Diplomarbeit

Summen $2m$-ter Potenzen von reellen Polynomen

vorgelegt von

Sebastian Gruler
Matrikelnummer: 615576

an der
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

betreut von
Professor Dr. Alexander Prestel

Zweitgutachter
Professor Dr. Joachim Schmid

Konstanz, im September 2011

Sebastian Gruler
In der Gebhardsösch 6
78467 Konstanz

Sebastian.Gruler@Uni-Konstanz.de

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Als das Ereignis, das die gesamte Mathematik des 20. Jahrhunderts mit am meisten beeinflusste, gilt zweifelsohne David Hilberts Rede auf dem Mathematikerkongress in Paris im August 1900, bei der er eine Liste von zu diesem Zeitpunkt ungelösten mathematischen Problemen vorstellte. Diese Liste ist heutzutage als die Hilbertschen Probleme [H] bekannt.

Für uns ist dabei das ***17. Hilbertsche Problem*** von größtem Interesse, das in einfacher Form folgendermaßen lautet:
Gegeben sei ein beliebiges positiv semidefinites reelles Polynom f in n Unbekannten, das heißt $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots ,X_n]$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.
Die Frage ist nun, ob es immer ein $N \in \mathbb{N}$ und $g_i,h_i \in \mathbb{R}[X_1, \ldots ,X_n]$ gibt mit

$$f = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{g_i}{h_i} \right)^2 .$$

In Hilbert's 17. Problem geht es also um die Frage, ob jedes reelle positiv semidefinite Polynom eine Darstellung als Summe von Quadraten von reellen rationalen Funktionen besitzt.
Emil Artin konnte dieses Problem 1926 als Erster lösen [A] und die Frage bejahen.

Aus diesem Problem beziehungsweise Artins Lösung entwickelten sich im Laufe der Zeit dann immer weitere Fragestellungen, die sich aus Verallgemeinerungen des Problems, dem Versuch die Darstellung zu verbessern, oder auch der Frage nach der maximalen Länge der Quadratsummen ergaben.

So eine Verallgemeinerung war unter anderem die Frage, was passiert, wenn ein $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots ,X_n]$ nur noch auf einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ positiv semidefinit ist, wobei die Teilmenge selbst durch polynomiale Ungleichungen definiert ist.

Für $h_1, \ldots ,h_s \in \mathbb{R}[X_1, \ldots ,X_n]$ konnte so zum Beispiel gezeigt werden, dass ein $f \in \mathbb{R}[X_1, \ldots ,X_n]$ mit $f \geq 0$ auf

$$W_{\mathbb{R}}(h_1, \ldots ,h_s) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_1(x) \geq 0, \ldots ,h_s(x) \geq 0\}$$

folgende Darstellung besitzt:

$$f = \frac{t_1}{t_2} \tag{I}$$

$$\text{für gewisse } t_1,t_2 \in T(h_1,\dots,h_s) := \sum_{\nu\in\{0,1\}^s} h_1^{\nu_1}\cdots h_s^{\nu_s} \sum \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]^2.$$

(Den Beweis hierzu findet man unter anderem in [P] 3.3.6)

Weiter wurde unter anderem untersucht, was sich für eine einfachere Darstellung für f ergibt, wenn f nicht mehr nur positiv semidefinit, sondern sogar strikt positiv ist.

Wenn man (I) betrachtet, liegt es nahe, sich zu überlegen, ob unter bestimmten Bedingungen eventuell auch eine nennerfreie Darstellung von f möglich ist.

Solch ein Resultat ist der ***Satz von Schmüdgen***.
Dieser lautet: Sei $f \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ mit $f > 0$ auf $W_{\mathbb{R}}(h_1,\dots,h_s)$ und $W_{\mathbb{R}}(h_1,\dots,h_s)$ kompakt. Dann gilt

$$f \in T(h_1,\dots,h_s) := \sum_{\nu\in\{0,1\}^s} h_1^{\nu_1}\cdots h_s^{\nu_s} \sum \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]^2.$$

Dieser Satz, der also besagt, dass unter der relativ einfachen zusätzlichen Bedingung, dass $W_{\mathbb{R}}(h_1,\dots,h_s)$ kompakt und f darauf strikt positiv ist, die Nenner in (I) wegfallen, wurde 1991 von Konrad Schmüdgen bewiesen [Sch]. Er benutzte allerdings Methoden aus der Funktionalanalysis. Der erste algebraische Beweis stammt von Thorsten Wörmann [W].

Auch für den Satz von Schmüdgen gibt es noch weitere Verbesserungen in der Darstellung von f. So werden unter zusätzlichen Voraussetzungen die echten Produkte der h_i's gar nicht benötigt und es kann eine Darstellung

$$f = \sigma_0 + \sigma_1 h_1 + \cdots + \sigma_s h_s \text{ mit } \sigma_i \in \sum \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]^2 \tag{II}$$

erreicht werden. (Siehe dazu [P-D] Kapitel 6)

Eine weitere Verallgemeinerung ist, wenn man für f nicht mehr nur eine Summe von Quadraten, sondern allgemeiner eine Summe $2m$-ter Potenzen (wobei m eine positive natürliche Zahl ist) erreichen will. Um diese verallgemeinerte Darstellung von Polynomen als Summe $2m$-ter Potenzen, deren Betrachtung Eberhard Becker 1978 eingeleitet hat [B1], geht es in dieser Arbeit. Zentrale Ausgangslage ist dabei die Verallgemeinerung des Satzes von Schmüdgen auf eben diese Summen $2m$-ter Potenzen. Diese konnte erstmals von Thorsten Wörmann für ungerades m bewiesen werden [W].

