 1.1, genügt es, den affinen Fall zu zeigen.
Wir benutzen im Folgenden die Äquivalenz aus Bemerkung 1.3:

$$\mathcal{O}_P(V) \cong \left\{ f \in \mathrm{Quot}(k[V]) \mid \exists p \in k[V],\, q \in k[V]\ q(P) \neq 0 : f = \frac{p}{q} \right\}$$

und identifizieren beide Seiten.
1.) Lokalität: Zu $f \in \mathcal{O}_P(V)$ betrachten wir den Einsetzungshomomorphismus $\iota : \mathcal{O}_P(V) \to K,\ f \mapsto f(P)$. Wenn $f = \frac{r}{q},\ r, q \in k[V]$, so

ist $f \notin \ker(\iota) \Leftrightarrow r(P) \neq 0 \Leftrightarrow \exists f^{-1} = \frac{q}{r} \in \mathcal{O}_P^{\times}(V)$. D.h. das Ideal $\ker(\iota) \subsetneq \mathcal{O}_P(V)$ ist die Menge aller Nichteinheiten und damit ist $\mathcal{O}_P(V)$ lokal.
2.) Noethersch: Wir zeigen, da jedes Ideal in $\mathcal{O}_P(V)$ endlich erzeugbar ist. Sei $J \subseteq \mathcal{O}_P(V)$ ein Ideal. Wir identifizieren sowohl $k[V]$ als auch $\mathcal{O}_P(V)$ mit ihren Einbettungen in $\operatorname{Quot}(k[V])$ (Im Falle von $\mathcal{O}_P(V)$ benutzen wir die Isomorphie). Da $k[V]$ noethersch ist, wird $J \cap k[V]$ endlich erzeugt, sagen wir von $f_1, \ldots, f_d \in k[V]$.
Wir zeigen: $f_1, \ldots, f_d$ erzeugen bereits J in $\mathcal{O}_P(V)$. Ist nämlich $g = \frac{r}{q} \in J \subseteq \mathcal{O}_P(V)$, so gilt $r = q \cdot g \in J \cap k[V]$. Also gibt es $a_i \in k[V]$, so da $r = q \cdot g = \sum_{i=1}^d a_i f_i \Longrightarrow g = \sum_{i=1}^d \frac{a_i}{q} f_i$.
3.) Integritätsbereich: klar, da bereits $k[V]$ ein Integritätsbereich ist und $\mathcal{O}_P(V) \hookrightarrow \operatorname{Quot}(k[V])$. □

2. Tangenten und Singularitäten

Vortragsausarbeitung von Peter Schanbacher

1.12. Erinnerung. Wir nennen $\mathbb{A}_k^2$ die affine Ebene.
Zu einer ebenen irreduziblen affinen k-Kurve $C \subset \mathbb{A}^2(k)$ gibt es ein irreduzibles Polynom $F_C \in k[X,Y]$ mit $C = \{(x,y) : F_c(x,y) = 0\}$. F_C ist eindeutig bis auf Multiplikation mit einer Konstanten $\lambda \in k \setminus \{0\}$.

1.13. Definition. Falls $\deg(F_C) = 1$ nennt man C eine *Gerade.*

Sei $P = (a,b) \in C$. Schreiben ab nun kurz F für F_C.

1.14. Definition. P heißt *einfacher Punkt von* C, falls $F_X(P) \neq 0$ oder $F_Y(P) \neq 0$. Sonst heisst P *mehrfacher* oder *singulärer* Punkt von C . Hierbei bezeichnet F_X und F_Y jeweils die formale Ableitung in Richtung der entsprechenden Komponente.
Eine Kurve die nur einfach Punkte besitzt nennen wir *nicht singuläre Kurve.*

Falls $P = (a,b)$ einfach ist, so heißt $F_X(P)(X-a) + F_Y(P)(Y-b)$ *Tangente* von C an P.

1.15. Bemerkung. Sei $C \subset \mathbb{A}_k^2$ eine irreduzible ebene affine Kurve mit $(0,0) \in C$. Zerlege nun $F_c = F_k + F_{k+1} + ... + F_n$ in homogene Terme F_i vom Grad i.
Dann ist $(0,0)$ genau dann ein einfacher Punkt in C falls k=1. Desweiteren ist F_1 dann die Tangente in $(0,0)$.

Beweis: Zunächst sei festgestellt, da $P \in C$ folgt $0 = F_C(0,0) = F_0(0,0)$. Somit muss $k \geq 1$ sein. Sei $(0,0)$ einfacher Punkt. Also $F_X(0,0) \neq 0$ oder $F_Y(0,0) \neq 0$. F_X oder F_Y müssen somit eine Konstante besitzen. Nach formaler Ableitungsregeln erhalten wir diese nur von Termen vom Grad 1. Somit muss k=1 sein. Nach der Ableitung erhalten alle Terme höheren Grades noch Potenzen von X bzw. Y. Damit gilt $\frac{\partial F_i(0,0)}{\partial X} = 0$ und $\frac{\partial F_i(0,0)}{\partial Y} = 0$ für $i \geq 1$. Für $F_1 = aX + bY$ folgt $F_X(0,0) = \frac{\partial F_1(0,0)}{\partial X} = a$ und $F_Y(0,0) = \frac{\partial F_1(0,0)}{\partial Y} = b$.
Damit ist die Tangente $F_X(P) \cdot X + F_Y(P) \cdot Y = \frac{\partial F_1(0,0)}{\partial X} \cdot X + \frac{\partial F_1(0,0)}{\partial Y} \cdot Y = a \cdot X + b \cdot Y = F_1$. □

1.16. Definition. Sei $C \in \mathbb{A}_k^2$ ebene affine Kurve und $P = (0,0)$, $F_c = F_m + F_{m+1} + ... + F_n$ mit $F_i \in k[X,Y]$, homogen, $\deg(F_i) = i$ mit $F_m \neq 0$, so nennen wir die *Vielfachheit* von F an P: $m_p(C) := m$.

1.17. Bemerkung.
- $m > 0 \Longleftrightarrow P = (0,0) \in C$
- Für $m = 1,2,3$ nennen wir P einen einfachen, doppelten, dreifachen Punkt.

1.18. Bemerkung. Sei C eine k-Kurve $F_C = F_m + ... + F_n$. Betrachte nun C als K-Kurve. So können wir $F_m = \prod(L_i^{r_i})$ schreiben wobei $L_i \in K[X,Y]$ unterschiedliche homogene Terme vom Grad 1 sind.

1.19. Definition. L_i heißen *Tangenten* von F an $P = (0,0)$, r_i heißt *Vielfachheit* der Tangente und L_i ist eine einfache, doppelte... Tangente für $r_i = 1,2,...$
Falls es m unterschiedliche Tangenten an P gibt hat heißt P *gewöhnlicher Punkt* von C.

Einfacherhalber sagen wir, dass eine Linearform mit Nullstelle P die keine Tangente ist, die Tangentenvielfachheit Null hat.

1.20. Bemerkung. Diese Definitionen werden verallgemeinert auf Punkte $P = (a,b) \neq (0,0)$. Sei $T_{(a,b)} : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ die Translation die (0,0) auf (a,b) verschiebt ($T_{(a,b)}(x,y) = (a+x, b+y)$). Es gilt $T_{(a,b)}^{-1} = T_{(-a,-b)}$.

1.21. Definition. Sei $F \in k[X,Y] = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2}(\mathbb{A}^2)$. Sei $P = (a,b)$ setze $T = T_{(a,b)}$. Schreibe F^T für $T_{\mathbb{A}^2}^*(F)$, d.h. $F^T(X,Y) := F(X+a, Y+b)$. Dann heißt $m_P(C) := m_{(0,0)}(C(F^T))$ die *Vielfachheit von C an P*. Wenn $F^T = \tilde{F}_m + ... + \tilde{F}_n$ und $\tilde{F}_m = \prod L_i^{r_i}$ nennen wir $L_i^{T_{(-a,-b)}}$ eine *Tangente* in P an C der *Tangentenvielfachheit* r_i.

1.22. Bemerkung. Falls $\partial_X F(P) \neq 0$ oder $\partial_Y F(P) \neq 0$ und $L = F_X(P)(X-a) + F_Y(P)(Y-b)$ so ist $L^T = F_X^T(0,0)X + F_Y^T(0,0)Y$. T verschiebt die Tangente von $T(C)$ in $(0,0)$ zu Tangenten von C in $P = (a,b)$.

1.23. Lemma. *Sei $\varphi : K^2 \longrightarrow K^2$ ein k-Vektorraumisomorphismus. Sei $C \subset \mathbb{A}_k^2 = K^2$ eine irreduzible affine ebene Kurve mit $(0,0) \in C$ und $F_C = F_m + ... + F_n$. Dann ist $C' = \varphi(C)$ irreduzible affine ebene Kurve mit $(0,0) \in C'$, $F_{C'} = \tilde{F}_{m'} + \ldots + \tilde{F}_{n'}$ und $F_C = \varphi^*(F_{C'}) = F_{C'} \circ \varphi$. Dann gilt $F_i = \varphi^*(\tilde{F}_{i'}) = \tilde{F}_{i'} \circ \varphi$ für alle $m \leq i \leq n$.*

Beweis: Sei $\varphi : K^2 \longrightarrow K^2$ ein Vektorraumisomorphismus und sei

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

die zugehörige Matrix mit $\det A \neq 0$. Für $G \in k[X,Y]$ betrachte nun $\varphi^*(G(X,Y)) = G(\varphi(X,Y))$ mit $\varphi(X,Y) = (a_1X + b_1Y, a_2X + b_2Y)$. Ist G homogen vom Grad d, so ist auch $G(a_1X + b_1Y, a_2X + b_2Y)$ homogen vom Grad d. Das heißt $\varphi^*(\tilde{F}_{i'})$ ist homogen vom Grad i'.
Damit folgt:
$F_C = \varphi^*(F_{C'}) = \varphi^*(\tilde{F}_{m'}) + ... + \varphi^*(\tilde{F}_{n'}) = F_m + ... + F_n$

Die erste Gleichheit gilt da $\varphi(C) = C'$. Bei der letzten Gleichung sehen wir auf beiden Seiten eine aufsteigende Folge homogener Terme. Per Vergleich folgt nun insbesondere $F_i = \varphi^*(\tilde{F_{i'}})$. □

3. Diskreter Bewertungsring

1.24. Definition. Sei R ein Integritätsring mit $R \neq Quot(R)$, dann heisst R ein *diskreter Bewertungsring* wenn er folgende Eigenschaften erfüllt: R ist nothersch, lokal und das maximale Ideal ist ein Hauptideal.

1.25. Proposition. *Sei R ein Integritätsring so gilt folgende Äquivalenz:*

(1) R ist ein diskreter Bewertungsring
(2) $\exists t \in R$ irreduzibel, so dass alle $0 \neq z \in R$ eindeutig geschrieben werden können als $z = ut^n$ mit einer Einheit u und $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: "$1 \Rightarrow 2$" : Sei $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal erzeugt von t.
Angenommen $ut^i = vt^j$ für zwei Einheiten u und v sowie $i \geq j$ dann ist $ut^{i-j} = v$ eine Einheit. Also muss $i = j$ und damit $u = v$ gelten. Folglich ist der Ausdruck $z = ut^i$ eindeutig.
Um zu zeigen, dass jedes z einen solchen Ausdruck besitzt nehmen wir an, dass z keine Einheit ist (sonst $z = zt^0$), also gilt $z \in \mathfrak{m} = (t)$. Dann gilt $z = z_1 t$ für ein $z_1 \in R$. Falls nun z_1 eine Einheit ist, so ist $z = z_1 t^1$ von der gewünschten Form. Angenommen, es gibt für z keine Zerlegung der Form $z = ut^n$. Dann gibt es eine unendliche Kette $z_i = z_{i+1} t$.
Da R noethersch ist wird Kette von Idealen $(z_1) \subset (z_2) \subset ....$ irgendwann stationär. Also $\exists n : (z_n) = (z_{n-1})$ dann $\exists v \in R$: $z_{n+1} = vz_n$und damit $z_{n+1} = vz_n = vtz_{n+1}$. Dann wäre jedoch $vt = 1$ was im Widerspruch dazu steht, dass t keine Einheit ist.
"$2 \Rightarrow 1$" : $\mathfrak{m} = (t)$ ist Menge von Nichteinheiten und Ideal. Wir zeigen dass die einzigen Ideale in R Hauptideale (t^n) mit $n \in \mathbb{N}$ sind. Sei I beliebiges Ideal in R. Wähle $a \in I$ so, dass $a = ut^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ minimal ist. Sei $b \in I$ weiteres Element mit der Darstellung $b = vt^m$ mit $m \geq n$. Damit folgt $ub = avt^{m-n}$ bzw $a|b$ und insbesondere $t^n|b$ für eliebiges $b \in I$. Folglich sind alle Ideale von der Form $I = (t^n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und damit Hauptideale. Damit ist offensichtlich (t) maximal. Es enthält sogar alle echten Ideale und ist somit einziges maximales Ideal. Also ist R lokal.
Da jedes Ideal in R Hauptideal ist, ist es insbesondere endlich erzeugt. Also ist R noethersch. □

1.26. Bemerkung. Das Element t wie in (2) nennen wir *uniformisierendes Element* von R. Jedes andere uniformisierende Element hat dann die Form ut für eine Einheit u in R.
Sei K der Quotientenkörper von R. Dann hat jedes $0 \neq z \in K$ eine eindeutige Darstellung $z = ut^n$, mit einer Einheit u und $n \in \mathbb{Z}$.
Der Exponent n heißt *Wert* von z. Wir schreiben $n = v_R(z)$ oder falls klar ist woher v kommt auch nur $n = v(z)$ und definieren $v(0) := \infty$.
Die Bewertung v auf K ist unabhängig von der Wahl des uniformisierenden Elements.
Für die *Bewertung* $v : K \to \mathbb{Z} \cup \infty$ gilt:

- $v(a) = \infty \Longleftrightarrow a = 0$

- $v(ab) = v(a) + v(b)$
- $v(a+b) \geq min(v(a), v(b))$

1.27. Bemerkung. Es gilt $R = \{z \in K : v(z) \geq 0\}$ und $\mathfrak{m} = \{z \in K : v(z) > 0\}$ ist das maximale Ideal in R.

1.28. Lemma. *Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K. Für einen Zwischenring R_1 mit $R \subseteq R_1 \subsetneq K$ gilt dann schon $R = R_1$.*

Beweis: Betrachte $x = \frac{a}{b} \in R_1 \subset K$ mit $a, b \in R$ aber $x \notin R$. Da R diskreter Bewertungsring können wir a, b darstellen als $a = u_1 \cdot t^{n_1}$ und $b = u_2 \cdot t^{n_2}$ mit u_1, u_2 Einheiten und $n_i \geq 0$.
Damit gilt $x = \frac{a}{b} = \frac{u_1}{u_2} \cdot t^{n_1 - n_2} \in R_1$. Da $\frac{u_1}{u_2} \in R^*$ aber $x \notin R$ muss gelten: $n_1 - n_2 < 0$.
Somit ist $\frac{1}{t} \in R_1$. Damit ist R_1 aber schon ganze Quotientenkörper K. Denn jedes Element aus K lässt sich schreiben als $\frac{u_1}{u_2} \cdot t^s$ mit $s \in \mathbb{Z}$. Dies ist ein Widerspruch zu $R_1 \neq K$. □

4. Lokale Ringe

Sei $C \in \mathbb{A}_k^2$ eine affine irreduzible ebene Kurve und $P \in C$.
Wir betrachten den Restklassenhomomorphismus

$$\begin{aligned} K[X,Y] &\to K[C] = K[X,Y]/(F_C) \\ G &\mapsto g \end{aligned}$$

1.29. Theorem. $P = (p_1, p_2)$ *ist ein einfacher Punkt von* $C \iff \mathcal{O}_p(C)$ *ist ein diskreter Bewertungsring.*

Im Fall ebener affinen irreduziblen Kurven zeigte Tibor, dass

$$\mathcal{O}_p(C) = \left\{ \frac{g_1}{g_2} | \; g_i \in K[C], g_2(P) \neq 0 \right\}$$

gilt. Wir zeigen, dass das Bild l jeder Linearform $L = aX + bY + c$ durch P die keine Tangente ist, ein uniformisierender Element von $\mathcal{O}_p(C)$ ist.
Beweis: " $\Rightarrow$ ": Angenommen P ist ein einfacher Punkt auf C, und L eine Gerade durch P die keine Tangente von C an P ist.
Wir betrachten $T_{(p_1,p_2)}(C) = C'$. So genügt nach Satz von Tibor und Bemerkung 1.20 die Aussage für C' im Punkt $(0,0)$ zu zeigen.
Sei $L = aX + bY$ keine Tangente von $(0,0)$ in C' und sei $T = F_X(0,0)X + F_Y(0,0)Y$ die Tangente. Sei $(x_1, y_1) \in V(L) \backslash \{0\}$ und $(x_2, y_2) \in V(T) \backslash \{0\}$ so sind sie insbesondere linear unabhängig.
Sei $\varphi : K^2 \longrightarrow K^2$ der eindeutig bestimmte Vektorraumisomorphismus mit $\varphi(x_1, y_1) = (1, 0)$ und $\varphi(x_2, y_2) = (0, 1)$. Anmerkung: φ ist sogar ein Isomorphismus.
Nach Lemma 1.23 und dem Satz zu lokalen Ringen von Tibor reicht es die Aussage für $C'' = \varphi(C')$ zu zeigen.
Ohne Einschränkung sei deshalb $P = (0,0)$, die X-Achse die Tangente von P an C und die Y-Achse L.
Wir wissen dass $\mathcal{O}_p(C)$ ein noetherscher und lokaler Integritätsring ist (siehe Satz 1.11).

Dass R ein diskreter Bewertungsring ist fehlt (nach Proposition 1.25), dass maximale Ideal Hauptideal ist.
Wir zeigen, dass $\mathfrak{m}_p(C)$ schon durch x erzeugt wird.
Allgemein sind die Elemente aus $\mathcal{O}_P(C)$ die keine Einheiten sind, gegeben durch $\mathfrak{m}_p(C) = \left\{\frac{g_1}{g_2} | \, g_i \in K[C], g_1(P) = 0, g_2(P) \neq 0\right\}$. Also gilt $x, y \in \mathcal{O}_P(C)$ und da x und y in P verschwinden sind sie in $\mathfrak{m}_p(C)$ enthalten. Insbesondere gilt $\mathfrak{m}_p(C) = (x, y)$.
Nach Voraussetzung ist P ein einfacher Punkt. Dann ist zuerst festzuhalten, dass F keinen konstanten Term hat, da sonst $(0,0) \notin C$ ist. Da die Tangente $X = 0$ ist, gilt für die Ableitung $F_X(P) = 0$ und $F_Y(P) = 1$. Dies ist nur der Fall wenn die F keinen linearen Term in X besitzt. Also lässt sich F schreiben als $F = Y +$ homogene Terme höheren Grades.
Wir können also schreiben $F = YG - X^2H$ mit $G = 1 +$ höhere Terme $\in K[X,Y]$ und $H \in K[X]$. Nun ist $g(P) \neq 0$ also g eine Einheit in $\mathcal{O}_P(C)$. Also ist $yg = x^2h \in \ K[C]$ und damit $y = x^2hg^{-1} \in (x) \subset \mathcal{O}_P(C)$.
" $\Leftarrow$ ": Tibor wird dies folgt aus 1.32. □

1.30. Bemerkung. Wenn P ein einfacher Punkt auf einer irreduziblen Kurve C ist, so nennen wir v_P^F die Bewertung auf $K(C)$. Sie ist definiert durch den diskreten Bewertungsring $\mathcal{O}_P(C)$. Für eine beliebige Linearform L durch P gilt $v_P^F(L) = 1$ falls L keine Tangente an C ist bzw. $v_P^F(L) > 1$ falls L eine Tangente ist (Beweis für Y Tangente: $y = x^2hg^{-1}$, damit ist $v_P(y) = v_P(x^2) + v_P(hg^{-1}) \geq 2$).

5. Die Vielfachheit eines Punktes und der lokalen Funktionenring

zweiter Teil der Vortragsausarbeitung von Tibor Herrmann

Sei P ein Punkt auf einer irreduziblen, ebenen Kurve C. Die Vielfachheit von $P = (a,b)$ ist definiert als minimaler Formgrad in $F_c(X+a, Y+b)$, schreibe $m_P(C)$. Zu P ist $\mathfrak{m}_P(C)$ das maximale Ideal in $\mathcal{O}_P(C)$.

1.31. Satz. *Es gibt ein N, so da für alle $n \geq N$*

$$m_p(C) = \dim_k \left(\mathfrak{m}_p(C)^n / \mathfrak{m}_p(C)^{n+1}\right)$$

Es hängt also die Vielfachheit von P nur vom lokalen Ring ab.