Er zeigte also konkret, dass für ein beliebiges, ungerades $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $f,h_1,\ldots,h_s \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ mit $f > 0$ auf $W_{\mathbb{R}}(h_1,\ldots,h_s)$ und $W_{\mathbb{R}}(h_1,\ldots,h_s)$ kompakt,

$$f \in T^{2m}(h_1,\ldots,h_s) := \sum_{\nu\in\{0,\ldots,2m-1\}^s} h_1^{\nu_1}\cdots h_s^{\nu_s} \sum \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]^{2m} \qquad \text{(III)}$$

gilt.
Der Beweis dieses Satzes wird das Ziel von **Kapitel 2** sein. Allerdings liefern wir, basierend auf der Arbeit von Thomas Jacobi [J], einen anderen, einfacheren Beweis als Wörmann. Neben (III) werden alle dafür notwendigen Resultate Bestandteil von **Kapitel 2** sein. In diesem Kapitel werden wir dann auch alle notwendigen Begriffe und Methoden aus dem Teilbereich der Summen $2m$-ter Potenzen einführen und bereitstellen. (III) **sowie alle anderen Resultate aus Kapitel 2, wie zum Beispiel die zentralen Sätze von Jacobi und Prestel, beweisen wir anhand von [P-D].** Dabei beweisen wir die Sätze im Vergleich zu [P-D] nicht neu, sondern formulieren sie nur etwas ausführlicher, gegebenfalls verständlicher und füllen Lücken oder Auslassungen, die die Autoren als nicht notwendig oder trivial empfanden . Des weiteren formulieren wir im Vergleich zu [P-D] Aussagen zum besseren Verständnis auch teilweise um oder ändern die Reihenfolge und geben ergänzende Erläuterungen, die ebenfalls zum Verständnis der Thematik dienen sollen.

Wie schon erwähnt, können wir (III) nur für ungerades m zeigen.
Es stellt sich dann natürlich sofort die Frage, ob sich der Satz von Schmüdgen auch für ein gerades m verallgemeinern lässt und dies aber einfach nur anders gezeigt wird, oder aber, ob es für gerades m gar nicht geht. In diesem Fall muss es dann aber ein Gegenbeispiel zu (III) geben.
Dass es so ein Gegenbeispiel gibt, zeigen wir in **Kapitel 3** für $m = 2$.
Somit hätten wir dann gezeigt, dass (III) für gerades m allgemein nicht gilt.

Unser nächstes Ziel ist es dann unter zusätzlichen, schärferen Bedingungen an die h_i's einerseits auch für gerades m solch eine Darstellung für f zu finden und andererseits, unabhängig ob m gerade oder ungerade ist, die Darstellung von (III) noch weiter zu verbessern und, analog zu (II) im quadratischen Fall, ohne die Produkte der h_i's auszukommen. Dass es solch zusätzliche Bedingungen gibt, sehen wir dabei schon im Verlaufe von Kapitel 2.

Da diese Bedingungen aber sehr allgemein und aufwendig zu prüfen sein werden, werden wir uns dann in **Kapitel 4** auf den Polynomring in einer Variablen beschränken, und diese Bedingungen konkretisieren und vereinfachen.

Alle Definitionen und Begriffe, die direkt und ausschließlich zu den Summen $2m$-ter Potenzen gehören, werden in dieser Arbeit vor deren erstmaliger Verwendung ausrei-

chend im entsprechenden Abschnitt in Kapitel 2 und 4 eingeführt und erklärt.
Allerdings kann man das Themengebiet der Summen $2m$-ter Potenzen nicht ohne Grundlagen, Begriffe und Resultate aus der Reellen Algebra, wozu die Summen $2m$-ter Potenzen als Verallgemeinerung ja auch gehören, und der Bewertungstheorie ausführlich angehen, verstehen und vereinfachen. Vor allem in den späteren Beweisen greift man oft auf Methoden und Resultate aus der Bewertungstheorie zurück.

In **Kapitel 1** führen wir deshalb ein paar Grundlagen aus der Reellen Algebra (in Abschnitt 1.1) und der Bewertungstheorie (in Abschnitt 1.2) ein und stellen hier auch die später benötigten Resultate aus diesen beiden Themengebieten bereit.
Wer sich schon ausreichend mit Reeller Algebra und Bewertungstheorie beschäftigt hat und in diesen Bereichen Grundlagenkenntnisse vorzuweisen hat, kann diese beiden Abschnitte getrost überspringen.
In Abschnitt 1.3 beweisen wir noch ein Lemma, das für den weiteren Verlauf der Arbeit, vor allem Kapitel 2, sehr nützlich sein wird.

Kommen wir zum Abschluss dieser Einleitung noch zum Gebrauch einiger Buchstaben im Verlauf dieser Arbeit.

Ab jetzt sei $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ immer eine positive natürliche Zahl. Der Buchstabe m steht dabei immer im Zusammenhang mit $2m$-ten Potenzen von Polynomen. Das heißt, die Zahl $2m$ gibt an, was für Potenzen von Polynomen wir betrachten. Der Buchstabe m wird in dieser Arbeit keine andere Bedeutung haben.
Der Buchstabe $\boldsymbol{A}$ bezeichnet immer einen kommutativen Ring mit 1. A ist dabei entweder ein allgemeiner Ring oder aber, wie in den meisten Fällen, der Polynomring über $\mathbb{R}$ in n Unbestimmten.
Im Fall $A = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ bezeichnet $\boldsymbol{n}$ immer die Anzahl der Unbestimmten im Polynomring. Handelt es sich bei A um einen allgemeinen Ring, kann n auch für eine beliebige natürliche Zahl stehen.
Diese werden ansonsten auch oft mit l,k oder r bezeichnet.
$\boldsymbol{s} \in \mathbb{N}$ bezeichnet immer die Anzahl der h_i's, die die Menge $W_{\mathbb{R}}(h_1, \ldots, h_s)$ festlegen.
Der Buchstabe $\boldsymbol{K}$ steht immer für einen Körper.
$\mathcal{O}$ bezeichnet immer einen Bewertungsring und $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal (siehe dazu Abschnitt 1.2).
Mit $\boldsymbol{P}$ bezeichnen wir immer einen *Positivbereich.* (siehe Abschnitt 1.1).
Die in Abschnitt 2.1 eingeführten Begriffe *Modul der Stufe 2m* und *Semiordnung der Stufe 2m* werden immer mit $\boldsymbol{M}$ beziehungsweise $\boldsymbol{S}$ bezeichnet.

An dieser Stelle möchte ich mich recht herzlich bei Professor Dr. Alexander Prestel für die Betreuung dieser Diplomarbeit, sowie auch für die vielen Vorlesungen, die ich während meiner Studienzeit bei ihm gehört habe bedanken. Diese Vorlesungen haben mein Interesse an der Reellen Algebra und allgemein an der reinen Mathematik geweckt und dadurch letztendlich erst zu dieser Arbeit geführt.
Bedanken möchte ich mich auch bei Professor Dr. Joachim Schmid für die Zweitkorrektur und bei Professor Dr. Markus Schweighofer, der es mir ermöglicht nach dem Studium an der Universität zu bleiben und meine Kenntnisse zu vertiefen und zu erweitern.
Mein Dank gilt außerdem Sabrina Kraftschik für das Korrekturlesen dieser Arbeit und Jennifer Thieme, deren LaTeX-Skript mir eine sehr große Hilfe bei der Umsetzung dieser Arbeit war.
Zu guter Letzt gilt mein ganz besonderer Dank meinen Eltern, die mich während meines Studiums immer finanziell unterstützt haben und mir immer eine große Hilfe waren.

1 Grundlagen

Wie in der Einleitung angekündigt wollen wir, bevor wir mit der Verallgemeinerung des Satzes von Schmüdgen beginnen, in diesem Kapitel einige Grundlagen aus der Reellen Algebra und der Bewertungstheorie bereitstellen sowie am Ende des Kapitels noch ein nützliches Lemma beweisen.

1.1 Reelle Algebra

Beginnen wir also mit einigen grundlegenden Begriffen und Definitionen aus der Reellen Algebra, wobei es hier hauptsächlich um den Bereich von Anordnungen auf Körpern und eben um bestimmte Darstellungen von Polynomen geht. In diesem Abschnitt beschränken wir uns aber auf den quadratischen Fall (also m=1). Alle Begriffe und Definitionen, die direkt im Zusammenhang mit Summen $2m$-ter Potenzen stehen, werden später im Hauptteil ausführlich erklärt und eingeführt.
Wir gehen allerdings nicht sehr ausführlich auf diesen quadratischen Fall und die dazu gehörenden, schon in der Einleitung erwähnten Resultate ein, sondern erwähnen hier nur explizit diejenigen Begriffe und Resultate, die wir später im Hauptteil für die Verallgemeinerung auf Summen $2m$-ter Potenzen brauchen.
Für weitere Resultate und einen ausführlichen Einblick in das Thema sei auf [P-D] verwiesen. Außerdem gelten alle Resultate von Kapitel 2 und Kapitel 4 auch speziell im quadratischen Fall, indem man einfach m=1 setzt.

Sei A ein kommutativer Ring mit 1.

Eine Teilmenge $T \subseteq A$ wird ***Präpositivbereich*** von A oder ***Präordnung*** von A genannt, wenn folgendes gilt:

$$T + T \subseteq T,\ T \cdot T \subseteq T,\ A^2 \subseteq T,\ \text{und} -1 \notin T.$$

Ein Präpositivbereich T von A wird ***Positivbereich*** von A genannt, wenn zusätzlich

$$T \cup -T = A \text{ gilt, und } \operatorname{supp} T := T \cap -T \text{ ein Primideal von } A \text{ ist.}$$

Aus den Definitionen folgt, dass $\sum A^2$ in jedem Präpositivbereich enthalten ist und selbst ein Präpositivbereich (der kleinstmögliche) ist, falls $-1 \notin \sum A^2$ gilt.

Eine Präordnung T wird ***archimedisch*** genannt, wenn für alle $a \in A$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n - a \in T$ existiert.

A wird ***reell*** genannt, wenn aus $a_1^2 + \cdots + a_r^2 = 0$ ($a_i \in A$) folgt, dass $a_i = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ gilt.
Ein Ideal I von A wird ***reell*** genannt, wenn A/I reell ist.

Für eine Teilmenge $M \subseteq A$ definieren wir

$$\mathcal{X}_M := \{P \subseteq A \mid P \text{ ist Positivbereich, } M \subseteq P\} \text{ und}$$
$$\mathcal{X}_M^{\max} := \{P \subseteq A \mid P \in \mathcal{X}_M \text{ ist maximal in } \mathcal{X}_M\}.$$

Kommen wir nun zu ein paar Eigenschaften von solchen Präpositivbereichen. Für die Beweise der Aussagen sei auf [P-D] verwiesen.

Behauptung 1.1 ([P-D] 4.1.4)**:**
Wenn ein Präpositivbereich T von A maximal (bezüglich $\subseteq$) ist, dann ist T ein Positivbereich.

Korollar 1.2 ([P-D] 4.1.5)**:**
Jeder Präpositivbereich T von A ist in einem Positivbereich P von A enthalten.

Korollar 1.3 ([P-D] 4.1.6)**:**
A besitzt genau dann einen Positivbereich, wenn $-1 \notin \sum A^2$ gilt.