Beweis: Wir schreiben $\mathfrak{m}_P$, $\mathcal{O}_P$ usw. statt $\mathfrak{m}_P(C)$ bzw. $\mathcal{O}_P(C)$.
Im Folgenden wird an einigen Stellen die Dimension von Restklassenringen als k-Vektorräumen untersucht. Für die Vektorraumstruktur werden nur die aditive Gruppe im Ring und die skalare Multiplikation benötigt. Falls nichts anderes gesagt wird, sind die im folgenden auftretenden Homomorphismen zu verstehen als k-Vektorraum Homomorphismen der additiven Gruppen samt der skalaren Multiplikation. Die Multiplikation im Restklassenring wird nicht betrachtet.
1. Betrachte die Inklusion

$$\varphi: \ \mathfrak{m}^n / \mathfrak{m}^{n+1} \hookrightarrow \mathcal{O}_P / \mathfrak{m}^{n+1}$$

und die Abbildung

$$\psi: \ \mathcal{O}_P / \mathfrak{m}^{n+1} \to \mathcal{O}_P / \mathfrak{m}^n, \ f + \mathfrak{m}^{n+1} \mapsto f + \mathfrak{m}^n$$

Wir zeigen zunächst, da ψ wohldefiniert ist. Sind $f,\ g\ \in \mathcal{O}_P$ und $f \equiv g$ mod $\mathfrak{m}^{n+1}$, dann gibt es $k_1, \ldots, k_{n+1} \in \mathfrak{m}$ so, daß $f = g + \prod_{i=1}^{n+1} k_i$. Mit $\tilde{k}_i = k_i$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $\tilde{k}_n = k_n \cdot k_{n+1} \in \mathfrak{m}$ ist dann aber auch $f = g + \prod_{i=1}^{n} \tilde{k}_i$, also $f \equiv g$ mod $\mathfrak{m}^n$.
ψ ist surjektiv, denn zu $f + \mathfrak{m}^n$ ist $f + \mathfrak{m}^{n+1}$ ein Urbild, außerdem ist $\ker\psi = {}^{\mathfrak{m}^n}/_{\mathfrak{m}^{n+1}} = \mathrm{im}\ \varphi$ also gilt

$$\begin{aligned}\dim {}^{\mathcal{O}_P}/_{\mathfrak{m}^{n+1}} &= \dim\ker\psi + \dim\mathrm{im}\ \psi \\ &= \dim\mathrm{im}\ \varphi + \dim\mathrm{im}\ \psi \\ &= \dim {}^{\mathfrak{m}^n}/_{\mathfrak{m}^{n+1}} + \dim {}^{\mathcal{O}_P}/_{\mathfrak{m}^n}\end{aligned}$$

Da φ injektiv ist, gilt insbesondere, dass die Sequenz

$$0 \to {}^{\mathfrak{m}^n}/_{\mathfrak{m}^{n+1}} \to {}^{\mathcal{O}_P}/_{\mathfrak{m}^{n+1}} \to {}^{\mathcal{O}_P}/_{\mathfrak{m}^n} \to 0$$

exakt ist. ([**Fu**, Problem 2.49e und 2.10.7, p.28])
Nun genügt es zu zeigen, dass es eine Konstante s gibt, so dass für alle $n \geq m_P(C)$ gilt:

$$\dim\left({}^{\mathcal{O}_P}/_{\mathfrak{m}^n}\right) = n \cdot m_P(C) + s$$

Denn dann ergibt sich

$$\begin{aligned}m_P(C) &= ((n+1)\cdot m_P(C) + s) - (n \cdot m_P(C) + s) \\ &= \dim\left({}^{\mathcal{O}_P}/_{\mathfrak{m}^{n+1}}\right) - \dim\left({}^{\mathcal{O}_P}/_{\mathfrak{m}^n}\right) = \dim\left({}^{\mathfrak{m}^n}/_{\mathfrak{m}^{n+1}}\right)\end{aligned}$$

2. Gesucht ist also eine Formel, um $\dim\left({}^{\mathcal{O}_P}/_{\mathfrak{m}^n}\right)$ in Abhängigkeit von n zu berechnen. Wir setzen dazu

$$I\ := I(P)\ := \{q \in k\,[X_1,\ X_2] \mid q\,(P) = 0\} \subset k\,[X_1,\ X_2]$$

als das Ideal aller Polynome, die in P verschwinden und definieren mittels Restklassenabbildung $\pi :\ k\,[X_1,\ X_2] \to {}^{k[X_1,\,X_2]}/_{(F_C)}\ =\ k\,[V]$ das Bild dieses Ideals $\tilde{I}\ := \pi\,(I)$. $\tilde{I}$ ist dann ein Ideal in $k\,[V]$, da π surjektiv ist. Wir zeigen zunächst ${}^{\mathcal{O}_P}/_{\mathfrak{m}^n}\ \cong\ {}^{k[V]}/_{\tilde{I}^n}\ \cong\ {}^{k[X_1,X_2]}/_{(I^n,F_C)}$, um dann $\dim {}^{k[X_1,X_2]}/_{(I^n,F_C)}$ zu berechnen anstelle von $\dim\left({}^{\mathcal{O}_P}/_{\mathfrak{m}^n}\right)$.
Um die Rechte Isomorphie ${}^{k[V]}/_{\tilde{I}^n}\ \cong\ {}^{k[X_1,X_2]}/_{(I^n,F_C)}$ zu zeigen verwenden wir den 2. Isomorphiesatz für Gruppen, man überlege sich dazu, daß der dabei verwendete Homomorphismus auch die skalare Multiplikation respektiert und sich somit als Vektorraumhomomorphismus auffassen läßt. Für $I^n \subset (I^n, F_C) \subset k\,[X_1, X_2]$ gilt:

$${}^{k[X_1,X_2]}/_{(I^n,F_C)}\ \cong\ {}^{k[X_1,X_2]/(F_C)}/_{(I^n,F_C)/(F_C)}\ =\ {}^{k[V]}/_{(I^n,F_C)/(F_C)}$$

Außerdem ist ${}^{(I^n,F_C)}/_{(F_C)} = {}^{I^n}/_{(F_C)} \cong \left({}^{I}/_{(F_C)}\right)^n \cong (\pi\,(I))^n\ =:\ \tilde{I}^n$ mit π wie oben. Damit ist gezeigt, dass

$${}^{k[V]}/_{\tilde{I}^n}\ \cong\ {}^{k[V]}/_{(I^n,F_C)/(F_C)}\ \cong\ {}^{k[X_1,X_2]}/_{(I^n,F_C)}$$

Um die gewünschte Aussage $\dim\left({}^{\mathcal{O}_P}/_{\mathfrak{m}^n}\right) = \dim {}^{k[X_1,X_2]}/_{(I^n,F_C)}$ zu erhalten, bleibt noch die zweite Isomorphie zu zeigen:

$${}^{\mathcal{O}_P}/_{\mathfrak{m}^n}\ \cong\ {}^{k[V]}/_{\tilde{I}^n}$$

Wir zeigen dazu zunächst: Sind $\bar{f} \in k\,[V] \setminus \tilde{I}^n$ und $\bar{g}\ \in k\,[V]$ mit $\bar{g}\,(P) \neq 0$. Dann lät sich $\frac{\bar{f}}{\bar{g}}$ darstellen als $\bar{p} + \frac{\bar{r}}{\bar{s}}$, mit $\bar{p} \in k\,[V] \setminus \tilde{I}^n$ und $\bar{s}\,(P) \neq 0$ und $\bar{r} \in \tilde{I}^n$. Beachte: $\bar{r}$ darf dann auch in $\tilde{I}^l$ für $l \geq n$ liegen.

Beweis: Im Spezialfall $\bar{f} \in \tilde{I}^{n-1} \backslash \tilde{I}^n$gilt:

$$\frac{\bar{f}}{\bar{g}} = \frac{\bar{f} \cdot (\bar{g} + \bar{g}(P) - \bar{g})}{\bar{g} \cdot \bar{g}(P)} = \underbrace{\frac{\bar{f}}{\bar{g}(P)}}_{=:\bar{p}} + \underbrace{\frac{\bar{f} \cdot (\bar{g}(P) - \bar{g})}{\bar{g} \cdot \bar{g}(P)}}_{=:\frac{\bar{r}}{\bar{s}}}$$

Man beachte, da im diesem Fall dann auch $\bar{p} \in \tilde{I}^{n-1} \backslash \tilde{I}^n$ gilt.
Im allgemeinen Fall hat man $\bar{f} \in \tilde{I}^h \backslash \tilde{I}^{h+1}$ und $h < n$ (wobei $\tilde{I}^0 := k[V]$). Durch iteratives Anwenden obigen Spezialfalls, erst auf $\frac{\bar{f}}{\bar{g}}$, danach auf die entstehenden Restglieder $\frac{\bar{r}}{\bar{s}}$, folgt die Behauptung im allgemeinen Fall.

Damit läßt sich nun zeigen, daß $\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}^n \cong k[V]/\tilde{I}^n$ gilt:
Es ist $k[V]/\tilde{I}^n \cong \left\{\bar{p} + \tilde{I}^n \mid \bar{p} \in k[V] \backslash \tilde{I}^n \text{ oder } \bar{p} = 0\right\}$. Damit ist klar, daß die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \iota: & k[V]/\tilde{I}^n & \hookrightarrow & \mathcal{O}_P/\mathfrak{m}^n \\ & [\bar{p}] & \longmapsto & \left[\frac{\bar{p}}{1}\right] \end{array}$$

injektiv ist. Nach der eben bewiesenen Darstellung ist ι aber auch surjektiv, denn es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_P/\mathfrak{m}^n &\cong \left\{\frac{\bar{f}}{\bar{g}} + \mathfrak{m}^n \mid \bar{g} \in k[V], \bar{g}(P) \neq 0, \bar{f} \in k[V] \backslash \tilde{I}^n \text{ oder } \bar{f} = 0\right\} \\ &\cong \left\{\bar{p} + \mathfrak{m}^n \mid \bar{p} \in k[V] \backslash \tilde{I}^n \text{ oder } \bar{p} = 0\right\} \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $\mathcal{O}_P/\mathfrak{m}^n \cong k[X_1,X_2]/(I^n,F_C)$ ist.

3. Abschließend gilt es, $\dim k[X_1,X_2]/(I^n,F)$ zu berechnen. *Wir nehmen ab jetzt oBda an, daß (ggf. nach translation der Kurve) $P = (0,0)$ gilt.*
Schreibe $m := m_P(C)$, und sei $n \geq m$. Wegen $P = (0,0)$ ist $F_C \in I^m$ da alle Monome von F_C aus I^m sind. Daher gilt $G \in I^{n-m} \Longrightarrow F_C G \in I^n$.
Definiere $\varphi : k[X_1,X_2]/I^n \to k[X_1,X_2]/(I^n,F_C)$ den natürlichen Restklassenhomomorphismus sowie den k-Vektorraumhomomorphismus

$$\psi : k[X_1,X_2]/I^{n-m} \to k[X_1,X_2]/I^n \quad \bar{G} \longmapsto \overline{F_C G}$$

In $k[X_1,X_2]/I^n$ gilt: $\bar{H} \in \operatorname{im} \psi \Longleftrightarrow \overline{F_C} \mid \bar{H} \Longleftrightarrow \bar{H} \in \ker \varphi$, d.h.

$$0 \longrightarrow k[X_1,X_2]/I^{n-m} \xrightarrow{\psi} k[X_1,X_2]/I^n \xrightarrow{\varphi} k[X_1,X_2]/(I^n,F_C) \longrightarrow 0$$

ist exakt.
Außerdem gilt (vgl. [**Fu**, Problem 2.46]): $\dim\left(k[X_1,X_2]/I^n\right) = \frac{n(n+1)}{2}$. Es ist nämlich eine Basis gegeben durch die Monome vom Grad $\leq n-1$. Da darin nur X_1, X_2 vorkommen, gibt es genau $i+1$ Monome vom Grad i (Anzahl dermöglichen Potenzen für X_1).

Nach der Dimensionsformel folgt damit

$$\begin{aligned}
& \dim\left({}^{k[X_1,X_2]}/_{(I^n,F_C)}\right) \\
= \ & \dim\left({}^{k[X_1,X_2]}/_{I^n}\right) - \dim\left({}^{k[X_1,X_2]}/_{I^{n-m}}\right) \\
= \ & \frac{n(n+1)-(n-m)(n-m+1)}{2} \\
= \ & nm - \underbrace{\frac{(m-1)m}{2}}_{=:\,s}
\end{aligned}$$

□

1.32. Bemerkung. Ist $\mathcal{O}_P$ ein Diskreter Bewertungsring, so folgt mit [**Fu**, Problem 2.50], dass $m_p = \dim\left({}^{\mathfrak{m}_p^n}/_{\mathfrak{m}_p^{n+1}}\right) = 1$ ist. Dies wird für die Rückrichtung im Beweis von 1.29 benötigt.

KAPITEL 2

Aufblasungen in der affinen und projektiven Ebene

Vortragsausarbeitung von Dominic Barth

1. Einleitung

Wie auch in den letzten Vorträgen betrachten wir *irreduzible* Kurven in der affinen bzw. projektiven Ebene. Das Ziel von Aufblasungen ist es, zu einer ebenen Kurve mit Singularitäten (dies sind mehrfache Punkte) eine Kurve ohne Singularitäten (also mit nur einfachen Punkten) zu konstruieren, und zwar so, dass beide Kurven birational äquivalent sind.
Hierzu betrachten wir die entsprechende Singularität und „blasen" diesen Punkt „auf", d.h. wir ersetzen ihn durch eine Gerade L. Die Punkte auf L entsprechen dann gerade den Tangenten im ursprünglichen Punkt.

2.1. Definition. Eine Kurve ist eine eindimensionale, irreduzible k-Varietät.

2. Aufblasung eines Punktes im Affinen

Wir betrachten in diesem Kapitel zunächst die affine Ebene $\mathbb{A}^2$. Es sei $P := (0,0) \in \mathbb{A}^2$ der Nullpunkt und $U := \mathbb{A}^2 \setminus \mathcal{V}(X) = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 | x \neq 0\}$.
Sei nun $f : U \to \mathbb{A}^1$, $(x,y) \mapsto \frac{y}{x}$. Der Graph von f ist

$$\mathbb{A}^3 \supseteq G := \{(x,y,z) | z = \frac{y}{x}, x \neq 0\} = \{(x,y,z) | y = zx, x \neq 0\}$$

und wir definieren den Graphenmorphismus $g : U \to G$, $(x,y) \mapsto (x, y, \frac{y}{x})$.
Betrachte nun die Varietät

$$B := \mathcal{V}(Y - XZ) = \{(x,y,z) | y = xz\} \subseteq \mathbb{A}^3.$$

B ist irreduzibel, da das Polynom $Y - XZ$ irreduzibel ist.
Sei nun $\pi : B \to \mathbb{A}^2$ die Projektion auf die ersten beiden Komponenten, eingeschränkt auf B.
Man sieht, dass $\pi(B) = U \cup \{P\}$ und das Urbild des Nullpunktes P eine Gerade

$$L := \pi^{-1}(P) = \{(0,0,z) | z \in k\}$$

ist.
Damit ist B der Abschluss von G, da wegen U offen in $U \cup P$ auch $G = \pi^{-1}(U) = B \setminus L$ offen in $\pi^{-1}(U \cup P) = B$ ist.
Mit der Projektion π ist auch die Einschränkung auf die offene Untervarietät G von B ein Morphismus; $\pi|_G : G \to U$ ist dann sogar ein Isomorphismus mit Umkehrmorphismus $g : U \to G$.

2.2. Definition.
Wir nennen die Varietät $B := \{(x,y,z) | y = xz\} \subset \mathbb{A}^3$ die *Aufblasung* der affinen Ebene $\mathbb{A}^2$ im Nullpunkt, zusammen mit der zugehörigen Projektion

$\pi : B \to \mathbb{A}^2$, die wir *Niederblasung* nennen.
L heißt die Ausnahmefaser von π.

2.3. Definition & Erinnerung. Sei Q ein Punkt auf einer irreduziblen Kurve C. Dann ist die Vielfachheit von Q gegeben durch

$$m_Q(C) = dim_k(\mathfrak{m}_Q(C)^n / \mathfrak{m}_Q(C)^{n+1})$$

für große n. Insbesondere ist die Vielfachheit von Q nur abhängig vom lokalen Ring $\mathcal{O}_Q(C)$.
Q ist genau dann ein einfacher Punkt von C, also $m_Q(C) = 1$, wenn $\mathcal{O}_Q(C)$ ein diskreter Bewertungsring ist. □

Nun betrachten wir irreduzible Kurven in der affinen Ebene $\mathbb{A}^2$. Sei also $C \subseteq \mathbb{A}^2$ eine Kurve, und ohne Einschränkung sei der Nullpunkt $P \in C$, außerdem habe C in P keine Tangente X und alle weiteren Schnittpunkte mit der y-Achse, also mit der Geraden X, seien einfach.
Definiere $C_0 := C \cap U$, C_0 ist eine offene Untervarietät von C, d.h. eine quasiaffine irreduzible affine Kurve. Sei nun

$$C_0' := \pi^{-1}(C_0) = g(C_0) \subseteq g(U) = \pi^{-1}(U) = G$$

das Urbild von C_0 unter π; als Bild $g(C_0)$ ist C_0' wieder irreduzibel und als Urbild $\pi^{-1}(C_0)$ ist C_0' wieder abgeschlossen in G.
Sei C' der Abschluss von C_0' in B, es kommen zu C_0' nur noch Punkte von L hinzu, und zwar nur endlich viele, da $C' \setminus C_0'$ abgeschlossen im eindimensionalen L, nicht aber ganz L ist.
Weiter ist $\pi(C') = C_0 \cup \{P\}$.

2.4. Lemma. *Bezeichnungen wie oben. Dann gilt:*
(i) *C_0 und C_0' sind isomorph,*
(ii) *C und C' sind birational äquivalent.*

Beweis: (i) Wie zu Beginn gesehen, ist $\pi|_G : G \to U$ bzw. $g : U \to G$ ein Isomorphismus, und $C_0 := C \cap U \subseteq U$, somit sind C_0 und $\pi^{-1}(C_0) = g(C_0) = C_0'$ isomorph.
(ii) Zwei irreduzible Varietäten heißen birational äquivalent, wenn es einen Isomorphismus zwischen offenen Teilmengen von ihnen gibt. In unserem Fall ist $C_0 = C \setminus \mathcal{V}(X)$ offene Teilmenge von C, und $C_0' = C' \setminus L$ offene Teilmenge von C'. Zwischen diesen offenen Teilmengen gibt es nach (i) einen Isomorphismus und somit sind C und C' birational äquivalent. □

2.5. Erinnerung. Im Fall einer ebenen affinen Kurve hatten wir folgende Charakterisierung der Vielfachheit des Nullpunktes und seiner Tangenten.
Sei $C \subset \mathbb{A}^2$ eine Kurve durch $P = (0,0)$, X keine Tangente an C in P und es sei $F \in k[X,Y]$ das bis auf Skalierung eindeutige irreduzible Polynom zu C, also $\mathcal{V}(F) = C$, $deg(F) = n$. Wir können F schreiben als $F = F_r + F_{r+1} + \ldots + F_n$, wobei die $F_j \in k[X,Y]_j$ homogene Polynome vom Grad j sind ($j = r, \ldots, n$) und r der kleinste in F vorkommende Grad eines Monoms. Nach Skalierung und da X keine Tangente in P ist, schreiben wir F_r wiederum als

$$F_r = \prod_{i=1}^{s} (Y - \alpha_i X)^{r_i},$$

die $\alpha_i \in k$ paarweise verschieden, $s \in \mathbb{N}$, und $\sum_{i=1}^{s} r_i = r$.
Dann ist $P = (0,0)$ ein r-facher Punkt und $Y - \alpha_i X$ sind gerade die unterschiedlichen Tangenten an P und haben jeweils Vielfachheit r_i.

Im Folgenden Satz sei $\rho := \pi|_{C'}$, also wieder die Projektion, nun eingeschränkt auf $C' \subseteq B$; es gilt $\rho(C') = \pi(C') = C \cup \{P\}$.

2.6. Satz (Aufblasung einer ebenen affinen Kurve im Nullpunkt)**.**
Seien C, C_0, C', C_0' wie bisher, $P = (0,0) \in C$ und keine Tangente in P sei X. Sei $F \in k[X,Y]$ das irreduzible Polynom zu C, und $F = F_r + F_{r+1} + \ldots + F_n$ und $F_r = \prod_{i=1}^{s}(Y - \alpha_i X)^{r_i}$ wie eben. Zu jedem Punkt $Q \in C_0$ sei $Q' = \pi^{-1}(Q)$ der entsprechende Punkt auf C_0'. Dann gilt:

(i) $m_Q(C) = m_{Q'}(C')$,
(ii) *Es ist* $\rho^{-1}(P) = \{P_1, \ldots, P_s\}$ *mit* $P_i = (0,0,\alpha_i) \in L$,
(iii) *Die Vielfachheit des Punktes P_i ist* $m_{P_i}(C') \leq r_i$.

2.7. Korollar. *Ist $P = (0,0)$ eine gewöhnliche Singularität, so ist jeder Punkt $P_i = (0,0,\alpha_i) \in C'$ ein einfacher Punkt.*

Beweis: Da P gewöhnlich ist, gibt es keine mehrfachen Tangenten, d.h. es ist $r_i = 1$ für alle i. Somit ist $1 \leq m_{P_i}(C') \leq r_i = 1$ für alle i. □

3. Beweis des Satzes zur Aufblasung

Teil (i) zeigen wir direkt anhand von Lemma 2.3. Da die quasiaffinen Varietäten C_0 undC_0' isomorph sind, sind die lokalen Ringe $\mathcal{O}_Q(C)$ und $\mathcal{O}_{Q'}(C')$ gleich.
Da nach 2.2 die Vielfachheit eines Punktes nur von dem lokalen Ring des Punktes abhängt, sind also auch die Vielfachheiten in Q und Q' gleich.

Für den Beweis von *(ii)* und *(iii)* benötigen wir noch etwas Vorarbeit...
Hierzu betrachten wir einen weiteren Morphismus

$$\varphi : \mathbb{A}^2 \to B \subseteq \mathbb{A}^3, \quad \varphi(x,z) \mapsto (x, xz, z).$$

Da die Projektion von B auf die (x,z)-Ebene ein inverser Morphismus ist, ist φ ein Isomorphismus. Damit können wir

$$\psi := \pi \circ \varphi : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2, \quad \psi(x,z) = (x, xz)$$

definieren. Hierbei ist $E := \psi^{-1}(P) = \varphi^{-1}(L) = \{(x,z) \in \mathbb{A}^2 | x = 0\}$ eine Gerade.
Dann ist die Einschränkung $\psi : \mathbb{A}^2 \backslash E \to U$ offensichtlich ein Isomorphismus.