Die bisherigen Definitionen und Resultate gelten alle insbesondere auch für den Fall, dass $A = K$ ein Körper ist.
In diesem Fall gilt für einen Positivbereich P von K

$$\operatorname{supp} P = P \cap -P = \{0\}.$$

Man prüft leicht nach, dass für eine Anordnung $\leq$ auf K die Menge
$P_{\leq} := \{a \in K \mid 0 \leq a\}$ ein Positivbereich von K ist.
Andererseits ist für jeden Positivbereich P von K die Relation $\leq_P$, die durch

$$a \leq_P b \ :\Leftrightarrow \ b - a \in P \text{ (für } a,b \in K)$$

definiert ist, eine Anordnung auf K (siehe [P-D] 1.1.7).

Wir können also in Zukunft eine Anordnung $\leq$ auf K mit ihrem Positivbereich $P_{\leq}$ von K und umgekehrt ein Positivbereich P von K mit seiner zugehörigen Anordnung $\leq_P$ auf K identifizieren.

Für einen Körper K ist $-1 \notin \sum K^2$ äquivalent zu der Aussage, dass aus $a_1^2 + \cdots + a_r^2 = 0$ $(a_i \in K)$ schon $a_i = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, r\}$ folgt.

Eine wichtige Tatsache für angeordnete Körper (also Körper mit einer Anordnung beziehungsweise einem Positivbereich) ist das folgende, in [P-D] (1.1.5) bewiesene und auch als ***Einbettungssatz von Hölder*** bekannte Resultat:
Jeder archimedisch angeordnete Körper kann ordnungstreu in $\mathbb{R}$ eingebettet werden.

Zum Ende dieses Abschnittes betrachten wir nun noch zwei weitere Resultate, die im späteren Verlauf der Arbeit benutzt werden.
Diese beiden Sätze werden nur zitiert und es wird auf den Beweis in [P-D] verwiesen.

Für den ersten Satz benötigen wir noch folgende Notation:
Sei $T \subseteq A$ eine Präordnung und sei $P \in \mathcal{X}_T$.
Sei $\alpha_P : A \twoheadrightarrow \overline{A} := A/\operatorname{supp} P$ der kanonische Restklassenhomomorphismus.
Man sieht leicht, dass $\overline{P}$ ein Positivbereich von $\overline{A}$ ist, für den zusätzlich $\operatorname{supp} \overline{P} = \{0\}$ gilt.

Satz 1.4 ([P-D] 5.2.3)**:**
Sei T eine archimedische Präordnung von A.
Dann gilt für alle $P \in \mathcal{X}_T$, dass P genau dann maximal in $\mathcal{X}_T$ ist, wenn $\alpha_P : A \to \mathbb{R}$ gilt.

Für den zweiten Satz sei $A = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ konkret gegeben.

Für $h_1, \ldots, h_s \in A$ sei

$$W_{\mathbb{R}}(h_1, \ldots, h_s) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_1(x) \geq 0, \ldots, h_s(x) \geq 0\}, \text{ und}$$
$$T(h_1, \ldots, h_s) := \sum_{\nu \in \{0,1\}^s} h_1^{\nu_1} \cdots h_s^{\nu_s} \sum A^2.$$

Satz 1.5 ([P-D] 4.2.10)**:**
Für $f, h_1, \ldots, h_s \in A = \mathbb{R}[X_1, \ldots, h_s]$ gilt: Wenn $f > 0$ auf $W_{\mathbb{R}}(h_1, \ldots, h_s)$ ist (d.h. wenn $f(x) > 0$ für alle $x \in W_{\mathbb{R}}(h_1, \ldots, h_s)$ gilt), dann gilt $t_1 f = 1 + t_2$ für gewisse $t_1, t_2 \in T(h_1, \ldots, h_2)$.

1.2 Bewertungstheorie

Nach den Grundlagen aus der Reellen Algebra geben wir in diesem Abschnitt ein paar Grundlagen, Definitionen und Resultate aus der Bewertungstheorie an, die im weiteren Verlauf als bekannt vorausgesetzt werden und sehr nützlich oder sogar notwendig sein werden.
Wie schon in der Einleitung erwähnt, kann, wer sich schon intensiver mit Bewertungstheorie auseinandergesetzt hat und sich in den Grundlagen auskennt, diesen Abschnitt getrost überspringen.
Für Interessierte an weiteren Resultaten und an der Bewertungstheorie an sich sei auf [E-P] verwiesen.

Sei nun K ein Körper und Γ eine angeordnete abelsche Gruppe.
Eine ***Bewertung v*** auf K ist eine surjektive Abbildung $v : K \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ mit folgenden Eigenschaften: Für alle $x,y \in K$ gilt,

$$
\begin{aligned}
&(1)\ v(x) = \infty \Rightarrow x = 0\\
&(2)\ v(xy) = v(x) + v(y)\\
&(3)\ v(x+y) \geq \min\{v(x),v(y)\}.
\end{aligned}
$$

Aus diesen Eigenschaften lässt sich leicht schließen, dass

$$v(1) = 0, \qquad v(x^{-1}) = -v(x), \qquad v(-x) = v(x)$$

für alle $x \in K$ gilt.

Wir nennen $\Gamma = v(K^\times)$ die Wertegruppe von v.

Wenn $\Gamma = \{0\}$ gilt, nennen wir v die ***triviale Bewertung***.

Wir nennen v eine ***Rang1-Bewertung***, wenn Γ isomorph (als angeordnete Gruppe) zu einer nicht-trivialen Untergruppe von $(\mathbb{R}, +, 0)$ ist.

Wenn v eine Bewertung ist, dann ist die Menge

$$\mathcal{O}_v := \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$$

ein Bewertungsring von K.
(Zur Erinnerung: Das bedeutet, dass für alle $x \in K^\times, x \in \mathcal{O}$ oder $x^{-1} \in \mathcal{O}$ gilt.)

Durch diese Definition von $\mathcal{O}_v$ ist sofort ersichtlich, dass die Gruppe $\mathcal{O}_v^\times$ der Einheiten von $\mathcal{O}$ durch

$$\mathcal{O}_v^\times = \{x \in K \mid v(x) = 0\}$$

und die Menge der Nicht-Einheiten durch

$$\mathfrak{m}_v = \{x \in K \mid v(x) > 0\}$$

gegeben ist.
Ebenso wird durch die Definition von $\mathcal{O}_v$ und $\mathfrak{m}_v$ sofort klar, dass ein $x \in K$ genau dann in $\mathcal{O}_v$ liegt, wenn $x^{-1} \notin \mathfrak{m}_v$ gilt. Dies gilt allgemein für Bewertungsringe.
$\mathfrak{m}_v$ ist das (einzige) maximale Ideal von $\mathcal{O}_v$, und wir nennen

$$\overline{K}_v := \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$$

den ***Restklassenkörper*** von v.

Jede Bewertung v auf K bestimmt also einen Bewertungsring $\mathcal{O}_v$ von K.
Umgekehrt bestimmt jeder Bewertungsring $\mathcal{O}$ von K eine Bewertung w auf K mit $\mathcal{O} = \mathcal{O}_w$. (siehe [E-P] 2.1.2)
Zwei Bewertungen $v_i : K \twoheadrightarrow \Gamma_i \cup \{\infty\}$ $(i = 1{,}2)$ werden äquivalent genannt, wenn sie den gleichen Bewertungsring auf K definieren, also wenn $\mathcal{O}_{v_1} = \mathcal{O}_{v_2}$ gilt.
Zwei Bewertungen $v_i : K \twoheadrightarrow \Gamma_i \cup \{\infty\}$ sind dabei genau dann äquivalent, wenn es einen ordnungstreuen Isomorphismus $\varphi : \Gamma_1 \mapsto \Gamma_2$ gibt, mit $\varphi \circ v_1 = v_2$. (siehe [E-P] 2.1.3)

Wir können also insgesamt sagen, dass die Bewertungsringe auf K den Bewertungen v von K bis auf einen Ordnungs-Isomorphismus der Wertegruppe eins zu eins entsprechen.

Wir schreiben $(K{,}v)$ für einen Körper K mit einer Bewertung v auf K und nennen K einen bewerteten Körper.

Ähnlich wie bei Beträgen werden die Begriffe "Cauchy-Folge“ und "Konvergenz“ auch bezüglich Bewertungen definiert (siehe [E-P] Seite 50).

Analog zu Beträgen wird ein bewerteter Körper $(K{,}v)$ dann ***vollständig*** genannt, wenn jede Cauchy-Folge in K (bezüglich v) konvergiert.

Und wie bei Beträgen auch, besitzt jeder bewertete Körper $(K{,}v)$ dann (bis auf Bewertungs-Isomorphie) genau eine bewertete Körpererweiterung $(\widehat{K}{,}\widehat{v})$, die vollständig, und in der K dicht ist. (siehe [E-P] 2.4.3)

$(\widehat{K}{,}\widehat{v})$ wird ***Komplettierung*** von $(K{,}v)$ genannt.
Wir schreiben auch $\widehat{(K{,}v)}$ für $(\widehat{K}{,}\widehat{v})$.

Betrachten wir an dieser Stelle zur Verinnerlichung des Begriffs der Bewertung nun einmal zwei einfache Beispiele für eine (nicht-triviale) Bewertung.
Als Körper K wählen wir den Rationalen Funktionenkörper $k(X)$ über einem beliebigen Körper k. Diese Wahl geschieht extra so, um den Bezug zu unserer eigentlichen Arbeit herzustellen (mit $k = \mathbb{R}$) und um im späteren Verlauf auf die Beispiele zurückführen zu können.

Beispiel 1:
Sei $p \in k[X]$ ein irreduzibles Polynom.
Wir definieren $v_p : k(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ durch
$v_p(0) := \infty$ und durch

$$v_p\left(p^\nu \frac{f}{g}\right) := \nu,$$

wobei $\nu \in \mathbb{Z}$ ist, und $f,g \in k[X]\backslash\{0\}$ nicht durch p teilbar sind.
Man rechnet leicht nach, dass v_p eine Bewertung ist, die trivial auf k ist. Das bedeutet $v|_k = 0$.
v_p wird ***p-adische Bewertung*** auf $k(X)$ genannt.
Für den Restklassenkörper $\overline{K}_{v_p}$ gilt $\overline{K}_{v_p} = k[X]/(p)$, wie man sich leicht überlegt.

Beispiel 2:
Wir definieren $v_\infty : k(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ durch
$v_\infty(0) := \infty$ und für Polynome $f,g \in k[X]\backslash\{0\}$ durch

$$v_\infty\left(\frac{f}{g}\right) := \deg g - \deg f.$$

Auch hier rechnet man leicht nach, dass v_∞ die Eigenschaften einer Bewertung erfüllt, und es gilt ebenfalls dass v_∞ trivial auf k ist.
v_∞ wird ***Grad-Bewertung*** genannt.
Man sieht leicht, dass $\overline{K}_{v_\infty} = k$ gilt.

Kommen wir nun zum Abschluss des Abschnitts über Bewertungstheorie, indem wir noch vier wichtige Resultate zitieren, die wir aber allesamt nicht beweisen werden. Für den Beweis wird lediglich auf den entsprechenden Satz in [E-P] verwiesen.

Das erste Resultat bezieht sich dabei direkt auf unsere eben gezeigten Beispiele.