Sei C nun eine irreduzible ebene affine Kurve wie in dem Satz, $C_0 = C \cap U$. Definiere (analog zu C') $\tilde{C}_0 := \psi^{-1}(C_0)$ und es sei $\tilde{C}$ der Abschluss von $\tilde{C}_0$. Dann sind wie im Lemma 2.3 die beiden Kurven $\tilde{C}_0$ und C_0 isomorph, während C und $\tilde{C}$ birational äquivalent sind. Weiter gilt:

2.8. Lemma. *Bezeichnungen wie bisher. Sei $F_C = F_r + F_{r+1} + \ldots + F_n$ das Polynom zur Kurve C, die F_j homogene Polynome vom Grad j. Dann ist*

$$F_{\tilde{C}}(X,Z) = F_r(1,Z) + XF_{r+1}(1,Z) + \ldots + X^{n-r}F_n(1,Z).$$

Beweis: Für $(x,z) \in \tilde{C}$ muss gelten $\psi(x,z) \in C$.
Mit $\psi(x,z) = (x,xz) = (x,y)$ haben wir

$$F(\psi(X,Z)) = F(X,XZ) = X^r F_r(1,Z) + \ldots + X^n F_n(1,Z) =: X^r \tilde{F}(X,Z).$$

Somit gilt $F_{\tilde{C}}|\tilde{F}$, und es teilt auch X nicht mehr $\tilde{F}$, da $F_r(1,Z) \neq 0$ ist.
Wäre nun $\tilde{F} = GH$, dann wäre $F(X,Y) = X^r\tilde{F}(X,\frac{Y}{X}) = X^r G(X,\frac{Y}{X})H(X,\frac{Y}{X})$ und somit F reduzibel, Widerspruch.
Also ist $\tilde{F}$ irreduzibel, und da $\mathcal{V}(\tilde{F}) \supseteq \tilde{C}_0$, ist $\mathcal{V}(\tilde{F}) = \tilde{C}$. □

Jetzt beweisen wir Teil (ii) & (iii) des Satzes, mit einem „Umweg“ über $\tilde{C}$:

Es ist $\psi^{-1}(P) = E$, und da $\tilde{C}_0$ abgeschlossen in $\mathbb{A}^2 \setminus E$ ist, sind die Punkte in $\tilde{C} \setminus \tilde{C}_0$ gerade

$$\tilde{C} \cap E = \{(0,\alpha) | \tilde{F}(0,\alpha) = F_r(1,\alpha) = 0\};$$

dies sind wiederum die Punkte $\tilde{P}_i = (0,\alpha_i)$.
Da $\varphi : (x,z) \mapsto (x,xz,z)$ ein Isomorphismus ist, und $\varphi(\tilde{P}_i) = (0,0,\alpha_i) = P_i$, ist also auch

$$C' \setminus C'_0 = \{\varphi(\tilde{P}_i)| \quad i\} = \{P_i| \quad i\}.$$

Da nun $\rho(P_i) = P$ für alle i, erhalten wir $\rho^{-1}(P) = \{P_i| \quad i\}$.
Um nun die Vielfachheit eines Punktes $\tilde{P}_i$ zu ermitteln, verschieben wir diesen (mit Kurve) auf den Nullpunkt und betrachten dann den kleinsten vorkommenden Grad. Wir haben also $\tilde{F}(X,Z+\alpha_i) = \tilde{F}_r(1,Z+\alpha_i) + \ldots + X^{n-r}\tilde{F}_n(1,Z+\alpha_i)$. Betrachten nur

$$F_r(1,Z+\alpha_i) = \prod_{j=1}^{s}(Z+\alpha_i-\alpha_j)^{r_j} = Z^{r_i}\prod_{j\neq i}(Z+\alpha_i-\alpha_j)^{r_j}.$$

Beim Ausmultiplizieren ist der Term kleinsten Grades $Z^{r_i}\prod_{j\neq i}(\alpha_i-\alpha_j)^{r_j} \neq 0$, da $\alpha_j \neq \alpha_i$ für $j \neq i$.
Somit kommt in $\tilde{F}(X,Z+\alpha_i)$ ein echter Term vom Grad r_i vor, also ist $m_{\tilde{P}_i}(C') \leq r_i$.
Da φ ja ein Isomorphismus ist, haben wir insbesondere $\mathcal{O}_{P_i}(C') = \mathcal{O}_{\tilde{P}_i}(\tilde{C})$ und nach 2.2 haben P_i und $\tilde{P}_i$ dieselbe Vielfachheit. Also gilt auch

$$m_{P_i}(C') \leq r_i.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

4. Aufblasung von Punkten im $\mathbb{P}^2$

2.9. Definition & Erinnerung (Segre-Einbettung)**.** Seien $m,n \in \mathbb{N}$. Die injektive Abbildung

$$\iota : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{n+m+nm}$$

$$((x_0 : \ldots : x_n),(y_0 : \ldots : y_m)) \longmapsto (x_0y_0 : \ldots : x_0y_m : x_1y_0 : \ldots.. : x_ny_m)$$

heißt Segre-Einbettung.
Eine Menge in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ ist offen/abgeschlossen, wenn sie das Urbild unter der Segre-Einbettung einer offenen/abgeschlossenen Menge in $\mathbb{P}^{n+m+nm}$ mit der üblichen Zariskitopologie ist.

Anders gesagt: Wir definieren die Zariski-Topologie auf $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ durch die Segre-Einbettung ι in den $\mathbb{P}^{n+m+nm}$ mit der Zariskitopologie.

2.10. Bemerkung. Für zwei Morphismen $\phi_1 : U \to V$ und $\phi_2 : U \to W$ ist auch $\phi : U \to V \times W$ mit $\phi(u) := (\phi_1(u), \phi_2(u))$ ein Morphismus.

Nun blasen wir die projektive Ebene in mehreren Punkten auf. Definiere $U_2 := \{(x_0 : x_1 : x_2) | x_2 \neq 0\} = \mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{V}(X_2)$; es seien $P_1, \ldots, P_s \in \mathbb{P}^2$ paarweise verschiedene Punkte, o.E. $P_i = (a_{i_0} : a_{i_1} : 1) \in U_2$ $(i = 1, \ldots, s)$.
Es sei $U := \mathbb{P}^2 \setminus \{P_1, \ldots, P_s\}$ und wir definieren

$$f_i : U \to \mathbb{P}^1, \quad (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 - a_{i_0} x_2 : x_1 - a_{i_1} x_2).$$

Weiter sei $f := (f_1, \ldots, f_s) : U \to \mathbb{P}^1 \times \ldots \times \mathbb{P}^1$, $x \mapsto (f_1(x) : \ldots : f_s(x))$.
Sei $G \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \times \ldots \times \mathbb{P}^1$ der Graph von f und $g : U \to G$ der zugehörige Graphenmorphismus.
Definiere nun

$$B := \mathcal{V}(Y_{i_0}(X_1 - a_{i_1} X_2) - Y_{i_1}(X_0 - a_{i_0} X_2) | i = 1, \ldots, s) \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \times \ldots \times \mathbb{P}^1,$$

wobei $(Y_{i_0} : Y_{i_1})$ die Koordinaten der i-ten projektiven Gerade seien.
Weiter sei $\pi : B \to U$ die Projektion auf die projektive Ebene, eingeschränkt auf B.

2.11. Definition.
Wir nennen B die *Aufblasung* der projektiven Ebene in den Punkten $P_1, \ldots, P_s$, zusammen mit der Projektion π, die wir *Niederblasung* nennen.
Die $E_i := \pi^{-1}(P_i)$ $(i = 1, \ldots, s)$ heißen die Ausnahmefasern von π.

Es ist $G \subseteq B$, wie man durch leichtes Nachrechnen sieht. Außerdem ist B abgeschlossen; dazu zeigen wir die Abgeschlossenheit der Mengen $B_i := \mathcal{V}(Y_{i_0}(X_1 - a_{i_1} X_2) - Y_{i_1}(X_0 - a_{i_1} X_2)) \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$, mit der Segre-Einbettung $\iota : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^5$.
Wir zeigen dies o.E. für $i = 1$. Seien hierzu $z_{kj} := x_k y_{1_j}$ $(k = 0, 1, 2,\ j = 0, 1)$ die homogenen Koordinaten im $\mathbb{P}^5$.
Wir betrachten die Varietät $A_1 := \mathcal{V}(Z_{10} - a_1 Z_{20} - Z_{01} + a_0 Z_{21})$ und sehen, dass $\iota(B) \subseteq A$ ist. Für die andere Richtung sei $z \in A \cap im(\iota)$. Da ι injektiv ist (durch die sechs Gleichungen $z_{kj} = x_k y_j$), erhalten wir zu z eindeutige x_k und y_j $(k = 0, 1, 2,\ j = 0, 1)$, und wegen $(Z_{10} - a_1 Z_{20} - Z_{01} + a_0 Z_{21}) = Y_0(X_1 - a_{1_1} X_2) - Y_1(X_0 - a_{1_0} X_2)$ ist auch $B \supset \iota^{-1}(A)$.
Also haben wir insgesamt $B_1 = \iota^{-1}(A_1)$ und B_1 ist somit abgeschlossen.
Mit den B_i sind auch $B_i' := B_i \times \mathbb{P}^1 \times \ldots \times \mathbb{P}^1$ abgeschlossen, und damit auch der Schnitt $\bigcap_{i=1}^s B_i' = B$.

Es gilt $E_i = \{P_i\} \times f_1(P_1) \times \ldots \times \mathbb{P}^1 \times \ldots \times f_s(P_i)$, wobei $\mathbb{P}^1$ an i-ter Stelle steht. Also ist E_i isomorph zu $\mathbb{P}^1$.
Weiter ist $B \setminus \bigcup_{i=1}^s E_i = B \cap (U \times \mathbb{P}^1 \times \ldots \times \mathbb{P}^1) = G$. Die linke Gleichheit gilt, da die hinteren Komponenten durch Vorgabe der ersten bestimmt sind; also wäre jeder Punkt, der in der ersten Komponente P_i stehen hat, schon in E_i. Ebenso folgt die rechte Gleichheit.
Damit ist $\pi|_G : G \to U$ ein Isomorphismus mit Umkehrmorphismus g.

Nun betrachten wir projektive Kurven in $\mathbb{P}^2$.
Sei also C eine ebene projektive Kurve, seien P_i $(i = 1, \ldots, s)$ Punkte von C, o.E. $P_i \in U_2$ und wieder $U := \mathbb{P}^2 \setminus \{P_1, \ldots, P_s\}$.
Definiere (wie im Affinen) die quasiprojektive Kurve

$$C_0 := C \cap U = C \setminus \{P_1, \ldots, P_s\}.$$

Sei weiter $C_0' := g(C_0) = \pi^{-1}(C_0)$ und C' der Abschluss von C_0'.

2.12. Lemma. *Bezeichnungen wie eben. Dann sind C_0 und C_0' isomorph, C und C' sind birational äquivalent.*

Beweis: Analog zu Lemma 2.3 im Affinen. □

Durch diese Isomorphie sehen wir, dass die Punkte von C_0' und deren Vielfachheit wieder den Punkten von C_0 mit Vielfachheit entsprechen.

Nun untersuchen wir noch die Punkte auf

$$C' \setminus C_0' = C' \cap \pi^{-1}(\{P_1\} \cup \ldots \cup \{P_s\}) = C' \cap (E_1 \cup \ldots \cup E_s).$$

Wir untersuchen die $C' \cap E_1, \ldots, C' \cap E_s$ einzeln.
Ohne Einschränkung betrachte $C' \cap E_1$.
Es sei $\pi_{\bar{1}} : B \to \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ die Projektion auf die ersten *beiden* Komponenten, eingeschränkt auf B, und es sei $B_{\bar{1}} := \pi_{\bar{1}}(B) \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$.
Es ist $B_{\bar{1}}$ gerade die Aufblasung im Punkt P_1. Denn: Die Aufblasung im Punkt P_1 ist durch die Varietät

$$B_1 := \mathcal{V}(Y_{1_0}(X_1 - a_{1_1}X_2) - Y_{1_1}(X_0 - a_{1_0}X_2)) \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$$

definiert. Da in $B_{\bar{1}}$ durch das Projizieren auf $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ nur diese gleiche Bedingung an Y_{1_0} und Y_{1_1} übrigbleibt, gilt $B_1 = B_{\bar{1}}$. Die zugehörige Niederblasung nennen wir π_1.
Damit ist nach Definition B wiederum die Aufblasung von B_1 in den Punkten, die $P_2, \ldots P_s$ entsprechen.
Die Einschränkung $\pi_{\bar{1}}|_{B \setminus \bigcup_{i=2}^s E_i} : B \setminus \bigcup_{i=2}^s E_i \to B_{\bar{1}} \setminus \bigcup_{i=2}^s \{P_i\} \times f_1(P_i)$ ist sogar ein Isomorphismus.

Hiermit ist gezeigt, dass wir die Ausnahmefasern einzeln untersuchen können und für die Vielfachheiten der Punkte auf der Ausnahmefaser $P \in C' \cap E_1$ gilt:

$$m_P(C') = m_{\pi_{\bar{1}}(P)}(\pi_{\bar{1}}(C'))$$

Sei $C_1{}' := \pi_{\bar{1}}(C')$, also nach eben Gezeigtem die Aufblasung von C in P_1. Bisher befinden wir uns also in folgendem Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
C_0{}' \arrow[r] & C' \arrow[r, "\pi_{\bar{1}}"] \arrow[d, "\pi"'] & C_1{}' \arrow[dl, "\pi_1"] \\
C_0 \arrow[u, "g"'] \arrow[r] & C &
\end{tikzcd}$$

Nun wollen wir zeigen, dass wir den zu untersuchenden Punkt ohne Einschränkung „verlegen“ können, also dass die Aufblasung nach einem Koordinatenwechsel isomorph zur Aufblasung in diesem Punkt ist.

2.13. Lemma. *Sei $P \in \mathbb{P}^2$. Sei $B_P \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ die Aufblasung der projektiven Ebene in P, π die Niederblasung. Sei weiter $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ ein projektiver Koordinatenwechsel mit $T(P) = (0:0:1)$. Dann gibt es einen projektiven Koordinatenwechsel $T_1 : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ so, dass $(T, T_1)(B_P) = B_{T(P)} = B_{(0:0:1)}$*

Beweis: Sei o.E. $P = (a : b : 1)$. T ist auf K^3 durch eine invertierbare Matrix $D = (\delta_{ij})_{i,j=1,2,3}$ gegeben. Gesucht ist nun eine 2×2-Matrix $C = (\gamma_{ij})_{i,j}$. □

Sei C also eine projektive Kurve, $P_1 \in C$, T ein projektiver Koordinatenwechsel mit $T(P_1) = (0:0:1)$, $C^0 := T(C)$. Seien weiter $C^{1'}$ bzw. $C^{0'}$ die jeweiligen Aufblasungen in P_1 bzw. in $(0:0:1)$ mit entsprechenden Projektionen π_1 und π_0, und sei T_1 mit $T \times T_1(C^{1'}) = C^{0'}$.
Dann haben wir ein weiteres kommutierendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} C^{1'} \arrow[r, "T\times T_1"] \arrow[d, "\pi_1"'] & C^{0'} \arrow[d, "\pi_0"] \\ C \arrow[r, "T"] & C^0 \end{tikzcd}$$

Da Koordinatenwechsel Isomorphismen sind, wied die Kurve hier isomorph abgbildet, insbesondere bleiben alle Vielfachheiten der Punkte auf der Kurve erhalten.
Insgesamt haben wir

$$\begin{tikzcd} {C_0}' \arrow[r] & C' \arrow[rr, "\pi_{\bar{1}}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & C^{1'} \arrow[rr, "T\times T_1"] \arrow[dl, "\pi_1"] & & C^{0'} \arrow[dl, "\pi_0"] \\ C_0 \arrow[u, "g"] \arrow[rr] & & C \arrow[rr, "T"] & & C^0 & \end{tikzcd}$$

Schließlich zeigen wir, dass die Vielfachheiten der Punkte auf der Ausnahmefaser der Aufblasung im Projektiven gleich denen auf der Aufnahmefaser der Aublasung des Nullpunktes im Affinen ist.
Zunächst noch ein paar Erinnerungen:

2.14. Definition & Erinnerung. Als Menge ist $\mathbb{P}^n = K^{n+1}/K^*$, die Geraden in k^{n+1}.
Sei $v_0, \ldots, v_n$ eine Basis von K^{n+1}, $H := span\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Hyperfläche.
Sei der projektive Punkt $x \in \mathbb{P}^n$ beliebig, $(\alpha_0 : \ldots : \alpha_n)$ seine Koordinatendarstellung bezüglich $v_0, \ldots, v_n$.
Dann gibt es einen Isomorphismus

$$\kappa_{v_0,\ldots,v_n} : \mathbb{P}^n \setminus H \to \mathbb{A}^n, \quad (\alpha_0 : \ldots : \alpha_n) \mapsto (\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \ldots, \frac{\alpha_n}{\alpha_0}).$$

Einen solchen Isomorphismus nennen wir eine *affine Karte* von $\mathbb{P}^n$.

2.15. Korollar. *Sei $U_i := \mathbb{P}^n \setminus \mathcal{V}(X_i)$ und sei $V \subseteq \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät mit $V \cap U_i \neq \emptyset$. Dann ist $V \cap U_i \cong W \subset \mathbb{A}^n$, W eine affine Varietät.*

2.16. Bemerkung. Sei C ein ebene projektive Kurve und weiter $C_{\text{aff}} = \kappa_{e_3,e_1,e_2}(C)$ die entsprechende Kurve in der affinen Karte. Dann gilt:

(i) $F_{C_{\text{aff}}}(X_0, X_1) = F_C(X_0, X_1, 1)$
(ii) $F_C(X_0, X_1, X_2)$ ist die Homogenisierung von $F_{C_{\text{aff}}}(X_0, X_1)$ nach X_2.

Mit dem Koordinatenwechsel von eben können wir also ohne Einschränkung C^0 betrachten. Sei $C^{0\prime}$ die Aufblasung von C^0 in $(0:0:1)$ mit Ausnahmefaser $E_{(0:0:1)} = \{(0:0:1)\} \times \mathbb{P}^1$.
Die zugehörige Niederblasung nennen wir $\pi_1 : C^{0\prime} \to C^0$.
Sei weiter $C^0_{\text{aff}} = C^0 \cap U_2$ eine (nach 4.6) affine Kurve , und $C^0_{\text{aff}}{}'$ die Aufblasung von C^0_{aff} im Nullpunkt mit Ausnahmefaser L_1 und Niederblasung π_{aff}.
Nun zeigen wir, dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
C^{0\prime} \arrow[d, "\pi_0"'] & C^0_{\text{aff}}{}' \arrow[l, "\xi"'] \arrow[d, "\pi_{\text{aff}}"] \\
C^0 \supseteq C^0 \cap U_2 \arrow[r, "\kappa"'] & C^0_{\text{aff}}
\end{tikzcd}$$

Hierbei sei κ die affine Karte bezüglich der Standardbasis.
Für B_{aff} die Aufblasung der affinen Ebene im Nullpunkt und $B_{(0:0:1)}$ die Aufblasung der projektiven Ebene in $(0:0:1)$ sei $\xi : B_{\text{aff}} \to B_{(0:0:1)}$ definiert durch

$$\xi(x, xz, z) = (x : xz : 1) \times (z : 1).$$

Man sieht, dass ξ injektiv ist, und damit ist $\xi : B_{\text{aff}} \to B_{(0:0:1)} \cap (U_2 \times U_1)$ ein Isomorphismus, wobei $U_2 \subseteq \mathbb{P}^2$ und $U_1 \subseteq \mathbb{P}^1$ sind.
Wichtig hier ist, dass auch L_1 durch den Isomorphismus abgebildet wird, es ist $\xi(L_1) = E_1 \cap U_1$.
Es bleibt also zu zeigen, dass $\xi(C^0_{\text{aff}}{}') = C^{0\prime}$ gilt.

Hierzu erinnern wir uns an den Isomorphismus aus Kapitel 3, $\varphi : \mathbb{A}^2 \to B_{\text{aff}}$, $\varphi(x, z) = (x, xz, z)$ mit Umkehrmorphismus $\pi_{1,3}$, und es war $\psi := \pi_{\text{aff}} \circ \varphi$.
Weiter definieren wir

$$\tilde{\xi} : \mathbb{A}^2 \to B_{(0:0:1)}, \quad \tilde{\xi}(x, z) = (x : xz : 1) \times (1 : z).$$

Dann ist $\tilde{\xi} = \xi \circ \varphi$.
Gegeben ist nun also unsere Kurve C^0 mit $F_{C^0}(X_0, X_1, X_2)$ homogen, womit zu C^0_{aff} nach Korollar 4.8 $F_{C^0_{\text{aff}}}(X, Y) = F_{C^0}(X, Y, 1)$ ist.
Wie in Kapitel 3 sei nun $F_{C^0_{\text{aff}}} = F_r + \dots F_n$; mit Lemma 3.1 erhalten wir $F_{\tilde{C}^0_{\text{aff}}}(X, Z) = F_r(1, Z) + \dots X^{n-r} F_n(1, Z)$, wobei $\tilde{C}^0_{\text{aff}} = \psi^{-1}(C^0_{\text{aff}})$ sei.

Betrachte hier nun das erweiterte Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
C^{0\prime} \supseteq C^{0\prime} \cap (U_2 \times U_1) \arrow[d, "\pi_0"'] & & \tilde{C}^0_{\text{aff}} \arrow[ll, "\tilde{\xi}"'] \arrow[dr, "\psi"'] & & C^0_{\text{aff}}{}' \arrow[ll, "\pi_{1,3}"'] \arrow[dl, "\pi_{\text{aff}}"] \\
C^0 \arrow[rrr, "\kappa"'] & & & C^0_{\text{aff}} &
\end{tikzcd}$$

Da C^0 irreduzibel ist, ist auch die Aufblasung $C^{0\prime}$ und damit $C^{0\prime} \cap (U_2 \times U_0)$ irreduzibel. Da zudem $\tilde{C}^0_{\text{aff}}$, $C^{0\prime} \cap (U_2 \times U_1)$ und C^0 birational äquivalent sind, reicht es zu zeigen, dass für $(x, z) \in \tilde{C}^0_{\text{aff}}$ auch $\pi_0 \circ \tilde{\xi}(x, z) \in C^0$ gilt.
Dies rechnet man schnell nach, denn es ist $\pi_0 \circ \tilde{\xi}(x, z) = (x : xz : 1)$. Wenn $F_{\tilde{C}^0_{\text{aff}}}(x, z) = 0$, so ist auch $0 = F_{C^0_{\text{aff}}}(x, xz) = F_{C^0}(x, xz, 1)$ und somit liegt $\pi_0 \circ \tilde{\xi}(x, z)$ auf C_0, wenn (x, z) auf ${C^0_{\text{aff}}}'$ liegt.
Also ist $\tilde{\xi}$ ein Isomorphismus mit $\tilde{\xi}(\tilde{C'}^0_{\text{aff}}) = C^{0\prime}$.
Insgesamt ist damit $\xi = \tilde{\xi} \circ \pi_{1,3}$ ein Isomorphismus mit $\xi(\tilde{C'}^0_{\text{aff}}) = C^{0\prime}$.