Satz 1.6 ([E-P] 2.1.4)**:**
Sei k ein beliebiger Körper.
Jede nicht-triviale Bewertung auf $k(X)$, die trivial auf k ist, ist entweder die Grad-Bewertung v_∞ oder eine p-adische Bewertung für ein irreduzibles Polynom $p \in k[X]$.

Das nächste Resultat ist als ***Baer-Krull Darstellungssatz*** bekannt. Um es formulieren zu können brauchen wir noch einige Notationen.
Sei K ein Körper und $v : K \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ eine Bewertung auf K mit Bewertungsring$\mathcal{O}$.
Die Quotientengruppe $\overline{\Gamma} := \Gamma/2\Gamma$ ist auf kanonische Weise ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum.
Sei $\{\pi_i \mid i \in I\}$ eine Familie von Elementen aus $K^\times$ so, dass $\{\overline{v(\pi_i)} \mid i \in I\}$ eine $\mathbb{F}_2$-Basis von $\overline{\Gamma}$ ist. So eine Familie wird *quadratisches Repräsentantensystem* von K bezüglich v genannt.

Satz 1.7 ([E-P] 2.2.5)**:**
Es bezeichne $\mathcal{X}(K)$ und $\mathcal{X}(\overline{K}_v)$ die Menge aller Anordnungen von K beziehungsweise von $\overline{K}_v$. Weiter sei $\{\pi_i \mid i \in I\}$ ein quadratisches Repräsentantensystem von K. Dann existiert eine bijektive Beziehung

$$\{P \in \mathcal{X}(K) \mid \mathcal{O} \textit{ ist } P-\textit{konvex}\} \overset{\approx}{\longleftrightarrow} \{-1{,}1\}^I \times \mathcal{X}(\overline{K}_v)$$

zwischen den P-konvexen Anordnungen von K und dem direkten Produkt aus Abbildungen von I nach $\{-1{,}1\}$ und den Anordnungen von $\overline{K}$.

Eine nützliche Folgerung aus dem Baer-Krull Darstellungssatz ist

Korollar 1.8 ([E-P] 2.2.6)**:**
Ein Körper K besitzt genau dann eine nicht-archimedische Anordnung, wenn es auf K eine nicht-triviale Bewertung mit reellem Restklassenkörper $\overline{K}$ gibt.

Das nächste Resultat sagt etwas über den Restklassenkörper einer Komplettierung aus.

Satz 1.9 ([E-P] 1.3.4)**:**
Bei einer Rang1-Bewertung v gilt, dass der Restklassenkörper $\overline{K}_v$ von K und der Restklassenkörper $\overline{K}_{\widehat{v}}$ von $\widehat{K}$ isomorph zueinander sind.

Das nächste Resultat ist eines der wichtigsten in der Bewertungstheorie und ist als "Hensels Lemma“ bekannt.
Bevor wir dazu kommen, benötigen wir aber noch eine Definition.

Definition: Ein bewerteter Körper $(K,\mathcal{O})$ wird ***henselsch*** genannt, wenn $\mathcal{O}$ auf jeder algebraischen Körpererweiterung L/K eine eindeutige Fortsetzung hat.

Hensels Lemma 1.10 ([E-P] 4.1.3)**:**
Sei $(K,\mathcal{O})$ *ein bewerteter Körper und* $\mathfrak{m}$ *das maximale Ideal von* $\mathcal{O}$*.*
Weiter sei $f \mapsto \overline{f}$ *die Restklassenabbildung von* $\mathcal{O}[X]$ *nach* $\overline{K}[X]$ *mit* $\overline{K} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$.
Folgende Aussagen sind äquivalent:
(1) $(K,\mathcal{O})$ *ist henselsch;*
(2) Wenn $f \in \mathcal{O}[X]$ *eine einfache Nullstelle in* $\overline{K}$ *hat, d.h. es existiert ein* $a \in \mathcal{O}$ *mit* $\overline{f}(\overline{a}) = 0$ *und* $\overline{f'}(\overline{a}) \neq 0$*, dann hat* f *auch eine Nullstelle* $\alpha \in \mathcal{O}$ *und es gilt* $\overline{\alpha} = \overline{a}$*.*

Bemerkung: Hensels Lemma beinhaltet noch weitere Aussagen (in [E-P] 4.1.3 sind es insgesamt sieben), die alle zueinander äquivalent sind. Wir wollen an dieser Stelle aber nicht darauf eingehen, da wir im weiteren Verlauf nur diese beiden benötigen.

Und nun zum Schluss noch eine hinreichende Bedingung für einen henselschen Körper.

Satz 1.11 ([E-P] 1.3.1)**:**
Sei (K,v) *ein bewerteter Körper und* v *eine Rang1-Bewertung. Wenn* (K,v) *vollständig ist, dann ist* (K,v) *henselsch.*

1.3 Ein nützliches Lemma

Im letzten Abschnitt des ersten Kapitels beweisen wir ein allgemeingültiges Lemma, das weder mit Bewertungstheorie noch mit Reeller Algebra direkt etwas zu tun hat, weshalb es auch gesondert in einem extra Abschnitt aufgeführt wird.
Das Lemma beschreibt die Identität zweier, auf den ersten Blick total unterschiedlicher Polynome in einer Variablen über einem beliebigen Körper, die auch einen unterschiedlichen Grad zu haben scheinen. Es passt also nicht wirklich zu einem der ersten beiden Abschnitte.
Außerdem hat auch der Beweis nichts mit Methoden aus der Bewertungstheorie oder der Reellen Algebra zu tun.
Der Beweis an sich ist zwar nicht schwer und erfordert keine Voraussetzungen aus speziellen Gebieten, er ist aber trotzdem relativ lang und mit zwei Induktionen und einigem Rechnen mit Binominialkoeffizienten und Polynomen ziemlich technisch, nicht trivial und vor allem zum Lesen und Aufschreiben aufwändig.
Dies und die Tatsache, dass eine direkte Folgerung aus dem Lemma für uns im weiteren Verlauf der Arbeit nicht unwichtig sein und des Öfteren zitiert wird, liefert also durchaus eine Berechtigung dafür, dass das Lemma beziehungsweise der Beweis hier extra aufgeführt wird.

Sei also F ein beliebiger Körper und $d \in \mathbb{N}$ beliebig.

Lemma 1.12:
Für eine Unbestimmte X und für $d \in \mathbb{N}$ gilt:
$d!X = \sum\limits_{i=0}^{d-1} (-1)^{d-1-i} \binom{d-1}{i} \left[(X+i)^d - i^d\right]$.

Beweis: Sei $Q(X) \in F[X]$ ein beliebiges Polynom.
Wir definieren $\Delta Q(X) := Q(X+1) - Q(X)$
und für $e = 2{,}3, \ldots$ schreiben wir $\Delta^e Q(X) := \Delta(\Delta^{e-1} Q(X))$ für die e-te Differenz von Q.
Sei nun $Q(X) = X^d$.
(i) Wir zeigen durch Induktion über e, dass

$$\Delta^e X^d = \sum_{i=0}^{e} (-1)^{e-i} \binom{e}{i} (X+i)^d \text{ gilt.}$$

Induktionsanfang: $e = 1$
$\sum\limits_{i=0}^{1} (-1)^{1-i} \binom{1}{i} (X+i)^d = -X^d + (X+1)^d = (X+1)^d - X^d = \Delta X^d$
Induktionsvoraussetzung: $\Delta^e X^d = \sum\limits_{i=0}^{e} (-1)^{e-i} \binom{e}{i} (X+i)^d$.
Induktionsschluss: $e \Rightarrow e+1$
Zu zeigen: $\Delta^{e+1} X^d = \sum\limits_{i=0}^{e+1} (-1)^{e+1-i} \binom{e+1}{i} (X+i)^d$
$\Delta^{e+1} X^d = \Delta(\Delta^e X^d)$.
$\overset{IV}{=} \Delta \left(\sum\limits_{i=0}^{e} (-1)^{e-i} \binom{e}{i} (X+i)^d \right)$
$= \sum\limits_{i=0}^{e} (-1)^{e-i} \binom{e}{i} (X+1+i)^d - \sum\limits_{i=0}^{e} (-1)^{e-i} \binom{e}{i} (X+i)^d$
$= \sum\limits_{i=0}^{e} (-1)^{e-i} \binom{e}{i} (X+1+i)^d + \sum\limits_{i=0}^{e} (-1)^{e+1-i} \binom{e}{i} (X+i)^d$
$= \sum\limits_{j=1}^{e+1} (-1)^{e+1-j} \binom{e}{j-1} (X+j)^d + \sum\limits_{i=0}^{e} (-1)^{e+1-i} \binom{e}{i} (X+i)^d$
(mit Indexverschiebung: $j = i+1$)
$= (X+e+1)^d + \sum\limits_{j=1}^{e} (-1)^{e+1-j} \binom{e}{j-1} (X+j)^d + (-1)^{e+1} X^d + \sum\limits_{i=1}^{e} (-1)^{e+1-i} \binom{e}{i} (X+i)^d$
$= (-1)^{e+1} X^d + \sum\limits_{i=1}^{e} (-1)^{e+1-i} \left[\binom{e}{i-1} + \binom{e}{i}\right] (X+i)^d + (X+e+1)^d$
$= (-1)^{e+1} X^d + \sum\limits_{i=1}^{e} (-1)^{e+1-i} \binom{e+1}{i} (X+i)^d + (X+e+1)^d$
$= \sum\limits_{i=0}^{e+1} (-1)^{e+1-i} \binom{e+1}{i} (X+i)^d$
Somit ist (i) für alle $e \in \mathbb{N}$ gezeigt, und wir können $e = d-1$ setzen. Daraus erhalten

wir

$$\Delta^{d-1}X^d = \sum_{i=0}^{d-1}(-1)^{d-1-i}\binom{d-1}{i}(X+i)^d. \tag{1.12.1}$$

(ii) Als nächstes zeigen wir durch Induktion über $e = 1,\ldots,d-1$, dass

$$\Delta^e X^d = d\cdot(d-1)\cdot\ldots\cdot(d-e+1)\cdot X^{d-e} + p(X) \text{ gilt,}$$

$$\text{für ein } p(X)\in F[X] \text{ mit} \deg p < (d-e).$$

Induktionsanfang: $e = 1$
$\Delta X^d = (X+1)^d - X^d$
$= \sum\limits_{i=0}^{d}\binom{d}{i}X^{d-i} - X^d$
$= X^d + d\cdot X^{d-1} + = \sum\limits_{i=2}^{d}\binom{d}{i}X^{d-i} - X^d$
$= d\cdot X^{d-1} + \sum\limits_{i=2}^{d}\binom{d}{i}X^{d-i}$ und $p(X) := \sum\limits_{i=2}^{d}\binom{d}{i}X^{d-i}$
Induktionsvoraussetzung: für $e\in\{1,\ldots,d-2\}$ gilt
$\Delta^e X^d = d\cdot(d-1)\cdot\ldots\cdot(d-e+1)\cdot X^{d-e} + p(X)$ für ein $p(X)\in F[X]$ mit $\deg p < (d-e)$.

Induktionsschluss: $e \Rightarrow e+1$
Zu zeigen: $\Delta^{e+1}X^d = d\cdot(d-1)\cdot\ldots\cdot(d-e)\cdot X^{d-e-1} + q(X)$ für ein $q(X)\in F[X]$ mit $\deg q < (d-e-1)$.