Damit ist gezeigt:
Sei C eine Ebene projektive Kurve. Die Vielfachheit des Punktes $P_1 \in C$ ist gleich der Vielfachheit des Nullpunktes auf $\tilde{C}^0_{\text{aff}}$, da sie durch die von uns definierten Isomorphismen bzw. birationalen Äquivalenzen erhalten bleibt.
Auerdem sind durch die Isomorphismen bzw. birationalen Äquivalenzen auch die Vielfachheiten der Punkte auf der Ausnahmefaser E_1 und L_1 gleich, die wir ja untersuchen.
Wie sich nun die Vielfachheiten bei der Aufblasung des Nullpunktes auf $\tilde{C}^0_{\text{aff}}$ verhalten, wissen wir aus Kapitel 2, und somit kennen wir die Vielfachheiten der Punkte auf der Ausnahmefaser L_1.
Schließlich können wir iterativ die Punkte auf allen Ausnahmefasern untersuchen.

2.17. Definition. Eine Singularität P auf einer ebenen projektiven Kurve C heißt gewöhnlich, wenn unter jeder affinen Karte κ, die den Punkt P abbildet, $\kappa(P)$ eine gewöhnliche Singularität der Kurve $\kappa(C)$ ist.

2.18. Satz. *Sei C eine ebene projektive Kurve mit nur gewöhnlichen Singularitäten. Dann ist sie birational äquivalent zu einer projektiven Kurve ohne Singularitäten, also mit nur einfachen Punkten.*

Beweis: Das haben wir in diesem Kapitel gezeigt.
Durch den Schritt über das Affine erhalten wir, dass die Punkte in den Urbildern der Singularitäten $\pi^{-1}(P_i)$ einfach sind. $\square$

KAPITEL 3

Quadratische Transformationen

Vortragsausarbeitung von Anastacia Staub

1. Einleitung

Im Kapitel über das „Aufblasen“ eines Punktes haben wir auf der neuen Kurve bessere Singularitäten erhalten. Das Problem war nur, dass die neue Kurve nicht länger eine ebene Kurve war. D.h. wir können alle Sätze, die wir für die ebenen Kurven erhalten haben nicht anwenden. Insbesondere könnnen wir den selben Algorythmus nicht auf die neue Kurve anwenden um die restlichen Singularitäten zu eliminieren.

3.1. Definition. Sei C eine irreduzible projektive (affine) ebene Kurve, und F_C das dazugehörige homogene Polynom. Wir definieren den Grad der Kurve als $\deg(C) := \deg(F_C)$.

Wir wollen zunächst den Begriff einer Tangente einer projektiven ebenen Kurve an einem Punkt der Kurve erklären, sowie den Begriff der Vielfachheit einer Tangente.

3.2. Erinnerung. $C \subset \mathbb{A}^2$ sei eine irreduzible, affine, ebene Kurve und $P = (0,0) \in C$, dann sind die Tangenten in P an C wie folgt definiert:
man betrachte

$$F_C = \sum_{i=r}^{n} F_i(X,Y) \quad \text{mit} \quad F_r = \prod_i (a_iX - b_iY)^{r_i}.$$

Die linearen Polynome $(a_iX - b_iY)$ nennen wir dann Tangenten von C in $P = (0,0)$.

3.3. Definition. Zur Vereinfachung der Sprechweise bezeichnen wir ab nun die Varietät $V(a_iX - b_iY)$ als eine *Tangente* an C in $P = (0,0)$ mit (Tangenten)vielfachheit r_i.

Diese Definition kann man ähnlich wie den ursprünglichen Tangentenbegriff mit Hilfe von Translationen auch auf beliebige Kurvenpunkte verallgemeinern:

Sei $P \in C$ beliebig und $T : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ eine Translationsabbildung mit $T(P) = (0,0)$. Weiter sei L eine Tangente von $T(C)$ im Nullpunkt, dann heißt $T^{-1}(L)$ die Tangente von C in P und ihre Vielfachheiten bezeichnet die Vielfachheit von L.

3.4. Definition. Sei C eine projektive irreduzible ebene Kurve und $P \in C$. Sei v_0, v_1, v_2 eine Basis von K^3 und $P \notin H = Kv_1 + Kv_2 \setminus \sim \mathbb{P}^2$ und

$$\kappa = \kappa_{v_0,v_1,v_2} : \mathbb{P}^2 \setminus H \to \mathbb{A}^2$$

die zugahörige affine Karte. Dann nennen wir eine projektive Gerade $L \subset \mathbb{P}^2$ eine Tangente von C in P, falls L der projektive Abschluss des Urbildes einer Tangente von $\kappa(C)$ an $\kappa(P)$ bezüglich κ ist. Weiter bezeichnen wir die Vielfachheit von $\kappa(L \setminus H)$ an $\kappa(C)$ in $\kappa(P)$ als die Vielfachheit von L an C in P.

3.5. Bemerkung. Es müsste eigentlich gezeigt werden, dass die Definition unabhängig von der Wahl der affinen Karte ist.

3.6. Korollar. *Sei $C \subset \mathbb{P}^2$ eine irreduzible affine ebene Kurve und $P = [0 : 0 : 1] \in C$ mit dem zugehörigen homogenen Polynom $F_C = F_r(X,Y)Z^{n-r} + \cdots + F_n(X,Y)$, $\deg F_j = j$ und $F_r = \prod_i (a_iX - b_iY)^{r_i}$. Dann sind die $V(a_iX - b_iY) \subset \mathbb{P}^2$ die Tangenten von C in P und r_i jeweils deren Vielfachheiten.*
Desweiteren ist $r = \sum r_i$ die Vielfachheit von P in C.

3.7. Erinnerung. Ein Punkt P heit ein r-facher Punkt, falls seine Vielfachheit gleich $r \in \mathbb{N}$ ist,
P heisst einfach, falls $r = 1$ gilt, sonst 0-fach oder Singularität.

3.8. Definition. P heit gewöhnlich, falls $r \geq 1$ und alle $r_i = 1$

2. Quadratische Transformationen

3.9. Definition. Die Punkte $P := [0 : 0 : 1]$, $P' := [0 : 1 : 0]$ und $P'' := [1 : 0 : 0] \in \mathbb{P}^2$ heissen fundamentale Punkte.
Die Geraden $L := V(Z)$, $L' := V(Y)$ und $L'' := V(X)$ heien irreguläre Geraden.
$U := \mathbb{P}^2 \setminus V(XYZ)$

Beachte: L' und L'' schneiden sich in P und L ist die Gerade durch P' und P''.

3.10. Definition. Die Abbildung $Q : \mathbb{P}^2 \setminus \{P, P'', P''\} \to \mathbb{P}^2$, definiert durch

$$Q([x : y : z]) = [yz : xz : xy]$$

nennt man die quadratische Transformation.

3.11. Bemerkung. Q ist ein Morphismus zwischen $\mathbb{P}^2 \setminus \{P, P', P''\}$ und $U \cup \{P, P', P''\}$ und $Q^{-1}(P) = L - \{P', P''\}$.
Sei $[x : y : z] \in U$, dann gilt $Q(Q([x : y : z])) = [xzxy : yzxy : yzxz] = [x : y : z]$. d.h. $Q = Q^{-1}$ in U und somit ist Q ein Isomorphismus von U in sich selbst.

Sei nun C eine irred. Kurve in $\mathbb{P}^2$. Wir nehmen an C ist keine irreguläre Gerade. Dann ist $C \cap U$ offen in C und geschlossen in U, damit ist auch $Q^{-1}(C \cap U) = Q(C \cap U)$ eine abgeschlossene Untervarietät von U. Sei C' der Abschluss von $Q^{-1}(C \cap U)$ in $\mathbb{P}^2$. Dann sind C und C' birational äquivalent.

Sei C eine irreduzible projektive Kurve vom Grad n, d.h. $\deg F_C = n$. Setze $F := F_C$, dann ist $F^Q := F \circ Q^{-1} = F(YZ, XZ, XY)$ ein homogenes Polynom vom Grad $2n$.

3.12. Theorem.

(i) *Wenn* $m_P(C) = r$, $m_{P'}(C) = r'$, $m_{P''}(C) = r''$, *dann sind* $Z^r, X^{r'}, Y^{r''}$ *die höchsten Exponenten von* Z, Y, X, *die* F^Q *teilen. D.h.* $F^Q = Z^r Y^{r'} X^{r''} F'$ *und* F' *wird von* X, Y, Z *nicht geteilt.*
$\deg F' = 2n - r - r' - r''$

(ii) $(F')' = F$, F' *ist irreduzibel und* $F' = F'_C$.

(iii) $m_P(C') = n - r' - r''$ *(wegen der Symmetrie für* P' *und* P'' *analog).*

Beweis:

(i) Zeige die Beh. für P. Da $m_P(C) = r$ können wir F in der Form schreiben:
$F = F_r(X, Y)Z^{n-r} + \ldots + F_n(X, Y)$,
wobei F_i ein homogenes Polynom vom Grad i in X, Y ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F^Q &= F_r(YZ, XZ)(XY)^{n-r} + \ldots + F_n(YZ, XZ) \\ &= Z^r \left(F_r(Y, X)(XY)^{n-r} + \ldots + Z^{n-r} F_n(Y, X)\right) \end{aligned}$$

woraus die Beh. folgt.
Damit können wir zeigen, dass $X^{r''}, Y^{r'}$ die höchsten Potenzen sind, die F^Q teilen, damit gilt:

$$F^Q = X^{r''} Y^{r'} Z^r F'$$

und F' wird von X, Y, Z nicht geteilt

(ii) Zunächst gilt: $(F^Q)^Q = F(XZXY, YZXY, YZXZ) = (XYZ)^n F$, weiter wissen wir mit (i)
$(F^Q)^Q = (X^{r''} Y^{r'} Z^r F')^Q = X^{n_1} Y^{n_2} Z^{n_3} (F')' \Leftrightarrow$
$X^{n-n_1} Y^{n-n_2} Z^{n-n_3} F = (F')'$. Da $(F')'$ nicht von X, Y, Z geteilt wird und F irreduzibel ist folgt, dass F' irreduzibel ist und $(F')' = F$.
Da $Q^{-1}(C \cap U) \subset V(F')$, $Q^{-1}(C \cap U)$ eine abgeschlossene Menge der $\dim_K = 1$ ist folgt sofort $V(F') = C'$.

(iii) Aus

$$F^Q = F_r(Y, X)Z^r Y^{n-r} X^{n-r} + \ldots + F_n(Y, X)Z^n = Z^r Y^{r'} X^{r''} F'$$

folgt für F'

$$F' = \sum_{i=0}^{n-r} F_{r+i}(Y, X) X^{n-r-r''-i} Y^{n-r-r'-i} Z^i.$$

Die Vielfachheit des Punktes $P = [0 : 0 : 1]$ ist der Grad des Polynoms $F_n(Y, X)X^{-r''}Y^{-r'}$, d.h. $m_P(F') = n - r' - r''$.

□

3.13. Definition. Wir sagen, die Kurve C ist in einer guten Lage, wenn für alle Tangenten T an F in den fundamentalen Punkten gilt: $T \neq L, L', L''$.

3.14. Lemma. *Ist C in einer guten Lage, so auch C'.*

Beweis: Sei L eine Tangente von C' in $P' = [0:1:0]$, dann betrachten wir $F'(X,1,Z)$ in $\mathbb{A}^2$. Nach der Definition der Tangente muss Z das Polynom $F'(X,1,Z) = \sum_{i=1}^{n-r} F_{r+i}(1,X)X^{n-r-r''-i}Z^i$ teilen, d.h. $F_r(1,X) = 0$ und da $F_r(Y,X)$ weder von X noch von Y geteilt wird, ist die Bedingung äquivalent zu $F_r(1,0) = 0$. Nach Voraussetzung ist aber L' keine Tangente von C in P, und damit gilt $F_r(1,0) \neq 0$. Da die Def. einer guten Lage bzgl. P, P', P'' symmetrisch ist, gilt die Aussage auch für P' und P''. □

3.15. Bemerkung. Jeder nichtfundamentale Punkt von C auf einer irregulären Geraden wird unter Q auf einen fundamentalen Punkt auf C' abgebildet.

3.16. Lemma. *Wenn C in einer guten Lage ist, und $P_1, \ldots, P_s$ nicht fundamentale Punkte auf $C' \cap L$, dann ist $\sum_{i=1}^{s} m_{P_i}(C') \leq r$.*

Beweis: Die Punkte P_i liegen auf $V(Z)$ und sind keine fundamentalen Punkte, dann gilt $P_j = [1 : \alpha_j : 0]$. Außerdem liegen sie auf der Kurve C'.
$F'(X,Y,Z) = \sum_{i=0}^{n-r} F_{r+i}(Y,X)X^{n-r-r''-i}Y^{n-r-r'-i}Z^i$, d.h. $(\alpha_j, 1)$ sind Nullstellen von

$$F_r(Y,X) = \prod_{l=1}^{L}(a_lY - b_lX)^{r_l} = \prod_{l=1}^{L}(Y - \alpha_lX)^{r_l}$$

Berechne nun die Vielfacheit der Punkte P_j. Dafür betrachten wir

$$F'(1, Y + \alpha_j, Z) = \sum_{i=0}^{n-r} F_{r+i}(Y + \alpha_j, 1)(Y + \alpha_j)^{n-r-r'-i}Z^i$$

$F_r(Y + \alpha_j, 1) = \prod_{l=1}^{L}(Y + \alpha_j - \alpha_l)^{r_l} = Y^{r_j}\prod_{l \neq j}^{L}(Y + \alpha_j - \alpha_l)^{r_l}$.
Bei $(Y + \alpha_j)^{n-r-r'-i}$ kommt ein konstanter Term vor, d.h. der Grad des kleinsten homogenen Anteils ist $\leq r_j$. Da $\sum_{j=1}^{L} r_j = r$ und $L \leq s$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{s} m_{P_j}(C') \leq r$$

.

□

3.17. Bemerkung. Ist $P \notin C$, dann enthält $C' \cap L$ mit dem obigen Lemma höchstens fundamentale Punkte.

3.18. Definition. Wir sagen C ist in einer ausgezeichneten Lage, wenn C in einer guten Lage ist und wenn L die Kurve C in n verschiedenen nicht fundamentalen Punkten schneidet, L', L'' diese in n-r verschiedenen nicht fundamentalen Punkten schneiden und P ein $r - facher$ Punkt ist.

3.19. Bemerkung. Ist C in einer ausgezeichneten Lage mit $m_P(C) = r \geq 0$ dann gilt: $P', P'' \notin C$ und P ist der einzige nicht-gewöhnliche Punkt, der auf einer irregulären Geraden liegt.

Beweis: $V(Y) = L'$ und wir kennen eine Darstellung von $F(X,Y,Z) = F_r(X,Y)Z^{n-r} + \cdots + F_n(X,Y)$. Wir wollen nun die Vielfachheit eines Punktes $p = [1:0:\alpha] \in C \cap L'$ bestimmen. Betrachte dafür

$$F(1,Y,Z) = F_r(1,Y)Z^{n-r} + \cdots + F_n(1,Y)$$

Y teilt $F_n(1,Y)$ nicht , da $P' \notin C$.

$$G(Z) := F(1,0,Z) = F_r(1,0)Z^{n-r} + \cdots F_n(1,0)$$

$G(Z)$ hat nach Vorausstzung $n-r$ verschiedene Nullstellen, d.h. wenn $G(\alpha) = 0$ dann gilt für $G'(Z)$, $G'(\alpha) \neq 0$. Außerdem ist $G'(Z) = \partial_Z(F(X,Y,Z))(1:0:Z)$. Also gilt für jedes α mit $F(1,0,\alpha) = 0$, dass $\partial_Z F(1,Y,Z)(0,\alpha) \neq 0$. Damit ist $[1:0:\alpha]$ ein einfacher Punkt. □

3.20. Theorem. *Sei C in einer ausgezeichneten Lage, dann hat C' folgende vielfache Punkte:*

(i) *Es gibt eine Bijektion zwischen den Punkten auf C', welche nicht auf einer irregulären Geraden befinden, und den Punkten auf C, welche auch nicht auf der irregulären Geraden liegen. Diese Bijektion bildet einfache Punkte auf einfache Punkte, vielfache Punkte auf vielfache Punkte und gewöhnliche Punkte auf gewöhnliche Punkte ab.*

(ii) *P, P', P'' sind gewöhnliche vielfache Punkte mit Vielfachheiten $n, n-r, n-r$.*

(iii) *$C' \cap L'$ und $C' \cap L''$ enthalten nur fundamentale Punkte und seien $P_1, \ldots, P_s$ nicht-fundamentale Punkte auf $C' \cap L$, dann gilt $\sum_{i=1}^{s} m_{P_i}(C') \leq r$.*

Beweis: Beachte da C in einer ausgezeichneten Lage ist, gilt $m_{P'}(C) = m_{P''}(C) = 0$ und damit $\deg F' = 2n - r$

(i) Die Bijektion, von der die Rede ist, ist die durch Q induzierte Isomorphie zwischen $C \cap U$ und $C' \cap U$. [1]

(ii) Betrachte die Schnittpunkte von Z und F. Da P die Vielfachheit $r_P(C) = r$ hat, hat F folgende Darstellung: $F = F_r(X,Y)Z^{n-r} + \cdots + F_n(X,Y)$. Die n- verschiedene Schnittpunkte sind gerade die Nullstellen von $F_n(X,Y) = \prod_{l=1}^{n}(a_iX - b_iY)$, wobei $[a_i : b_i]$ alle unterschiedlich sind.
Jetzt berechnen wir noch die Vielfachheit von $P = [0:0:1]$ auf C' und die Tangenten an P.

$$F'(X,Y,1) = \sum_{i=1}^{n-r} F_{r+i}(Y,X)Y^{n-r-i}X^{n-r-i}$$

[1] Wir haben eigentlich noch nicht gezeigt, dass Isomorphien zwischen Kurven gewöhnliche Punkte auf gewöhnliche Punkte abbilden, und werden dies aus Zeitgründen auch nicht tun. Mit Hilfe von [**Fu**, Problem 3.24*] folgt dies, da gezeigt wird, dass diese Eigenschaft äquivalent zu einer intrinsischen Eigenschaft des Rings der lokalen Funktionen in diesem Punkt ist, und somit durch Isomorphie übertragen wird. Im Lösungshinweis von [**Fu**, Problem 3.24*] sieht es so aus, als müsse man auf das Konzept der 'Intersection Numbers' zurückgreifen, was man aber mit genauem Nachdenken problemlos umgehen kann. Anm. d. Red.

Der kleinste homogene Anteil ist $F_n(Y,X) = \prod_{l=1}^{n}(a_iY - b_iX)$. Damit gilt: $m_P(C') = n$, und alle Tangenten sind unteschiedlich. Für andere Punkte ist die Rechnung analog.

(iii) Da P', P'' nicht auf C liegen, folgt mit Bemerkung 3.17 $C' \cup L'$, $C' \cup L''$ enthalten nur fundamentale Punkte. Rest folgt aus dem Lemma 3.16

□

3.21. Theorem (Bzout). [2] *Für eine irreduzible projektive ebene Kurve vom Grad n, dann gilt folgende Abschätzung:*

$$(n-1)(n-2) \geq \sum_{P \in \mathbb{P}^2} m_P(C)(m_p(C)-1).$$

3.22. Definition. Für eine irreduzible ebene projektive Kurve C und $\deg C = n$ mit vielfachen Punkten der Vielfachheit $m_P(C) = r_P$ definieren wir

$$g^*(C) = \frac{(n-2)(n-1)}{2} - \sum \frac{r_P(r_P-1)}{2} \in \mathbb{N}$$

Die Tatsache, dass $g^*(C) \geq 0$ ist, folgt aus dem Satz von Bzout.

3.23. Theorem. *Sei C in einer ausgezeichneten Lage und $m_P(C) = r$, dann gilt: $g^*(C') = g^*(C) - \sum_{j=1}^{s} \frac{r_j(r_j-1)}{2}$, wobei $r_j = m_{P_j}(C')$ und $P_1, \ldots, P_s$ sind die nicht fundamentalen Punkte auf $C' \cap L$*

Beweis: Da P der einzige Punkt von C der Vielfachheit ≥ 1 der auf einer der irreduziblen Geraden liegt, folgt:

$$g^*(C) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{C \cap U} \frac{r_P(r_P-1)}{2} - \underbrace{\frac{r(r-1)}{2}}_{m_P(C)=r}$$

Nun betrachten wir die vielfachen Punkte auf C'. Auf $C' \cap L'$ und $C' \cap L'$ liegen nur P, P', P'' und auf $C' \cap L$ liegen P, P' und $P_1, \ldots, P_s$. Weiter liegen P', P'' nicht auf C und damit ist $\deg(F') = 2n - r$. Also erhalten wir:

$$\begin{aligned} g^*(C') = {} & \underbrace{\frac{(2n-r-1)(2n-r-2)}{2}}_{\deg F' = 2n-r} - \sum_{C' \cap U} \frac{r_P(r_P-1)}{2} \\ & - \underbrace{\frac{n(n-1)}{2}}_{m_P(C')=n} - \underbrace{\frac{2(n-r)(n-r-1)}{2}}_{m_{P'}(C')=m_{P''}(C')=n-r} - \sum_{j=1}^{s} \frac{r_j(r_j-1)}{2} \end{aligned}$$

Da $C \cap U \cong C' \cap U$, ist zu zeigen:

$$(2n-r-1)(2n-r-2) - n(n-1) - 2(n-r)(n-r-1) = (n-1)(n-2) - r(r-1)$$

Ausmultiplizieren zeigt, dass die Gleichheit erfüllt ist. □

[2] Das ist ein Korollar aus dem eigentlich bekannten Satz von Bezout: für zwei projektive irreduzible ebene Kurven C_1 und C_2 gilt folgende Ungleichung: $\sum_{P \in \mathbb{P}^2} m_P(C_1)m_P(C_2) \leq \deg(C_1)\deg(C_2)$, die Herleitung wird in diesem Vortrag nicht erläutert.

3.24. Theorem. *Sei $C \subset \mathbb{P}^2$ eine irreduzible Kurve vom Grad n. Sei $p \in \mathbb{P}^2$ ein Punkt mit Vielfachheit $m_p(C) = r$ in C. Dann haben fast alle Geraden durch den Punkt p, d.h. alle bis auf endlich viel, $n - r$ verschiedene Schnittpunkte mit C.*

Beweis: Sei o.B.d.A $p = [0 : 1 : 0]$ mit $m_p(C) = r$. Betrachte dann die projektiven Geraden

$$L_\lambda = \{[\lambda : t : 1] \mid t \in K\} \subset \{p\} \subset \mathbb{P}^2$$

Weiter kennen wir eine Darstellung von F_C: $F_C = \sum_{j=r}^{n} F_j(X, Z)Y^{n-j}$.
Definiere:

$$G_\lambda(T) = F_C(\lambda, t, 1) = \sum_{j=r}^{n} F_j(\lambda, 1)t^{n-j} \in K(\lambda)[t]$$

F_C hat mit L_λ genau dann $n-r$ unterschiedliche Schnittpunkte, wenn $G_\lambda(t)$ $n - r$ unteschiedliche Nullpunkte hat.
Seien $x_1, ..., x_{n-r}$ die Nullstellen von $G_\lambda(t)$. Betrachte die Diskriminante:

$$D(G_\lambda) = \prod_{i<j}(x_i - x_j)^2$$

Die Diskriminante ist genau dann ungleich Null, wenn alle Nullstellen von G_λ unterschiedlich sind. Desweiteren ist die Diskriminante eine symmetrische Funktion in den Nullstellen, d.h. sie ist darstellbar als Summe der elementarsymmetrischen Polynome in den Nullstellen und diese sind gerade die Koeffizienten von $\frac{G_\lambda}{F_r(\lambda,1)}$. Da $F_r(\lambda, 1) = 0$ nur für endlich viele λ gilt, schlieen wir diese aus.
Dann ist $D_{G_\lambda} F_r(\lambda, 1)$ ein Polynom in λ und hat nur endlich viele Nullstellen.
Also gilt für fast alle λ:
$F_C \cap L_\lambda$ hat $n - r$ unterschiedliche Nullstellen. □

3.25. Bemerkung. Die Koeffizienten von

$$(T + X_1)(T + X_2) \cdots (T + X_n) = T^n + \sigma_1 T^{n-1} + \sigma_2 T^{n-2} + \ldots + \sigma_n$$

als Polynom in T sind symmetrisch in $X_1, \ldots, X_n$; sie heien elementarsymmetrische Polynome. Sie sind explizit angebbar als:
$\sigma_1 = X_1 + \ldots + X_n$
$\sigma_2 = X_1X_2 + \ldots + X_1X_n + X_2X_3 + \ldots + X_2X_n + \ldots + X_{n-1}X_n$
$\vdots$
$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} X_{i_1} \cdots X_{i_k}$
$\vdots$
$\sigma_n = X_1 \cdots X_n$
Dabei kann man σ_k auch schreiben als

$$\sigma_k = \sum_{S \subseteq \{1,\ldots,n\} \text{ und } \#S=k} \prod_{i \in S} X_i.$$

3.26. Lemma. *Sei C eine irreduzible ebene Kurve in $\mathbb{P}^2$, $p \in C$, dann gibt es eine projektive Koordinatentransfomation T auf $\mathbb{P}^2$, so dass sich $T(C)$ in einer ausgezeichneten Lage befindet und $T(p) = [0 : 0 : 1] = P$*

Beweis: Sei $\deg F_C = n$ und $m_P(C) = r$, dann gibt es nach dem vorhergehenden Satz eine Gerade L',die $n-r$ unterschiedliche Schnittpunkte mit C hat. Betrachte dann ein Punkt P'' der auf L' liegt und keiner der Schnittpunkte ist. Dieser hat Vielfachheit 0, d.h. durch diesen können wir eine Gerade L legen, die n unterschiedliche Schnittpunkte mit C hat. Da durch P unendlich viele Geraden gehen die $n-r$ unterschiedliche Schnittpunkte mit C haben, gibt es auch mindestens eine die L in einem Punkt auerhalb von C schneidet und nicht gleich L' ist. Diese nennen wir L'' und den Schnittpunkt von L'' und L nennen wir P'. Die Schnittpunkte der Kurven bilden eine Basis in K^3. Wir können dann eine Basistransfomation betrachten, die die Schnittpunkte auf die fundamentalen Punkte abbildet. Diese wäre dann die gesuchte Transfomation. □

3.27. Definition. Ist T so eine projektive Koordinatentransformation, dann nennen wir $T \circ Q$ ab jetzt eine *quadratische Transformation*, und sagen, dass C eine quadratisch Transformierte von $C_{Q,T} := (T^{-1}(C))' = \overline{Q(T^{-1}(C) \cap U)}$ ist.

3.28. Bemerkung. $T \circ Q|_{C_{Q,T} \setminus \{P,P',P''\}} : C_{Q,T} \setminus \{P, P', P''\} \longrightarrow C$ ist ein Homomorphismus mit Bild $C \cap T(U \cup \{P, P', P''\})$, wobei P, P', P'' die fundamentalen Punkte (wie am Kapitelanfang definiert) bezeichnen. (Diese Tatsache wird im nächsten Kapitel ein Rolle spielen.)
$T \circ Q$ schränkt sich zu einem Isomorphismus zwischen $C_{Q,T} \cap U$ und $C \cap T(U)$ ein.

3.29. Definition. Wir sagen C *geht aus einer anderen irreduziblen ebenen projektive Kurve* $\tilde{C}$ *nach endlich vielen quadratischen Transfomationen hervor*, falls es eine endliche Folge $C = C_0, \ldots, C_m = \tilde{C}$ gibt, so dass $C_i = C_{i-1 Q,T_i}$ ist für eine projetive Koordinatentransformation T_i des $\mathbb{P}^2$.

3.30. Bemerkung. In diesem Fall sind C und $\tilde{C}$ birational äquivalent.

3.31. Definition. Ist $T(C)$ in einer ausgezeichneten Lage und $p \in C$ mit $T(p) = [0 : 0 : 1] = P$, dann sagen wir die quadratische Transformation $T \circ Q$ *ist im Punkt* p *zentriert.*

3.32. Theorem. *Sei* C *eine ebene irreduzible projektive Kurve. Dann gibt es eine ebensolche Kurve* $\tilde{C}$ *mit nur gewöhnlichen Singularitäten, so dass* C *aus* $\tilde{C}$ *nach endlich viele quadratischen Transformationen hervorgeht.*

Beweis: Für den Beweis betrachten wir uns iterativ eine Folge von quadratisch Transformierten und quadratischen Transformationen $T_i \circ Q$, welche in einer nichtgewöhnlichen Singularität von jeweils C_{i-1} zentriert sind. Dies ist ist wegen Lemma 3.26 möglich. Wir wollen zeigen, dass wir nach endlich vielen Iterationsschritten am Ziel sind, d.h. die entsprechende Kurve keine ungewöhnlichen Singularitäten mehr besitzt Dazu betrachten wir, was bei einem solchen Iterationsschritt passiert. Setze $C := T_i(C_{i-1})$, dann ist $C' = C_i$. Wobei $P = [0 : 0 : 1]$ nun eine nichtgewöhnliche Singularität von C ist.
Man überzeugt sich schnell, dass sich zwischen C und C_{i-1} via der projektiven Koordinatentransformation alles überträgt, insbesonder Vielfachheiten von Punkten und Tangenten und es gilt auch $g^*(C_{i-1}) = g^*(C)$.

Nach Theorem 3.23 gilt $g^*(C') < g^*(C)$ oder $g^*(C') = g^*(C)$. Letzteres gilt, falls $\sum_{i=1}^{s} \frac{r_i(P)(r_i(P)-1)}{2} = 0$ ist, d.h. wenn $r_i(P) = 1$ für alle $i \in \{1, ..., s\}$. In diesem Fall hat C' eine nichtgewöhnliche Singularität weniger als C, nach Theorem 3.20. Im anderen Fall wird $g^*(C')$ echt kleiner (wissen aber nichts über die Anzahl der jetzt vorhandenen ungewöhnlichen Singularitäten).
Da g^* bei diesen Iterationsschritten eine positive monoton fallende Folge ist, wird diese nach endlich vielen Schritten stationär, und ab dann wird in jedem weiteren Iterationsschritt die Anzahl der ungewöhnlichen Singularitäten echt verkleinert, so dass dann nach weiteren endlich vielen Iterationsschritten es nur noch gewöhnliche Singularitäten gibt, und die Iterationen enden. $\square$

3.33. Bemerkung. Bei der Wahl von $\tilde{C}$, d.h. genauer bei der Wahl der ausgezeichneten Lagen, also der entsprechenden projektiven Koordinatentransformationen, hatte man jeweils viel Freiheit gemäßTheorem 3.24. Diese Tatsache wird im nächsten Kapitel ebenfalls eine wichtige Rolle spielen.

KAPITEL 4

Nichtsinguläre Modelle von Kurven

Vortragsausarbeitung von Lukas Prinzen

1. Einleitung

Der Grundkörper k sei in diesem Vortrag algebraisch abgeschlossen. Wir haben in den bisherigen Vorträgen schon gesehen, dass wir zu verschiedenen Typen von gegebenen Kurven bessere finden, die den selben Funktionenkörper wie die Ausgangskurve besitzen. Ziel wird nun in diesem Vortrag sein, zu einer beliebigen Kurve C mit Hilfe der Ergebnisse der letzten Vorträgen eine (bis auf Isomorphie) eindeutige nicht-singuläre Kurve X zu finden. Diese nennen wir dann das nicht-singuläre Modell der Kurve C oder des Funktionenkörpers $k(C)$.
Also entspricht jede Körpererweiterung E/k von Transzendenzgrad 1 einer über k definierten, irreduziblen, nicht-singulären Kurve X mit $E = k(X)$.

2. Definition und Eindeutigkeit

4.1. Definition. Seien X und Y Verietäten. Seien für $i = 1, 2$ und $U_i \subset X$ offen und $f_i : U_i \to Y$ Morphismen.

$$f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow f_1|_{U_1 \cap U_2} = f_2|_{U_1 \cap U_2}$$

Definiert eine Äquivalenzrelation. Eine solche Äquivalenzklasse heißt rationale Abbildung. Man schreibt $F : X \dashrightarrow Y$ für eine Äquivalenzklasse.
Eine rationale Abbildung $F : X \dashrightarrow Y$ heißt birationale Abbildung, falls es einen Vertreter $f : V \to W$ von F gibt, mit $V \subset X$, $W \subset Y$ offen, der Isomorphismus ist.
Ein Morphismus $f : X \to Y$ heißt birationaler Morphismus, falls seine Äquivanzklasse eine birationale Abbildung ist.

4.2. Bemerkung. Für zwei birational äquivalente Kurven C und C' gibt es eine Bijektion zwischen den Mengen

$$\{\text{ Birationale Abbildung } F : C \dashrightarrow C' \quad \}$$

und

$$\{\text{Algebrenisomorphismus } \varphi : k(C') \to k(C) \quad \}$$

Dabei gilt: Sei $U \subset C'$ offen, sei $f : V \to W$ ein Isomorphismus von offenen Teilmengen in der Äquivalenzklasse F. Für $g \in \mathcal{O}_{C'}(U) \subset \mathcal{O}_{C'}(U \cap W)$ ist $\varphi(g) = g \circ f \in \mathcal{O}_C(f^{-1}(U \cap W))$.
Insbesondere sind 2 Varietäten genau dann birational äquivalent, wenn ihre Funktionenkörper Isomorph sind.

Hiermit kann man nun relativ schnell (zumindest, falls char $k = 0$) zeigen, dass es für jede Kurve C eine birationale Abbildung $F : C \dashrightarrow C'$ gibt, wobei C' eine ebene Kurve ist. Insbesondere ist jede Kurve birational äquivalent zu einer ebenen Kurve. Wir benötigen jedoch später noch eine weitere Eigenschaft dieser birationalen Abbildung:

4.3. Satz. *Sei C eine projektive irreduzible Kurve. Sei $P \in C$. Dann gibt es eine ebene Kurve C' und einen birationalen Morphismus $\varphi : C \to C'$ mit $\varphi^{-1}(\varphi(P)) = \{P\}$*

Für den Beweis benötigen wir 2 kurze Lemmas:

4.4. Lemma. *Sei char $k = p$. Sei $k(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n)\diagup k$ Körpererweiterung von Transzendenzgrad 1. Sei v' eine diskrete k-Bewertung mit $p \nmid v'(x)$. Dann ist $k(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n)\diagup k(x)$ eine endliche, seperable Körpererweiterung.*

Beweis: Angenommen es existiert ein $\alpha' \in F := k(x, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ so, dass α' inseperabel über $k(x)$ ist. Dann ist für eine genügend grosse p-Potenz $\alpha'^{p^l} =: \alpha$ immer noch inseperabel, aber α^p seperabel. Dann erhalten wir die Körperkette

$$F \supset E := k(x)(\alpha) \supset k(x)(\alpha^p) \supset k(x) \supset k$$

Es gilt allgemein in char $= p$ ist ein Polynom $x^p - a$ stets irreduzibel, oder zerfällt in Linearfaktoren. Dies gilt, da das Polynom $x^p - a$ genau eine Nullstelle b hat, denn $(x - b)^p = x^p - b^p$. Sei $x^p - a = (x - b)^i \cdot (x - b)^{p-i}$ eine Zerlegung, dann wäre $b = (b^i)^r \cdot (b^p)^s$, für gewisse $r, s \in \mathbb{Z}$ und damit würde $x^p - a$ schon in Linearfaktoren zerfallen.
Also kann der Körpergrad bei hinzufügen einer p-ten Wurzel nur p oder 1 sein.
Da α inseperabel ist, gilt $[E : k(x)(\alpha^p)] = p$. Es ist $E^p = k(x^p)(\alpha^p)$ da k algebraisch abgeschlossen, und daher vollkommen ist. Falls $[E : E^p] \leq p$ gilt, so folgt wegen $E^p \subset k(x)(\alpha^p)$ schon die Gleichheit $E^p = k(x)(\alpha^p)$ und damit wäre $x = \gamma^p$ für ein $\gamma \in F$ und insbesondere gilt für jede diskrete Bewertung v von F $v(x) = p \cdot v(\gamma)$ im widerspruch zu Wahl von x. Denn $p \nmid v'(x)$ für die diskrete Bewertung v'.
Es bleibt also $[E : E^p] \leq p$ zu zeigen. Betrachte dazu die Körperkette

$$k(x)(\alpha) \supset k(x^p)(\alpha) \supset k(x^p)(\alpha^p)$$

Dann hat jede Inklusion wieder entweder Grad 1 oder p.
Betrachte nun $f(T) = \mathrm{MinPol}(\alpha\diagup k(x)) \in k(x)[T]$. Nach multiplizieren mit einer ausreichenden x-Potenz ist $f(T) \in k[x, T]$ und $f(x, \alpha) = 0$. Durch ausklammern von x^p in den Koeffizienten erhalte $\widetilde{f} \in k[x^p, \alpha][T]$ mit $\widetilde{f}(x) = 0$ und $\deg(\widetilde{f}) < p$. Also hat x über $k(x^p)(\alpha)$ Grad 1. Damit folgt $[E : E^p] \leq p$ und daraus die Behauptung, dass F serperabel über $k(x)$ ist. $\square$

4.5. Lemma. *Sei $K \supset k$ und k algebraisch abgeschlossen. Sei $K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\diagup K$ endliche seperable Körpererweiterung. Dann existieren unendlich viele $\lambda \in k^n$ derart, dass $K(\sum \lambda_i \alpha_i) = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$*

Beweis: Da $E := K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\diagup K$ endlich und seperabel ist, gibt es nur endlich viele Zwischenkörper $F_1, \dots, F_r$. Betrachte diese als k-Vektorräume.

Setze $V := \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle_k$. Für $i = 1, \ldots, r$ sei $U_i = F_i \cap V$ ein Untervektorraum von V. Angenommen $\bigcup U_i = V \Rightarrow V = U_j$ für ein j. Da k unendlich ist, und die Vereinigung endlich.
Falls aber $U_j = V$, dann sind insbesondere $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F_j$ was ein Widerspruch dazu ist, dass F_j ein Zwischenkörper ist.
Also gibt es unendlich viele $\sum \lambda_i \alpha_i = v \in V$, mit $v \notin U_i$ für alle i und daher auch $v \notin F_i$ für alle i. Also muss v schon ein primitives Element für die Körpererweiterung E/K sein. $\square$

Nun können wir den Satz 4.3 beweisen
Beweis: Sei $C \subset \mathbb{P}^{n+1}$. Wähle nun das projektive Koordinatensystem in den Variablen $T, X_1, \ldots, X_n, Z$ derart, dass gilt: $P = [0 : \ldots : 0 : 1]$. $C \cap \mathcal{V}(T)$ endlich und für $\frac{T}{Z} \in k(C)$ gibt es eine diskrete k-Bewertung v' mit $v'(\frac{T}{Z}) = 1$. Wobei man letzteres erreichen kann, indem man in der affinen Karte der letzten Variablen (in der die Kurve durch den Nullpunkt geht) den lokalen Ring des Nullpunktes betrachtet, bzw. einen darüber liegenden Bewertungsring und einen affinen Basiswechsel durchführt nach dem der erste Basisvektor den Wert 1 hat.
Definiere nun für $\lambda \in k^n$ den Morphismus

$$\varphi'_\lambda : C \to \mathbb{P}^2, \quad \varphi'_\lambda[t : x_1 : \ldots : x_n : z] := \left[t : \sum_i \lambda_i x_i : z \right]$$

Setze $C' := \overline{\varphi_\lambda(C)}$. Nun kann man zeigen, dass ein $\lambda \in k^n$ existiert derart, dass $\varphi'^{-1}_\lambda([0 : 0 : 1]) = P$ und $\varphi_\lambda : C \to C'$ ein birationaler Morphismus ist.
Sei $C_Z := C \cap (\mathbb{P}^{n+1} \setminus \mathcal{V}(Z))$ bzw. $C'_Z := C' \cap (\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{V}(Z))$.
Betrachte nun

$$\varphi^\star_\lambda : k[C'_Z] \to k[C_Z] = k\left[\frac{t}{z}, \frac{x_1}{z}, \ldots, \frac{x_n}{z} \right] \text{ wobei } \varphi^\star_\lambda(g) = g \circ \varphi_\lambda$$

für eine reguläre Funktion $g \in k[C'_Z]$ ist. Dies ist ein injektiver Algebrenhomomorphismus, da das Bild von φ_λ nach Definition dicht in C' ist. Es gilt also

$$k[C'_Z] \cong \varphi^\star_\lambda \left(k \left[C'_Z \right] \right) = k \left[\frac{t}{z}, \sum_i \lambda_i \frac{x_i}{z} \right]$$

Und damit auch

$$k(C') = \operatorname{Quot}(k[C'_Z] \cong k \left(\frac{t}{z}, \sum_i \lambda_i \frac{x_i}{z} \right) \stackrel{!}{=} k(C)$$

Wobei die letzte Gleichheit für ein $\lambda \in k^n$ nach den vorangegangen Lemmas gilt: $k(C) = k(\frac{t}{z}, \frac{x_1}{z}, \ldots, \frac{x_n}{z})$ ist endlich und seperabel über $k(\frac{t}{z})$. Also gibt es unendlich viele primitive Elemente der gewünschten Form $\sum_i \lambda_i \frac{x_i}{z}$. Wähle davon eines mit der Eigenschaft $\varphi^{-1}_\lambda(\varphi_\lambda(P)) = \{P\}$. Dies geht, da $C \cap \mathcal{V}(T)$ endlich ist. $\square$

4.6. Bemerkung. Man kann also mit den bisher bewiesenen Sätzen von einer beliebigen projektiven Kurve C ausgehend eine Kurve X konstruieren, die birational äquivalent zu C ist und nur einfache Punkte besitzt.
Nämlich indem man zuerst eine birational äquivalente ebene Kurve findet, von dieser durch quadratische Transformation zu einer ebene Kurve mit

nur gewöhnlichen Singularitäteten übergeht und schließlich durch aufblasen die gewünschte Kurve X findet. Bei all diesen Schritten ändert sich der Funktionenkörper nicht, d.h. es gilt $k(X) = k(C)$.
Man kann nun zeigen, dass jede birationale Abbildung $F : X \dashrightarrow C$ sogar einen birationalen Morphismus $f : X \to C$ enthält.

4.7. Definition. Sei K Körper, $R \subset K$ ein diskreter Bewertungsring. R heisst diskreter Bewertungsring von K, falls $\mathrm{Quot}(R) = K$ gilt.

4.8. Lemma. *Sei C eine projektive Kurve. Sei $R \subset k(C)$ ein diskreter Bewertungsring von $k(C)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $Q \in C$ mit $\mathcal{O}_Q(C) \subset R$ und $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_Q(C)} \subset \mathfrak{m}_R$.*

Beweis: Sei ohne Einschränkung $C \subset \mathbb{P}^n$ mit $C \cap U_i \neq \emptyset$ wobei $U_i = \mathbb{P}^n \setminus \mathcal{V}(x_i)$ für $i = 0, \ldots, n$. Dann gilt für den Koordinatering von C: $k[C] = k[X_0, \ldots, X_n]/I(C) = k[x_0, \ldots, x_n]$, wobei $I(C)$ ein homogenes Ideal ist. Wegen $C \cap U_i \neq \emptyset$ gilt $x_i \neq 0$.
Wir haben gesehen, dass uns der Bewertungsring R eine Bewertung v auf $k(C)$ definiert, wobei gilt $x \in R \Leftrightarrow v(x) \geq 0$ und $x \in \mathfrak{m}_R \Leftrightarrow v(x) > 0$. Die Elemente von R, die nicht in $\mathfrak{m}_R$ liegen, sind die Einheiten von R.
Setze $N = \max\{v(\frac{x_i}{x_j}) \mid i, j = 0, \ldots, n\}$. Ohne Einschränkung gelte $N = v(\frac{x_j}{x_0})$. Dann gilt für alle i:

$$v\left(\frac{x_i}{x_0}\right) = v\left(\frac{x_j}{x_0} \cdot \frac{x_i}{x_j}\right) = N - v\left(\frac{x_j}{x_i}\right) \geq 0$$

Also $\frac{x_i}{x_0} \in R$ für $i = 1, \ldots, n$.
Sei nun $C_0 = C \cap U_0$. Dann ist C_0 isomorph zu einer affinen Varietät und es gilt $k[C_0] = k[\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}] \subset R$.
Setze $J = \mathfrak{m}_R \cap k[C_0]$. Dann ist J ein Primideal, korrespondiert also zu einer affinen Untervarietät $\mathcal{V}(J) = W \subset C_0$ von C_0. W kann nicht ganz C_0 sein, da sonst $J = 0$ und damit $k[C_0] \subset R^\star$ und $k(C) = k(C_0) = \mathrm{Quot}(k[C_0]) \subset R$ aber dann wäre $R = k(C)$ und damit kein diskreter Bewertungsring.
Also ist $W = \{Q\}$ ein Punkt. Dann gilt

$$\mathcal{O}_Q(C) = \mathcal{O}_Q(C_0) = k[C_0]_{(J)} = \left\{\frac{a}{b} \text{ mit } a, b \in k[C_0] \text{ und } b(Q) \neq 0\right\}$$

Da $b(Q) \neq 0$ ist $b \in k[C_0] \setminus J$ und wegen $J = \mathfrak{m}_R \cap k[C_0]$ und $k[C_0] \subset R$ ist b eine Einheit. Also $\mathcal{O}_Q(C) \subset R$. Es gilt $\mathfrak{m}_Q := \mathfrak{m}_{\mathcal{O}_Q(C_0)} = (J)\mathcal{O}_Q(C_0)$. Sei nun $x \in \mathfrak{m}_Q$ dann ist $xb \in J \cap k[C_0]$ für ein passendes $b \in k[C_0] \setminus J \subset R^\star$. Da $\mathfrak{m}_R$ insbesondere Primideal ist, gilt $x \in \mathfrak{m}_R$.
Angenommen $P, Q \in C$, $P \neq Q$ mit $\mathfrak{m}_P \subset \mathfrak{m}_R$ und $\mathfrak{m}_Q \subset \mathfrak{m}_R$. Wähle eine offene affine Umgebung $U \subset C$ mit $P, Q \in U$. Dann gilt $k(C) = \mathrm{Quot}(k[U])$. Wähle $a, b \in k[U]$ mit $a(P) = 0, a(Q) \neq 0$ und $b(P) \neq 0$. setzte $f = \frac{a}{b} \in k[C]$. dann ist $f \in \mathfrak{m}_P$ und $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}_Q(C)$. Also $v_R(f) = v_P(F) > 0$ und $v_Q(\frac{1}{f}) = v_R(\frac{1}{f}) \geq 0$. Widerspruch. $\square$

4.9. Korollar. *Sei X eine nichtsinguläre Kurve, dann sind die diskreten Bewertungsringe von $k(X)$ genau die lokalen Ringe von Punkten.*

Beweis: Es ist klar, dass jeder lokale Ring in einem Punkt der Kurve diskreter Bewertungsring ist. Umgekehrt, sei R ein diskreter Bewertungsring von

$k(C)$. Dann existiert ein eindeutiges $Q \in X$ mit $\mathcal{O}_Q \subset R$ und $\mathfrak{m}_Q \subset \mathfrak{m}_R$. Da $\mathcal{O}_Q$ diskreter Bewertungsring ist, gilt für $x \notin \mathcal{O}_Q$, dann $x^{-1} \in \mathfrak{m}_Q \subset R$ also $x \notin R$. Dies zeigt $R \subset \mathcal{O}_Q$, also die Gleichheit. □

4.10. Theorem. *Seien X, C birational äquivalente irreduzible Kurven. Sei X nicht-singulär. Dann enthält jede birationale Abbildung $F : X \dashrightarrow C$ einen birationalen Morphismus $f : X \to C$.*

Beweis: Sei $f : V \to W$ ein Isomophismus von offenen Teilmengen von X und C. Sei $\varphi : k(C) \to k(X)$ der zugehörige Algebrenisomorphismus. Sei P ein einfacher Punkt von X, dann ist $\mathcal{O}_P(X)$ diskreter Bewertungsring. Also ist auch $\varphi^{-1}(\mathcal{O}_P(X)) \subset k(C)$ diskreter Bewertungsring, also $\varphi^{-1}(\mathcal{O}_P(X)) = R \supset \mathcal{O}_Q(C)$ für ein eindeutiges $Q \in C$ nach dem vorherigen Lemma. Q ist duch φ eindeutig bestimmt.
Seien nun $P \in V' \subset X$ und $Q \in W' \subset C$ affin und offen. Dann ist $\mathcal{O}_C(W') = k[W'] \subset \mathcal{O}_Q(C)$ wobei $k[W'] = k[y_1, \ldots, y_n]$ ist. Es ist $\varphi(y_i) \in \mathcal{O}_P(X)$ also $\varphi(y_i) = \frac{a_i}{b_i}$ für gewisse $a_i, b_i \in k[V']$ mit $b_i(P) \neq 0$.
Setze $b = b_1 \cdots b_n$ und $V_b = \{x \in V' \text{ mit } b(x) \neq 0\}$ dann gilt $\varphi : k[W'] \to k[V_b]$. Dieser Algebrenhomomorphismus gibt uns nun einen eindeutigen Morphismus von Varietäten $f' : V_b \to W'$ mit $f(P) = Q$.
Falls $g \in k[W']$ mit $g(Q) = 0$ also $g \in \mathfrak{m}_Q \Rightarrow \varphi(g) \in \mathfrak{m}_P$ also $\varphi(g)(P) = 0$. Es gilt also $g(Q) = 0 \Rightarrow g(f(P)) = 0$, also muss $f(P) = Q$ gelten.
Es gilt nun $f|_{V \cap V_b} = f'|_{V \cap V_b}$ da beide Morphismen durch φ und der Eigenschaft $\varphi(g) = g \circ f = g \circ f'$ für $g \in \mathcal{O}_R(C)$, $R \in V \cap V_b$ bestimmt sind. Eine Familie von Morphismen $f_i : U_i \to C$ die auf einer offenen Überdeckung $\bigcup_i U_i = X$ einer Varietät X definiert ist und auf Schnitten übereinstimmt lässt sich zu einem Morphismus $F : X \to C$ fortsetzen. (Lemma 5.6 im Handout von David). □

4.11. Korollar. *Seien X und X' zwei nicht-singuläre, irreduzible Kurven. Dann gibt es in jeder birationalen Abbildung $F : X \dashrightarrow X'$ einen Isomorphismus $f : X \to X'$*

Beweis: Sei $g : V \to W$ ein Isomorphismus von offenen Teilmengen von X und X'. dann lässt sich g fortsetzen zu $G : X \to X'$ und $f = g^{-1}$ zu $F : X' \to X$. Es gilt $(F \circ G)|_W = \mathrm{id}_W$ und $(G \circ F)|_V = \mathrm{id}_V$. Da zwei Morphismen schon übereinstimmen, wenn sie auf einer dichten Teilmenge übereinstimmen ist F ein Isomorphismus und $F^{-1} = G$. □

4.12. Bemerkung. Für eine gegebene projektive Kurve C sind die Konstruktionsschritte, die gemacht werden um zu einer nichtsingulären Kurve zu kommen, nicht eindeutig. Bei der Projektion auf eine ebene Kurve gibt es zum Beispiel Freiheit bei der Wahl von $\lambda \in k^n$ aus Satz 2.3. Bei den quadratischen Transformationen gibt es viele Möglichkeiten für die Koordinatentransformationen nach deren sich die Kurve jeweils in einer ausgezeichneten Lage befindet. Und auch bei der Aufblasung gab es einen projektiven Koordinatenwechsel, der Wahlfreiheit zuließ.
Seien also X und X' zwei auf solche Weise, aus C zustande gekommene, nichtsinguläre Kurven. Dann liefert die Konstruktion auch zwei Isomorphismen $f : V \to W$ sowie $f' : V' \to W'$ mit $V \subset X$, $V' \subset X'$, $W, W' \subset C$

offen. Dann ist $g : f^{-1}(W \cap f'(V')) \to f'^{-1}(W' \cap f(V))$ ein Isomorphismus von einer offenen Teilmengen von X auf eine offene Teilmenge von X' mit $g = f' \circ f$.
Da X und X' nicht-singulär sind gibt es eine eindeutige Fortsetzung $G : X \to X'$ von g die Isomorphismus ist.

4.13. Theorem. *Sei C eine irreduzible Kurve. Dann ist C birational äquivalent zu einer nicht-singulären Kurve X und es gibt einen surjektiven birationalen Morphismus $f : X \to C$. Falls X' eine andere nicht-singuläre Kurve mit birationalem Morphismus $f' : X' \to C$ ist, so existiert ein eindeutiger Isomorphismus $g : X \to X'$ mit $f = f' \circ g$.*

Beweis: Die Existenz einer nicht-singulären birational äquivalenten Kurve X folgt aus 2.3 sowie der vorangegangenen Vorträgen. Die Existenz eines Birationalen Morphismus folgt aus Satz 2.10. Die Eindeutigkeit folg aus vorangegangener Bemerkung.
Was noch zu zeigen ist, ist dass ein solcher Morphismus $F : X \to C$ tatsächlich surjektiv ist.
Falls C bereits eine ebene Kurve war folgt dies aus den Konstruktionen von quadratischen Transformationen sowie der Aufblasung:

4.14. Erinnerung. Sei C eine ebene, projektive Kurve. Sei Q die quadratische Transformation und

$$C' = \overline{Q^{-1}(C \cap (\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{V}(XYZ)))}$$

Dann ist die quadratische Transformation $Q : C' \to C$ ein birationaler Morphismus.
Die Punkte auf C, die von Q nicht getroffen werden, liegen allesamt auf den irregulären Geraden ohne den Punkten $[0:0:1], [0:1:0], [1:0:0]$.
Es gibt eine Folge von Kordinatentransfomationen T_i, $i = 1, \dots, n$, so dass

$$C^\star = C_n \overset{T_n \circ Q}{\to} C_{n-1} \overset{T_{n-1} \circ Q}{\to} \dots \overset{T_1 \circ Q}{\to} C$$

ein birationaler Morphismus ist, und $C^\star$ nur geöhnliche Singularitäten enthält.

Sei nun $P \in C$. Damit P im Bild der Folge von quadratischen Transformationen liegt, wählt man die Koordinatentransformationen T_i so, dass P und die Folge seiner Urbilder unter den einzelnen quadratischen Transformationen, nie auf einer irregulären Gerade liegen.
Die Niederblasung ist surjektiv. Also findet man eine nichtsinguläre Kurve X' mit Morphismus $f' : X' \to C$ mit $P \in f'(X')$. Nach der vorangegangenen Bemerkung gibt es einen Isomorphismus $g : X' \to X$ mit $f' = F \circ g$ also $P = f'(g^{-1}(Q)) = F(Q)$ für ein $Q \in X$.
Sei nun $C \subset \mathbb{P}^n$ eine beliebige irreduzible Kurve. Sei X nichtsingulär und $f : X \to C$ birationaler Morphismus. Sei $P \in C$. Dann gibt es nach Satz 2.3 eine ebene Kurve C' und einen birationalen Morphismus $g : C \to C'$ mit $g^{-1}(g(P)) = \{P\}$. Nun gibt es eine nicht-singuläre Kurve X_P mit einem surjektiven birationalen Morphismus $f_P : X_P \to C'$. Also $g(P) = f_P(x)$ für ein $x \in X_P$. X und X_P sind birational äquivalent und es gibt also einen eindeutigen Isomorphismus $\varphi : X_P \to X$ mit $g \circ f \circ \varphi = f_P$. Da $g^{-1}(g(P) = \{P\}$ folgt aus $f_P(x) = g(P)$ auch $f(\varphi(x)) = P$. Also ist f surjektiv. □

4.15. Definition. In der Situation vom letzten Satz nennt man X das nicht-singuläre Modell der Kurve C oder des Funktionenkörpers $k(C)$.

KAPITEL 5

Appendix: Grundlagen aus der algebraischen Geometrie

begleitendes Handout zu den Seminarvorträgen; von David Grimm

Alle in diesem Appendix aufgeführten Tatsachen und Definitionen aus der algebraischen Geometrie durften und mussten als Grundlage für die Vorträge der Studenten verwendet werden.

1. Varietäten

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $k \subseteq K$ ein Teilkörper mit $\overline{k} = K$. Mit $\mathbb{A}_k^n$ bezeichnen wir den K^n, zusammen mit der k-*Zariskitopologie*. Mit $\mathbb{P}_k^n$ bezeichnen wir die Menge der Ursprungsgeraden des K^{n+1} zusammen mit der *projektiven* k-Zariskitopologie. Dabei ist die k-Zariskitopologie die Topologie, deren abgeschlossenen Mengen von den Verschwindungsmengen von Polynomen über k (*homogenen Polynomen* im projektiven Fall) erzeugt ist. Man kann sich überlegen, dass jede abgeschlossene Menge als Schnitt von solchen Verschwindungsmengen beschrieben werden kann (also endliche Vereinigungen zur Beschreibung nicht benötigt werden). Desweiteren sieht man, dass man immer mit einem endlichen Schnitt auskommt (dies liegt daran, dass die gemeinsame Verschwindungsmenge einer Menge von Polynomen die selbe ist, wie die gemeinsame Verschwindungsmenge des von den Polynomen erzeugten Ideals im Polynomring, und dieses eben endlich erzeugbar ist). Insbesondere ist jede absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen stationär. Diese Eigenschaft eines topologischen Raumes nennt man *noethersch.*

5.1. Definition. Eine abgeschlossene Teilmenge V des $\mathbb{A}_k^n$ (bzw. $\mathbb{P}_k^n$), zusammen mit der Spurtopologie nennen wir eine *affine k-Varietät* (bzw *projektive k-Varietät.*) Allgemeiner nennen wir eine offene Teilmenge einer affinen (bzw. projektiven) k-Varietät eine *quasiaffine* (bzw. *quasiprojektive*) k-Varietät. (Dabei bezieht sich 'offen' natürlich auf die Topologie der affinen oder projektiven Varietät).

5.2. Bemerkung. Wir werden im Folgenden von einer k-Varietät sprechen, wenn wir uns nicht festlegen wollen, um welchen der beiden basalen Typen (quasiaffin/quasiporjektiv) es sich handelt.

5.3. Bemerkung. k-Varietäten sind noethersch. (Dies vererbt sich durch die Spurtopologie vom Raum, in dem sie leben).

5.4. Bemerkung. Ist L ein Zwischenkörper von K/k, dann kann eine k-Varietät auch als L-Varietät betrachtet werden. In den meisten Einsteigerbüchern wird ohnehin nur der Fall $k = K$ betrachtet.

5.5. Definition. Sei X ein topologischer Raum, dann heisst X *irreduzibel*, falls X nur trivial als Vereinigung zweier in X abgeschlossener Teilmengen geschrieben werden kann. Wir nennen eine k-Varietät *geometrisch irreduzibel*, wenn sie sogar als K-Varietät irreduzibel ist.

5.6. Beispiel. $V = \{X^2 + Y^2 = 0\} \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ (bzw $\subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$) ist irreduzibel als $\mathbb{R}$-Varietät, aber nicht als $\mathbb{C}$-Varietät, da $X^2 + Y^2 = (X + iY)(X - iY)$.

5.7. Bemerkung. Ist X ein noetherscher topologischer Raum, so lässt sich X eindeutig als endliche Vereinigung von maximalen abgeschlossenen irreduziblen Teilmengen schreiben. Diese Teilmengen werden die *irreduziblen Komponenten* des Raumes genannt.

2. Isomorphie von Varietäten

In den meisten Büchern werden zunächst nur affine Varietäten betrachtet, und für diese ein relativ intuitiver Begriff eines Morphismus explizit definiert (als polynomiale Abbildung). Dasselbe wird dann noch für projektive Varietäten gemacht, und so wie sich dann der Varietätenbegriff im Laufe des Buchs verallgemeinert, wird dann auch der Begriff des Morphismus zwischen Varietäten verfeinert, um sowohl der allgemeinen Situation gerecht zu werden, als auch im Spezialfall das bereits definierte zu liefern. Wir geben gleich ein allgemeines Konzept an, und überlegen uns dann, was dies in den von uns betrachteten Fällen (quasiaffin, quasiprojektiv) zu bedeuten hat. Insbesondere starten wir gleich mit einer Definition, die den gemischten Fall mit abdeckt (also z.B. ein Morphismus von einer quasiaffinen auf eine quasiprojektive Varietät).
Die Idee ist, dass zwei k-Varietäten dann als k-isomorph gelten sollen, wenn sie nicht nur homöomorph in der k-Zariskitopologie sind, sondern darüberhinaus in einer weiteren strukturelle Eigenschaft übereinstimmen, nämlich, dass bestimmte Ringe von Funktionen auf den Varietäten im wesentlichen gleich sind.

5.8. Definition. Sei V eine k-Varietät. Sei $U \subseteq V$ offen. Eine Abbildung $r : U \longrightarrow K$ heisst *k-regulär auf U*, falls es eine offene Überdeckung $U = U_1 \cup \cdots \cup U_r$ und....

i) im Fall dass $V \subseteq \mathbb{A}^n_k$ quasiaffin ist: ....es Polynome $f_1, \ldots, f_r, g_1, \ldots, g_r \in K[X_1, \ldots, X_n]$ gibt, so dass $g_i|_{U_i}$ keine Nullstelle hat und $r|_{U_i} = \frac{f}{g}|_{U_i}$ gilt.
ii) im Fall dass $V \subseteq \mathbb{P}^n_k$ quasiprojektiv ist: ...es homogene Polynome $f_1, \ldots, f_r$, $g_1, \ldots, g_r \in K[X_0, \ldots, X_n]$, so dass $g_i|_{U_i}$ keine Nullstelle hat, $\deg f_i = \deg g_i$ ist für jedes i, und $r|_{U_i} = \frac{f}{g}|_{U_i}$ gilt.

Die Menge der auf U k-regulären Funktionen bildet eine k-Algebra, und wir bezeichnen diese mit $\mathcal{O}_V(U)$.
Funktionen aus $\mathcal{O}_V(V)$ bezeichnen wir auch als *global k-reguläre Funktionen* (in mancher Literatur auch globale Schnitte genannt).

5.9. Beispiel. Ist $V \subset \mathbb{A}^n_k$ eine affine k-Varietät und $\mathcal{I}(V) = \{f \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid f|_V = 0\}$ das Verschwindungsideal von V in $k[X_1, \ldots, X_n]$, dann ist $\mathcal{O}_V(V) \cong k[X_1, \ldots, X_n]/\mathcal{I} =:$ k[V], genannt der Koordinatenring der affinen k-Varietät V. Ist V irreduzibel, so ist $\mathcal{I}$ ein Primideal und also $k[V]$ ein Integritätsring.

Ist V zudem geometrisch irreduzibel, so ist k relativ algebraisch abgeschlossen in $k[V]$
Ist $V \subset \mathbb{P}_k^n$ eine irreduzible projektive Varietät, so ist $\mathcal{O}_V(V)$ isomorph zu einer endlichen Körpererweiterung von k. (vgl. [**Ha**, I, Thm 3.4])

5.10. Bemerkung. Wir werden später noch den Begriff einer 'lokalen Funktionen in einem Punkt' kennenlernen. Diese wird als Äquivalenzklasse von Tupeln bestehend aus offenen Umgebungen des Punktes und regulären Funktionen auf ihnen definiert, wobei die Äquivalenz das übereinstimmen der regulären Funktionen auf einer gemeinsamen nichtleeren offenen Definitionsmenge ist. Diese Reihenfolge der Definition entspricht der Art und Weise, wie man vorgeht, wenn man den allgemeinsten Begriff einer Varietät definiert. In [**Fu**, Ch. 2] werden all diese Begriffe zunächst nur für irreduzible affine Varietäten definiert, und zwar in anderer Reihenfolge: Es wird dort zunächst der Koordinatenring einer affinen Varietät definiert (Als Quotientenring des Polynomrings, also als Ring der polynomialen Funktionen), dann der Begriff eines Morphismus *zwischen affinen Varietäten* explizit (als durch Polynome gegeben) definiert, und im Anschluss sofort der Begriff der rationalen Funktion, bzw. einer lokalen Funktion in einem Punkt (als ein Bruch von Elementen auf dem Koordinatenring, welcher überall auf den Punkten eine lokale Funktion ist, in denen der Nenner nicht verschwindet). Diese Begriffe werden in [**Fu**, Ch. 4] schließlich verallgemeinert auf quasiprojektive Varietäten.

5.11. Definition. Seien V, W k-Varietäten. Wir nennen eine Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

einen Morphismus von k-Varietäten, falls

(1) φ stetig ist in der k-Zariskitopologie
(2) für jedes $U \subset W$ offen und jedes $r \in \mathcal{O}_W(U)$, die Abbildung $r \circ \varphi : \varphi^{-1}(U) \longrightarrow K$ wieder *regulär* auf $\varphi^{-1}(U)$ ist.

Wir schreiben dann

$$\varphi_U^* : \mathcal{O}_W(U) \longrightarrow \mathcal{O}_V(\varphi^{-1}(U))$$
$$r \mapsto r \circ \varphi$$

für die induzierte Abbildung zwischen den Ringen der regulären Funktionen, welche ein k-Algebrenhomomorphismus ist. Der Begriff eines Isomorphismus von k-Varietäten ergibt sich jetzt ganz natürlich, nämlich wenn es zueinander inverse Morphismen von k-Varietäten gibt.

Man sieht bereits, dass es selten ist, dass eine affine Varietät V und eine projektive Varietät W isomorph sind (mir fallen gerade nur endliche Punktmengen ein, wo es doch gilt) , da ja eine notwendige Bedingung dafür ist, dass $\mathcal{O}_V(V) = k[V]$ und $\mathcal{O}_W(W)$ isomorph sind. Im Fall von affine Varietäten, steckt allerdings die gesamte Information bereits in den Koordinatenringen.

5.12. Bemerkung. a) Sind $V \subset \mathbb{A}_k^n$ und $W \subset \mathbb{A}_k^m$ affine k-Varietäten und $\varphi : V \longrightarrow W$ ein Morphismus, dann gibt es $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in k[X_1, \ldots, X_n]$ mit $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$ für alle $x \in V$. (kleine Übung). Die Umkehrung gilt auch.

b) Sind $V \subset \mathbb{P}_k^n$ und $W \subset \mathbb{P}_k^m$ projektive k-Varietäten und $\varphi : V \longrightarrow W$ ein Morphismus, dann gibt es homogene $\varphi_0, \dots, \varphi_m \in k[X_0, \dots, X_n]$ vom gleichen Grad mit $\varphi(x) = [\varphi_0(x) : \dots : \varphi_m(x)]$ für alle $x \in V$. (Übung). Die Umkehrung gilt auch.
c) Sind V, W affine k-Varietäten, dann definiert jeder k-Algebrenhomomorphismus $\varphi^* : k[W] \longrightarrow k[V]$ bereits einen Morphismus $\varphi : V \longrightarrow W$, weiter sind V, W isomorph als k-Varietäten, genau dann wenn $k[V]$ und $k[W]$ isomorph als k-Algebren sind, es gilt sogar...
d) ...Sei V eine affine Varietäte und W eine beliebige k-Varietät. ist $k[V] \cong \mathcal{O}_W(W)$, so gilt $V \cong W$.

An dieser Stelle könnte man einmal festhalten, wie verwandt (quasi)projektive und (quasi)affine k-Varietäten tatsächlich sind (obwohl die letzten Feststellungen das Gegenteil zu suggerieren scheinen). Dies sollte nicht weiter verwundern, da ja der projektive Raum ursprünglich auch deshalb erfunden wurde, um den affinen Raum auf sinnvolle und handhabbare Weise um die 'unendlich fernen Punkte' zu ergänzen. Ebenso, wie der $\mathbb{P}_k^n$ der 'projektive Abschluss' (genauer *ein* projektiver Abschluss) des $\mathbb{A}_k^n$, ist, so besitzt jede affine k-Varietät im $\mathbb{A}_k^n$ einen projektiven Abschluss im entsprechenden $\mathbb{P}_k^n$. Umgekehrt kann man auf vielfache Art den $\mathbb{A}_k^n$ mit einem injektiven Morphismus von k-Varietäten in den $\mathbb{P}_k^n$ offen (und dicht) einbetten, (es lassen sich sogar immer $n+1$ Einbettungen finden, die zusammen den $\mathbb{P}_k^n$ überdecken). Insbesondere lässt sich jede projektive k-Varietät im $\mathbb{P}_k^n$ auf eine (passend gewählte!) solche Einbettunge herunterschneiden, und enthält so eine quasiprojektive Teilvarietät, welche isomorph zu einer affinen k-Varietät ist.

5.13. Proposition. *Sei $f \in k[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes lineares Polynom und $H_f = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_k^n \mid f(x_0, \dots, x_n) = 0\}$, die (basisabgeschlossene) Hyperfläche definiert durch f. Dann ist die quasiprojektive k-Varietät $\mathbb{P}_k^n \setminus H_f$ isomorph zum $\mathbb{A}_k^n$ als k-Varietät.*

Obige Proposition lässt sich einfach zeigen, wenn man für f ein besonders einfaches lineares Polynom wählt, und dann den allgemeinen Fall darauf zurückführt, durch lineare Koordinatentransformation (was ein Automorphismus von k-Varietäten im $\mathbb{P}_k^n$ ist). Ist zum Beispiel $f = X_0$, also $H_f = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_k^n \mid x_0 = 0\}$, dann ist $(x_1, \dots x_n) \mapsto [1 : x_1 : \dots : x_n]$ der gesuchte Isomorphismus. Affine k-Varietäten im $\mathbb{A}_k^n$ lassen sich so in den $\mathbb{P}_k^n$ einbetten und projektiv abschließen (d.h. abschließen in der k-Zariskitopologie des $\mathbb{P}_k^n$).

3. Birationale Äquivalenz von Varietäten

Wie wir schon bemerkt haben, ist eine affine k-Varietät V weit davon entfernt isomorph zu ihrem projektiven Abschluss zu sein (die Ringe der globalen regulären Funktionen sind verschieden). Dies ist etwas unbefriedigend, da der projektive Abschluss einer Varietät ja nur aus dem hinzunehmen relativ weniger 'unendlich ferner' Punkte entsteht. Die Idee ist, eine schwächeres Kriterium zu finden zwei k-Varietäten zu vergleichen, welches gerade so schwach wie nötig ist, zwischen einer affinen Varietät und ihrem projektiven Abschluss nicht zu unterscheiden. Der Einfachheit halber beschränken wir uns von nun auf irreduzible k-Varietäten.

5.14. Definition. Seien V, W zwei irreduziblen k-Varietäten. Dann heißen V und W *k-birational äquivalent*, falls es offene Teilmengen $V_o \subseteq V$ und $W_o \subseteq W$ gibt, und einen Isomorphismus von k-Varietäten zwischen V_o und W_o.

Wir sehen sofort, dass der projektive Abschluss einer (quasi)affinen, irreduziblen Varietät k-birational äquivalent zur ursprünglichen (quasi)affinen Varietät ist.
So wie es zu jeder affinen Varietäten V ein algebraisches Objekt gibt, das die Isomorphieklasse der Varietät eindeutig bestimmt (nämlich der Koordinatenring $k[V]$), so gibt es ein algebraisches Objekt, welches für eine beliebige k-Varietät die k-birationale Äquivalenzklasse eindeutig bestimmt, nämlich der sogenannte Funktionenkörper der k-rationalen Funktionen $k(V)$.

5.15. Definition. Sei V eine irreduzible k-Varietät. Eine *k-rationale Funktion r auf V* ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (U', r'), wobei $\emptyset \neq U' \subset V$ offen ist und $r' \in \mathcal{O}_V(U')$, und $(U', r') \sim (U'', r'')$ genau dann wenn $r'|_{U' \cap U''} = r''|_{U' \cap U'}$.
Addition (und Multiplikation) können Vertreterweise definiert werden durch $(U', r') + (\tilde{U}, \tilde{r}) = (U' \cap \tilde{U}, r'|_{U' \cap \tilde{U}} + \tilde{r}|_{U' \cap \tilde{U}})$.
Wir bezeichen die Menge der auf V k-rationalen Funktionen als $k(V)$.

5.16. Proposition. *$k(V)$ ist ein Körper bezüglich der vertreterweise definierten Multiplikation und Addition.*

5.17. Bemerkung. Dies liegt daran, dass eine regulären Funktionen 'lokal' durch ein Bruch von Polynomen repräsentiert wird, der fast überall auf der gegebenen offenen Menge als Funktion invertierbar ist, ausser gegebenefalls auf der abgeschlossenen Teilmenge die durch die Nullstelle des Zählers definiert ist. Nach Verkleinerung der offenen Menge erhält man einen invertierbaren Repräsentanten.

5.18. Proposition. *Ist V eine irreduzible k-Varietät, $W \subset V$ offen, dann ist $k(W) = k(V)$.*

5.19. Proposition. *Seien V, W zwei irreduziblen k-Varietäten. V und W sind k-birational äquivalent, genau dann, wenn $k(V)$ und $k(W)$ isomorph als k-Algebren sind.*

5.20. Proposition. *Ist V eine affine irreduzible k-Varietät, so ist $k(V) \cong$* $\mathrm{Quot(k[V])}$.

5.21. Beispiel. Als Übung überlege man sich, dass die affine irreduzible $\mathbb{Q}$-Varietät $V(X^3 - Y^2) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}}$ $\mathbb{Q}$-birational äquivalent zu $V(X^2 - Z, Y^3 - Z) \subset \mathbb{A}^3_{\mathbb{Q}}$ ist, aber nicht isomorph. Man skizziere beide Varietäten.

4. Dimension eine Varietät

Wir wollen den Varietäten auf sinnvolle Weise eine Dimension zuordnen, weil wir später Kurven als eindimensionale abgeschlossene Varietäten definieren werden.

5.22. Definition. Sei V eine irreduzible k-Varietät, dann ist $\dim(V) := \mathrm{trdeg(k(V)/k)}$. Ist V reduzibel, so ist die Dimension von V die maximale Dimension seiner irreduziblen Komponenten.

Hierbei bezeichnet trdeg(F/K) den Transzendenzgrad der Körpererweiterung F/K. Man sieht sofort, dass die Dimension einer Varietät invariant unter k-birationaler Äquivalenz ist. Der Dimensionsbegriff scheint zugegebenermaßen etwas unmotiviert, aber folgende Proposition sollte der Anschauung helfen.

5.23. Proposition. *Ist V eine irreduzible k-Varietät, und $n \in \mathbb{N}$, dann sind äquivalent:*

(i) $n = \mathrm{trdeg(k(V)/k)}$
(ii) $n+1$ *ist die maximale Länge einer echt aufsteigenden Kette abgeschlossener irreduzibler Teilmengen von V.*

Diese Proposition wollen wir ausnahmsweise an dieser Stelle beweisen. Im Beweis passiert etwas was typisch ist für die algebraische Geometrie, nämlich das Zurückführen der allgemeinen Situation auf den affinen Fall.
Beweis: Wir überlegen uns zunächst, dass es genügt die Behauptung für irreduzible *affine* k-Varietäten zu zeigen. V besitzt eine offene endliche Überdeckung von offenen Teilmengen, welche jeweils isomorph sind zu einer affinen Varietät sind (dies wird z.B. im ersten Vortrag gezeigt werden). Nach den vorigen Überlegungen besitzt jeder solche offene Teil denselben Funktionenkörper. Funktionenkörper. Sei $V_0 \subset \cdots \subset V_n$ eine echt aufsteigende Kette maximaler Länge von irreduziblen abgeschlossenen Mengen in V. Dann hat V_0 mit mindestens einer der 'affinen' offenen Überdeckungsmengen einen nichtleeren Schnitt, und somit also die ganze Kette, und weil der offene Teil dicht in V liegt, und die Kettenglieder irreduzibel sind, bleibt die Kette nach runterschneiden auch eine echt aufsteigende Kette. Umgekehrt lässt sich jede echt aufsteigende Kette im offenen 'affinen' Teil in die quasiprojektive Varietät hinein abschliessen.
Nun da wir uns überzeugt haben, dass es genügt die Aussage nur für affine k-Varietäteten zu betrachten, sei $V_0 \subset \cdots \subset V_n = V \subset \mathbb{A}_k^m$ eine maximale solche echt aufsteigende Kette von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen (sprich irreduziblen affinen Teilvarietäten).
Wir verwenden eine Feststellung von Zariski [**Fu**, Chapter 1.10, Proposition 4], nämlich dass ein Körpererweiterung L/K, welche als Ringerweiterung endlich erzeugt ist, bereits als Körpererweiterung endlich algebraisch ist.
Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über n.
Im Fall $n = 0$, d.h. $V = V_0$ Ist $\mathcal{I}(V)$ ein maximales Ideal in $k[X_1, \dots, X_m]$, da es sonst noch eine abgeschlossene Teilmenge in V geben würde. (Abgeschlossene Mengen im $\mathbb{A}_k^m$ korrespondieren Inklusionsumkehrend zu Primidealen im $k[X_1, \dots, X_m]$). Dann ist $k[x_1, \dots, x_m] = k[X_1, \dots, X_m]/\mathcal{I}(V)$ nach Zariskis Feststellung eine endliche Körpererweiterung von k, d.h. es gilt $\mathrm{trdeg(k(V)/k)} = 0$, wie behauptet.

Ist umgekehrt trdeg(k(V)/k) = 0, so sind die Elemente $x_1, \ldots, x_m$ in der Ringerweiterung $k[x_1, \ldots, x_m] = k[X_1, \ldots, X_m]/\mathcal{I}(V)$ algebraisch, und somit muss es bereits eine Körpererweiterung sein, weshalb $\mathcal{I}(V)$ ein maximales Ideal ist, und somit keine echte irreduzible abgeschlossene nichttriviale Teilmenge von V existieren kann.
Ist $n > 0$, wähle wieder eine maximale aufsteigende Kette $V_0 \subset \ldots V_{n-1} \subset V_n = V$ Nach Induktionsvoraussetzung hat $k[V_{n-1}]$ Transzendenzsgrad $n-1$ über k. Schreibe $k[V] = k[y_1, \ldots, y_r][\alpha_1, \ldots, \alpha_s]$, wobei $y_1, \ldots, y_r$ eine maximale algebraisch unabhängige Familie aus den gegebenen Erzeugern der Ringerweiterung über k bezeichne. Betrachte nun den Restklassenhomomorphismus $k[V] \to k[V_{n-1}]$, gegeben durch das Primideal $\mathfrak{p} = \mathcal{I}(V_{n-1})/\mathcal{I}(V)$ in $k[V]$. Dann ist $k[V_{n-1}] = k[V]/\mathfrak{p} = k[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_s]$, welches den Teilring $k[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r]$ besitzt. Es ist klar, dass jedes Element aus $k[V_{n-1}]$ algebraisch über $k[\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r]$ ist. Wir überlegen uns, dass aber auch die Elemente $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r$ algebraisch abhängig über k sind. Dazu genügt es, sich zu überlegen, dass $\mathfrak{p} \cap k[y_1, \ldots, y_r] \neq \{0\}$ ist. Sei $\alpha \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$. Dann sind $y_1, \ldots, y_r, \alpha$ algebraisch abhängig über k, d.h. es gibt einen polynomialen Ausdruck $f(y_1, \ldots, y_r, \alpha) = 0$. Betrachten wir f als Polynom in α, so sehen wir, dass der konstante Koeffizient in $\mathfrak{p}$ liegen muss, welcher zugleich aus $k[y_1, \ldots, y_r]$ ist. Somit also enthält $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r$ eine Transzendenzbasis von $k(V_{n-1})$ der Länge $< r$, und mit der Induktionsvoraussetzung folgt $r \geq n$, also trdeg(k(V)/k) $\geq$ n. Um die umgekehrte Richtung zu zeigen, d.h. ausgehend von einer affinen Varietät mit Dimension n eine echt aufsteigende Kette irreduzibler abgeschlossener Teilmengen zu konstruieren, benötigt man einen Satz, der in [**Fu**] kein Erwähnung findet (weshalb dort die Proposition keine Erwähnung findet), die sogenannte *Noether-Normalisierung*, welche das finden einer besonders 'guten' algebraisch unabhängigen Familie im Koordinatenring einer affinen k-Varietät garantiert. Als eine Konsequenz dieses Satzes, kann man zeigen, dass man durch Schneiden einer affinen Varietät mit einer (passenden) Hyperebene im affinen Raum die Dimension um genau 1 reduziert, und dass man so iterativ eine absteigende Kette der Länge $n+1$ von irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen konstruieren kann. $\square$

5.24. Bemerkung. im obigen Beweis wird der Fall einer quasiaffinen Varietät auf eine affine Varietät zurückgeführt, indem wir den Abschluss der quasiaffinen Varietät bilden (das Schwierige daran war die Überlegung, dass die Maximalität der Kettenlängen im Abschluss nicht ändert). Tatsächlich lässt sich der quasiaffine Fall noch anders auf den affinen Fall zurückführen. Man kann nämlich zeigen, dass eine irreduzible quasiaffine Varietät, welche durch das Herausnehmen der Nullstellenmenge eines Polynoms entstanden ist, isomorph zu einer irreduziblen affinen Varietät ist. Eine allgemeine irreduzible quasiaffine Varietät ist demnach eine offene Überlagerung von affinen Varietäten und es genügt nun einen solchen affinen Teil zu untersuchen.

5.25. Beispiel. Man überlege sich, dass die quasiaffine Varietät $\mathbb{A}^1_k \setminus \{0\}$ isomorph zur affinen Varietät $\{XY - 1 = 0\} \subset \mathbb{A}^2_k$ ist.

5. Kurven und Singularitäten

5.26. Definition.
- Eine irreduzible k-Varietät C der Dimension 1 bezeichnen wir als *irreduzible k-Kurve.*
- Ist $C \subset \mathbb{A}^n_k(\subset \mathbb{P}^n_k)$ eine irreduzible affine (projektive) k-Varietät der Dimension 1, so sprechen wir von einer *affinen (projektiven) k-Kurve.*
- Ist zudem $C \subset \mathbb{A}^2_k(\subset \mathbb{P}^2_k)$, so sprechen wir von eine *ebenen* irreduziblen affinen (projektiven) Kurve .

5.27. Proposition. *Ist C eine ebene irreduzible affine (bzw. projektive) k-Kurve, so gibt es - bis auf Faktoren in $k^\times$ -genau ein irreduzibles (bzw. homogenes) Polynom $f \in k[X_1, X_2]$ (bzw. $\in k[X_0, X_1, X_2]$), so dass $C \subset \mathbb{A}^2_k(\subset \mathbb{P}^2_k)$ die Nullstellenmenge von f ist. Umgekehrt definiert ein jedes solches Polynom eine ebene irreduzible affine (bzw. projektive) k-Kurve.*

5.28. Bemerkung. In [**Fu**, Ch. 3] wird der Begriff der *ebenen affinen (bzw. projektiven) Kurve* ad hoc als ein Polynom in zwei Unbestimmten (bzw. ein homogenes Polynom in drei Unbestimmten) eingeführt. Abgesehen von der Tatsache, dass in [**Fu**] sowieso nur K-Kurven betrachtet werden, unterscheidet sich dieser Begriff von unserem Begriff der *ebenen irreduziblen K-Kurve* insofern, als nicht nur reduzible Polynome (bzw. Varietäten) zugelassen sind, sondern darüber hinaus mehrfach auftretende Faktoren einer 'mehrfachen Kurve entsprechen' (die beiden Polynom f und f^2 definieren verschiedene ebene Kurven im Sinne von [**Fu**]). Dieser verallgemeinerte Begriff wird benötigt um eine möglichst allgemeine Aussage über das Schnittverhalten zweier verschiedener 'ebener Kurven' zu formulieren. Wir werden in unseren Vorträgen allerdings an unserer Definition festhalten, da wir in unserem Seminar zu diesem Thema keine Aussage treffen werden.
Eine **geometrisch** irreduziblen k-Kurve in unserem Sinne entspricht dann dem, was bei Fulton einfach nur Kurve genannt wird. (Wobei wir noch die Information mittragen, über welchem Teilkörper k die Kurve definiert ist.)

Im Folgenden reden wir kurz von *(ebenen) Kurven*, wenn wir eigentlich ebene geometrisch irreduzible k-Kurven meinen. Im ersten Vortrag wird es darum gehen für Punkte auf einer ebenen affine Kurve geometrisch anschaulich zu definieren, wann es sich um einen *einfachen* Punkt bzw. einen *singulären* Punkt handelt, bzw. ein quantitatives Mass (*Vielfachheit eines Punktes auf der Kurve*) dafür zu definieren. Zudem wird in dem Vortrag eine algebraische Definition dieser Begriffe gefunden, basierend auf Eigenschaften des sogenannten 'lokalen Ring' im betrachteten Punkt.

5.29. Definition. Sei V eine k-Varietät, $P \in V$, dann ist eine *lokale k-Funktion* in P eine Äquivalenzklasse von Paaren (U, r), wobei U eine offene **Umgebung von** P ist, und die Äquivalenz ansonsten wie bei rationalen Funktionen definiert ist.
Die Menge dieser lokalen k-Funktionen wird mit der offensichtlichen Addition und Multikplikation zu einer k-Algebra $\mathcal{O}_P(V)$, genannt der *k-lokale Ring von P in V.*

5.30. Beispiel. Man überlege sich als Übung folgende Beziehung zwischen den bisher erwähnten algebraischen Objekten einer ireduziblen k-Varietät: Es bezeichne immer U eine offene Teilmenge und P einen Punkt von V.

(i) $\mathcal{O}_V(U) \hookrightarrow k(V)$.
(ii) $\mathcal{O}_P(V) \hookrightarrow k(V)$.
(iii) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow \mathcal{O}_V(U_2) \hookrightarrow \mathcal{O}_V(U_1), r \mapsto r|_{U_2}$
(iv) $P \in U \Rightarrow \mathcal{O}_V(U) \hookrightarrow \mathcal{O}_P(V)$
(v) $\mathcal{O}_V(U) = \bigcap_{P\in U} \mathcal{O}_P(V)$.
(vi) $\mathcal{O}_P(V) = \bigcup_{U\ni P} \mathcal{O}_V(U)$
(vii) $k(V) = \bigcup_{P\in V} \mathcal{O}_P(V) = \bigcup_{U\subseteq V} \mathcal{O}_V(U)$.

Im ersten Vortrag wird unter anderem gezeigt werden, dass ein Punkt P auf einer ebenen affinen K-Kurve C genau dann ein einfacher Punkt ist, wenn der Ring der K-lokalen Funktionen in P ($\mathcal{O}_P(C)$) ein Bewertungsring ist. Dieses algebraische Kriterium wird dann verwendet, um allgemein bei K-Kurven den Begriff eines einfachen Punktes zu definieren (bzw. komplementär dazu den Begriff des singulären Punktes).
Ein zentrales Anliegen des Seminars ist es folgenden Satz zu beweisen:

5.31. Satz. *Sei C eine eben irreduzible projektive K-Kurve. Dann gibt es (bis auf Isomorphie) genau eine irreduzible projektive K-Kurve C' ohne singulären Punkt, welche K-birational äquivalent zu C ist.*

Die verwendete Methode (simultanes Aufblasen von Punkten im $\mathbb{P}^2_K$) wird im dritten Vortrag herausgearbeitet. Es wird dort auch gezeigt werden, dass man 'gutartige' Singularitäten durch diesen Prozess auflösen kann. Im vierten Vortrag wird gezeigt, wie man zu einer ebenen projektiven Kurve eine dazu birational äquivalente ebene projektive Kurve findet, deren Singularitäten alle von besagter gutartiger Form sind, so dass die Methode 'simultanes Aufblasen' tatsächlich wie gewünscht alle Singularitäten beseitigt.

Entgegen vorherigen Hoffnungen, konnten wir im Rahmen des Seminars nicht beweisen, dass es sich bei dem nichtsingulären Modell bereits um eine über k definierte Kurve handelt, falls die ursprüngliche Kurve bereits über k definiert war. Eventuell sind dafür feinere Konstruktionsmethoden zur Ausflösung von Singularitäten erforderlich, als die Aufblasungen und quadratische Transformationen wie sie in [**Fu**] *verwendet werden.*

6. Produkte von Varietäten und von Morphismen

Um es gleich vorwegzunehmen, die anschauliche Idee, die hinter dem Aufblasen einer Kurvensingularität einer ebenen Kurve steckt, ist der Versuch eine Art Parametrisierung der Kurve zu finden, und dann den Graphen der Parametrisierung als neue Kurve herzunehmen. Als Menge liegt dieser Graph z.B. im kartesischen Produkt $\mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^2_k$, bzw. $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^2_k$. Nun stellt sich die Frage, inwiefern man diesen Graphen als k-Varietät betrachten kann, zumal derart, dass es sich bei der Projektion (Deparametrisierung) auf die ursprünglich gegebene Kurve um eine birationale Äquivalenz handelt. Hierzu gibt es zwei mögliche Ansätze: In Fultons Buch wird in Kapitel 6 ein allgemeinerer Begriff einer Varietät eingeführt als wir das tun (zur Erinnerung: Varietäten sind für uns quasiaffine oder quasiprojektive Varietäten). Als grundlegende Räume betrachtet Fulton beliebige kartesische Produkte von projektiven und affinen Räumen, und definiert auf ihnen Topologien, welche feiner sind als die Produkttopologie der gegebene Zariskitoplogien der einzelnen Komponenten. Für unsere Belange genügt es allerdings nur die Situation von Produkten von projektiven Räumen, oder Produkten von affinen Räumen zu betrachten. Die gemischte Situation interessiert uns nicht.

5.32. Definition. Das Produkt $\mathbb{A}_k^n \times \mathbb{A}_k^m$ als Varietät ist der $\mathbb{A}_k^{n+m}$.

5.33. Bemerkung. Seien $V \subseteq \mathbb{A}_k^n$ und $W \subseteq \mathbb{A}_k^m$ affine k-Varietäten (d.h. abgeschlossen in den jeweiligen k-Zariskitopologien), Dann ist $V \times W \subset \mathbb{A}_k^n \times \mathbb{A}_k^n$ eine affine k-Varietät.

5.34. Satz (Segre-Einbettung)**.** *Die Abbildung*

$$\rho : \mathbb{P}_k^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_k^{n_s} \longrightarrow \mathbb{P}_k^{(n_1+1)\cdots(n_2+1)-1}$$
$$\Big([x_0^{(1)} : \cdots : x_{n_1}^{(1)}], \ldots, [x_0^{(s)} : \cdots : x_{n_s}^{(s)}]\Big) \mapsto \left[\prod_{i=1}^{s} x_{l_i}^{(i)}\right]_{0\leq l_1\leq n_1;\ldots;0\leq l_s\leq n_s}$$

Ist eine injektive Abbildung mit abgeschlossenem Bild. Allgemeiner, seien $V_1 \subseteq \mathbb{P}_k^{n_1}, \ldots, V_s \subseteq \mathbb{P}_k^{n_s}$ projektive k-Varietäten, so ist es auch $\rho(V_1 \times \cdots \times V_s)$. Dasselbe gilt, wenn man das Wort 'projektiv' durch das Wort 'quasiprojektiv' ersetzt.

Beweis: Die Injektivität der Abbildung: Seien $y^{(1)} \in \mathbb{P}^{n_1}, \ldots, y^{(s)} \in \mathbb{P}^{n_s}$ und $x^{(1)} \in \mathbb{P}^{n_1}, \ldots, x^{(s)} \in \mathbb{P}^{n_s}$ so, dass $\rho(y^{(1)}, \ldots, y^{(s)}) = \rho(x^{(1)}, \ldots, x^{(s)})$. Wir zeigen exemplarisch, dass dann $y^{(1)} = x^{(1)}$ gilt. Zunächst wissen wir, es gibt ein $r \in k^\times$, so dass $r \prod_{i=1}^s x_{l_i}^{(i)} = \prod_{i=1}^s y_{l_i}^{(i)}$ für alle $0 \leq l_1 \leq n_1; \ldots; 0 \leq l_s \leq n_s$. Fixieren wir nun $l_2, ..., l_s$, und wählen einmal $l_1 = l$ und einmal $l_1 = m$ mit $x_m^{(1)} \neq 0$. So sieht man, dass

$$\frac{x_l^{(1)}}{x_m^{(1)}} = \frac{x_l^{(1)} \prod_{i=2}^s x_{l_i}^{(i)}}{x_m^{(1)} \prod_{i=2}^s x_{l_i}^{(i)}} = \frac{y_l^{(1)}}{y_m^{(1)}}$$

. Durch variieren von l sehen wir so, dass $x^{(1)} = y^{(1)}$, und analog $x^{(i)} = y^{(i)}$ für alle $1 \leq i \leq s$.

Es ist leicht zu sehen, daß die Segre-Einbettung eines mehrfachen Produkts von projektiven Varietäten dasselbe ist, wie die itterierte Segreeinbettung von jeweils Paaren von solchen. Und somit folgt die Aussage induktiv, wenn wir sie im Fall $s = 2$ gezeigt haben. Deshalb nehmen wir von jetzt oE an, dass $s = 2$ ist. Um zu zeigen, dass $\rho(\mathbb{P}_k^{n_1} \times \mathbb{P}_k^{n_2})$ abgeschlossen in $\mathbb{P}_k^{(n_1+1)(n_2+1)-1}$ ist, überlege man sich, dass die Menge gegeben ist durch die Nullstellenmenge der Polynome

$$Z_{k,l}Z_{n,m} = Z_{k,m}Z_{n,l} \text{ für } 0 \leq k, n \leq n_1 \text{ und } 0 \leq l, m \leq n_2.$$

Seien V_1 und V_2 zwei projektive Varietäten, oE jeweils gegeben durch die Verschwindungsmenge eines einzigen Polynoms $f_1(X_0, ..., X_{n_1})$, bzw. $f_2(Y_0, ..., Y_{n_2})$. Man kann sich leicht überlegen, dass das $\rho(V_1 \times V_2)$ genau gegeben ist durch die Verschwindungsmenge der Polynome.

$$\begin{aligned} g_j &= f_1(Z_{0,j}, \ldots, Z_{n_1,j}) \text{ für } 0 \leq j \leq n_2 \\ h_i &= f_2(Z_{i,0}, \ldots, Z_{i,n_2}) \text{ für } 0 \leq i \leq n_1 \\ Z_{k,l}Z_{n,m} &= Z_{k,m}Z_{n,l} \text{ für } 0 \leq k, n \leq n_1 \text{ und } 0 \leq l, m \leq n_2. \end{aligned}$$

Der allgemeine Fall von quasipojektiven Varietäten folgt nun aus diesem Spezialfall fast unmittelbar. □

5.35. Definition. Seien $V_1 \subseteq \mathbb{P}_k^{n_1}, \ldots, V_s \subseteq \mathbb{P}_k^{n_s}$ quasiprojektive Varieäten. Dann schreiben wir $V_1 \times \cdots \times V_s$ für ihr *Varietäten - Produkt*, welches als Menge das kartesische Produkt ist, dessen Topologie durch die injektive Abbildung $\rho|_{V_1 \times \cdots \times V_s}$ induziert wird, und deren reguläre Funktionen auf offen Teilen $U \subset V_1 \times \cdots \times V_s$ durch Zurückziehen via $\rho(U)$ definiert sind.

5.36. Lemma. *Sei $U_1 \subset \mathbb{P}_k^n$ und $U_2 \subset \mathbb{P}_k^m$ jeweils Komplemente von Hyperebenen, also insbesondere isomorph zum $\mathbb{A}_k^n$, bzw. $\mathbb{A}_k^m$. Dann ist auch $U_1 \times U_2$ isomorph zum $\mathbb{A}^{n+m}$.*

Beweis: Sei oE $U_1 = \{(x_0 : \cdots : x_n) \mid x_0 \neq 0\}$ und $U_2 = \{(y_0 : \cdots : y_m) \mid y_0 \neq 0\}$. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \iota : U_1 \times U_2 &\longrightarrow \mathbb{A}_k^{n+m} \\ (x_0 : \cdots : x_n), (y_0 : \cdots : y_m) &\mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}, \frac{y_1}{y_0}, \ldots, \frac{y_m}{y_0}\right). \end{aligned}$$

Sei V irgendeine abgeschlossene Menge in $\mathbb{A}_k^{n+m}$, etwa gegeben durch ein Polynom $F(X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m)$. Das Urbild von V ist

$$\left\{(x_0 : \cdots : x_n), (y_0 : \cdots : y_n) \mid F\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}, \frac{y_1}{y_0}, \ldots, \frac{y_n}{y_0}\right) = 0\right\}.$$

Dies lässt sich auch auffassen als die Nullstellenmenge des Polynoms $\widetilde{F} = X_0^{\deg F} Y_0^{\deg F} F(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}, \frac{Y_1}{Y_0}, \ldots, \frac{Y_n}{Y_0})$. Bei genauer Betrachtung sieht man, dass sie Monome dieses Polynoms entweder von der Gestalt $X_i^{a_i} X_0^{b_i} Y_0^{\deg F}$ mit $a_i + b_i = \deg F$ oder von der Gestalt $Y_i^{c_i} Y_0^{d_i} X_0^{\deg F}$ mit $c_i + d_i = \deg F$ für $1 \leq i \leq n$ sind. Also kann man es auch als ein homogenes Polynom vom Grad $\deg F$ in den "Variablen" $X_i Y_0$ und $Y_i X_0$ für $1 \leq i \leq n$, sowie $X_0 Y_0$ betrachten. Das heisst insbesondere, dass das Bild unter der Segreeinbettung des Urbildes von V abgeschlossen ist. Also handelt es sich bei der Bijektion ι um eine stetige Abbildung.
Sei nun $U \subseteq \mathbb{A}_k^{n+m}$ offen und r eine k-reguläre Funktion auf U. Wir müssen zeigen, dass dann $r \circ \iota$ eine k reguläre Funktion auf $\iota^{-1}(U)$ ist. Ich möchte an dieser Stelle ein sehr sehr schlechtes Vorbild sein, und die Begründung nur mündlich anreissen: Das r regulär ist, bedeutet, dass es eine offene Überdeckung von U gibt, worauf r jeweils durch einen Bruch von Polynomen gegeben ist. Zurückziehen mittels ι gibt uns zunächst eine Darstellung von Brüchen von Polynomen, in welche Brüche von Variablen eingesetzt wurden (wie vorhin bei F). Durch Multiplizieren sowohl des Zählers als auch des Nenners mit genügend hoher Potenz von $X_0 Y_0$, erhalten wir Brüche von homogenen Polynomen gleichen Grades, die wir sogar als Brüche von

ebensolchen Polynomen in den 'Segre'-Variablen interpretieren können. Also handelt es sich bei $r \circ \iota$ um eine reguläre Funktion.
Um 'Isomorphie' zu zeigen muss man jetzt eigentlich noch von der Umkehrabbildung zeigen, dass es sich um einen Morphismus handelt. Dies lass ich als Übung. $\square$

5.37. Lemma. *Seine V, W k-Varietäten, und $V = \bigcup U_i$ eine offene Überdeckung von V. Sei $\varphi : V \longrightarrow W$ eine Abbildung. Dann ist φ ein Morphismus, genau dann, wenn $\varphi|_{U_i}$ ein Morphismus für jedes U_i ist.*

Beweis: Wenn φ ein Morphismus ist, so auch $\varphi|_{U_i}$. Dies ist fast trivial, es würde auch gelten, wenn U_i eine abgeschlossene Teilvarietät wäre. Es stimmt, da die Einschränkungen von regulären Funktionen wieder regulär sind.
Seien umgekehrt $\varphi|_{U_i}$ Morphismen. Sei $U \subseteq W$ offen, dann ist das Urbild von U unter φ die Vereinigung der Urbilder unter φ_{U_i}, und somit offen, also ist die Stetigkeit gezeigt. Sei r eine reguläre Funktion auf U. Zu zeigen ist, dass $r \circ \varphi$ regulär auf $\varphi^{-1}(U)$ ist. Auf jedem $\varphi^{-1}|_{U_i}(U)$ gilt, dass $(r \circ \varphi)|_{U_i}$ regulär ist, da $(r \circ \varphi)|_{U_i} = r \circ \varphi_{U_i}$. Da aber die $\varphi^{-1}|_{U_i}(U)$ eine (endliche) offene überdeckung von $\varphi^{-1}(U)$ sind, ist dann anhand der Definition von 'regulär' relativ leicht zu sehen, dass dann auch $r \circ \varphi$ regulär auf $\varphi^{-1}(U)$ ist. $\square$

5.38. Lemma. *Sei V, W, W_1 drei k-Varietäten mit $W_1 \subseteq W$. Sei $\varphi : V \longrightarrow W_1$ eine Abbildung. Genau dann ist φ ein Morphismus nach W_1, wenn es ein Morphismus nach W ist.*

Beweis: Dass die Stetigkeit von φ nicht davon abhängt, in welche Obermenge hinein man die Abbildung betrachtet, ist wegen Spurtopologie klar. Sei zunächst Angenommen, dass φ als Abbildung nach W_1 ein Morphismus ist. Sei r eine reguläre Abbildung auf einer offenen Teilmenge von W. Dann ist die Zurckgezogene Funktion $r \circ \varphi$ regulär auf dem Urbild, da man die offene Teilmenge und r ja zuerst hätte auf W_1 einschränken können.
Sei nun angenommen, dass φ als Abbildung nach W ein Morphismus ist. Sei r eine reguläre Abbildung auf einer offenen Teilmenge U von W_1. Nach Definition von 'regulär' gibt es eine offene Überdeckung $U = \bigcup U_i$, worauf r jeweils als ein Bruch von Polynomen gegeben ist. Mit ein klein bischen Nachdenken mekrt man, dass die U_i von offenen Mengen $\tilde{U}_i$ in W kommen, auf denen jeweils ausserdem der zu U_i gehrende Polynombruch eine reguläre Funktion definiert. Diese zurckgezogen via φ liefert jeweils eine reguläre Funktion auf $\varphi^{-1}(\tilde{U}_i) = \varphi^{-1}(U_i)$, welche natürlich mit $r \circ \varphi$ auf $\varphi^{-1}(U_i)$ übereinstimmt. Dann sieht man fast sofort mit Hilfe der Definition von 'regulär' und ein kleines bischen Nachdenken, dass auch $r \circ \varphi$ eine reguläre Funktion auf $\varphi^{-1}(U)$ ist. $\square$

5.39. Satz. *Seien $V_1, \ldots, V_s$ projektive k-Varietäten, und W eine k-Varietät, sowie $\varphi_i : W \to V_i$ Morphismen von k-Varietäten, so ist*

$$\begin{aligned} \varphi : W &\longrightarrow V_1 \times \cdots \times V_s \\ w &\mapsto (\varphi_1(w), \ldots, \varphi_s(w)) \end{aligned}$$

ein Morphismus von k-Varietäten.

Beweis: Wir beschränken uns wieder auf den Fall $s = 2$, da der allgemeine Fall sofort induktiv folgt. Seien $V_1 \subseteq \mathbb{P}^n_k$ und $V_2 \subseteq \mathbb{P}^m_k$ also zwei projektive Varietäten und φ_1, φ_2 Morphismen von W.
Seien $(U_i)_{0\leq i\leq n}$ die Komplemente der i-ten Koordinatenebene (ihr wisst doch was ich meine) des $\mathbb{P}^n_k$, oder noch besser, seien das die Schnitte derselben mit V_1. Analog $(U'_j)_{0\leq j\leq m}$ das entsprechende zu V_2. Dann bildet offensichtlich $(U_i \times U'_j)_{i,j}$ eine offene Überdeckung von $V_1 \times V_2$ (dies liegt daran, dass die Produkttopologie gröber ist als die 'Segre'-topologie, d.h. die Topologie des Varietätenprodukts). Ausserdem sind $U_i \times U'_j$ jeweils isomorph zu einer affinen Varietät nach einem vorigen Lemma.
Bezeichne $W_{i,j}$ das Urbild von $U_i \times U'_j$. Damit ist $W_{i,j}$ offen in W, da ja φ zumindest stetig bezüglich der herkömmlichen Produkttopologie auf $V_1 \times V_2$ ist. Desweiteren ist $(W_{i,j})_{i,j}$ eine offene Überdeckung von W. Nach einem weiteren vorigen Lemma, genügt es zu überlegen, dass $\varphi_{W_{i,j}}$ jeweils ein Morphismus nach $V_1 \times V_2$ ist, bzw. (ebenso nach einem vorigen Lemma) ein Morphismus nach $U_i \times U'_j$ ist.
Man bemerke, dass $W_{i,j}$ wie jede Varietät, eine Überdeckung von offenen Teilmengen $(W_{i,j,k})_k$ besitzt, welche als Varietäten jeweils isomorph zu einer affinen Varietät sind.
Also haben wir uns mittlerweile darauf reduziert zu zeigen, dass $\varphi|_{W_{i,j,k}}$ ein Morphismus nach $U_i \times U'_j$ ist.
Wir können nun annehmen, dass sowohl $W_{i,j,k}$, als auch U_i und U'_j tatsächlich affine Varietäten sind (nicht blos isomprh zu). (Diesen Auftaktsatz muss man sich vielleicht nachträglich nochmal im Gehirn zergehen lassen, aber danach wird jeder zustimmen). Dann aber sind wir fertig, da ja dann sowohl $\varphi_1|_{W_{i,j,k}}$ als auch $\varphi_2|_{W_{i,j,k}}$ polynomial gegeben sind, also auch $\varphi|_{W_{i,j,k}}$. □

Jetzt noch eine kleine Feststellung zu Projektionen; der Vollständigkeit halber.

5.40. Bemerkung. Seien $V_1, \ldots, V_s$ projektive k-Varietäten. Dann sind die Projektionen $\pi_j : V_1 \times \cdots \times V_j \times \ldots V_s \longrightarrow V_j$ Morphismen von k-Varietäten.

Beweis: Zunächst sei wieder Bemerkt, dass es aus Gründen der Assoziativität und Kommutativität des Segreprodukts es genügt den Fall $s = 2$ und $j = 1$ zu betrachten. Stetigkeit von π_1 ist wieder klar. Sei r eine reguläre Funktion auf einer offene Teilmenge U von $V_1 \subseteq \mathbb{P}^n_k$. Wir zeigen, dass $r \circ \pi_1$ eine reguläre Funktion auf $U \times V_2$ ist. Anders gesprochen, wir wollen zeigen, dass $r \circ \pi_1$ auf $U \times V_2$ lokal durch Brüche von Polynomen gleichen Grades in den "Segre"-variablen gegeben ist. Zunächst einmal wissen wir, dass es eine offene Überdeckung (U_i) von U gibt, so dass $r|_{U_i} = \frac{f_i}{g_i}$ mit $f, g \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogen vom selben Grad d_i. Sei U'_j das Komplement der j-ten Koordinatenebene in $V_2 \subseteq \mathbb{P}^m_k$ für $0 \leq j \leq m$. Dann ist $(U_i \times U'_j)_{i,j}$ eine offene Überdeckung von $U \times V_2$. Auf $U_i \times U_j$ ist $r \circ \pi_1$ gegeben durch $\frac{Y_j^{d_i} f_i(X_0,\ldots,X_n)}{Y_j^{d_i} g(X_0,\ldots,X_n)}$. Bei genauerer Analyse der Polynome in Zähler und Nenner sehen wir dass es sich jeweils um homogene Polynome vom Grad d_i in den 'Segre'-variablen $X_0Y_j, \ldots, X_nY_j$ handelt. also ist $r \circ \pi_1$ eine reguläre Funktion auf $U \times V_2$. □

Nach diesen Vorarbemerkungen (bzw. Nachbemerkungen) zu Produkten von projektiven Varietäten sind wir nun gerüstet den Vortrag von Dominic zum simultanen Aufblasen der Projektiven Ebene in mehreren Punkten zu verstehen, sowie den Vortrag von Lukas zum Beweis der Eindeutigkeit eines nichtsingulären Modells einer Kurve. Ich entschuldige mich dafür, dass ich in den Beweisen hin und wieder Begriffe adhoc erfunden und verwendet habe, die ich nirgends richtig definiert habe (wie z.B. die Segre-variablen), vertraue aber auf die Fähigkeit der Leser mit Hilfe ihrer Intuition das Richtige zu verstehen.

Literaturverzeichnis

[Fu] W. Fulton, *Algebraic Curves*, Advanced Books Classics 1989

[Ha] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer 1977

[Sc] C. Scheiderer, *Skript zur Vorlesung Algebraische Geometrie*, www.math.uni-konstanz.de/~scheider/scripts/AG.pdf