$\Delta^{e+1}X^d = \Delta(\Delta^e X^d)$
$\overset{IV}{=} \Delta(d\cdot(d-1)\cdot\ldots\cdot(d-e+1)\cdot X^{d-e} + p(X))$ und $\deg p < (d-e)$
$= (d\cdot(d-1)\cdot\ldots\cdot(d-e+1)\cdot(X+1)^{d-e} + p(X+1))$
$\quad - (d\cdot(d-1)\cdot\ldots\cdot(d-e+1)\cdot X^{d-e} + p(X))$
$= d\cdot(d-1)\cdot\ldots\cdot(d-e+1)\left[(X+1)^{d-e} - X^{d-e}\right] + p(X+1) - p(X)$
$= d\cdot(d-1)\cdot\ldots\cdot(d-e+1)\left[(X+1)^{d-e} - X^{d-e}\right] + q_1(X)$ mit $q_1(X) := p(X+1) - p(X)$
$\deg q_1 \le \deg p - 1 < d-e-1$ (Da $p(X+1)$ und $p(X)$ den gleichen Grad und den gleichen Leitkoeffizient haben.)
$= d\cdot(d-1)\cdot\ldots\cdot(d-e+1)\left[\sum\limits_{i=0}^{d-e}\binom{d-e}{i}X^{d-e-i} - X^{d-e}\right] + q_1(X)$
$= d\cdot(d-1)\cdot\ldots\cdot(d-e+1)\left[X^{d-e} + (d-e)X^{d-e-1} + \sum\limits_{i=2}^{d-e}\binom{d-e}{i}X^{d-e-i} - X^{d-e}\right]$
$\quad + q_1(X)$
$= d\cdot(d-1)\cdot\ldots\cdot(d-e+1)\left[(d-e)X^{d-e-1} + q_2(X)\right] + q_1$ mit $q_2(X) := \sum\limits_{i=2}^{d-e}\binom{d-e}{i}X^{d-e-i}$
$= d\cdot(d-1)\cdot\ldots\cdot(d-e+1)\cdot(d-e)\cdot X^{d-e-1} + \underbrace{d\cdot(d-1)\cdot\ldots\cdot(d-e+1)q_2(X) + q_1(X)}_{=:q(X)}$
$= d\cdot(d-1)\cdot\ldots\cdot(d-e+1)\cdot(d-e)\cdot X^{d-e-1} + q(X)$ und $\deg q < d-e-1$

Wir haben somit (ii) für $e = 1, \ldots, d-1$ gezeigt. Wir können also $e = d-1$ setzen, woraus $\Delta^{d-1}X^d = d \cdot (d-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot X^1 + p(X)$ mit $\deg p(X) < 1$ folgt.
Also gilt

$$\Delta^{d-1}X^d = d!X + h \text{ für ein } h \in F. \tag{1.12.2}$$

Wenn man (1.12.1) und (1.12.2) gleichsetzt, ergibt sich

$$\sum_{i=0}^{d-1}(-1)^{d-1-i}\binom{d-1}{i}(X+i)^d = d!X + h \tag{1.12.3}$$

für ein $h \in F$.
Den Wert h erhält man, wenn man in (1.12.3) $X = 0$ setzt. Es gilt dann
$h = \sum\limits_{i=0}^{d-1}(-1)^{d-1-i}\binom{d-1}{i}i^d$
In (1.12.3) eingesetzt, folgt

$$\begin{aligned}
d!X &= \sum_{i=0}^{d-1}(-1)^{d-1-i}\binom{d-1}{i}(X+i)^d - h \\
&= \sum_{i=0}^{d-1}(-1)^{d-1-i}\binom{d-1}{i}(X+i)^d - \sum_{i=0}^{d-1}(-1)^{d-1-i}\binom{d-1}{i}i^d \\
&= \sum_{i=0}^{d-1}(-1)^{d-1-i}\binom{d-1}{i}\left[(X+i)^d - i^d\right]
\end{aligned}$$

□

2 Summen $2m$-ter Potenzen

Nachdem wir nun einen kleinen Einblick in die Grundlagen der Reellen Algebra und der Bewertungstheorie erhalten haben, können wir mit dem eigentlichen Thema der Arbeit, den Summen $2m$-ter Potenzen beginnen.

In den ersten drei Abschnitten dieses Kapitels wird dabei, wie in der Einleitung auf Seite 3 erwähnt, basierend auf [P-D] kontinuierlich auf unser erstes Ziel, die Verallgemeinerung des Satzes von Schmüdgen (Satz 2.31), hin gearbeitet. Dieser wird dann in Abschnitt 2.4 bewiesen.
Der zweite wichtige Satz dieses Kapitels, der sogenannte Charakterisierungssatz II (Satz 2.29), der in Abschnitt 2.3 bewiesen und im Beweis für die Verallgemeinerung von Schmüdgen benutzt wird, ist dann Ausgangspunkt für die weitere Vorgehensweise in Kapitel 4.

2.1 Präordnungen und Semiordnungen der Stufe $2m$

Die grundlegenden Begriffe für die Theorie der Summen $2m$-ter Potenzen führen wir ganz allgemein über einem beliebigen Ring ein.

Sei A ein beliebiger kommutativer Ring mit 1 und $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

Definition 2.1: Eine Teilmenge $T \subseteq A$ wird ***Präordnung der Stufe 2m*** genannt, wenn folgendes gilt:

$$T + T \subseteq T,\ T \cdot T \subseteq T,\ A^{2m} \subseteq T,\ \text{und} - 1 \notin T.$$

Ist T eine Präordnung der Stufe $2m$, dann nennen wir eine Menge $M \subseteq A$ ein ***T-Modul***, wenn

$$1 \in M,\ M + M \subseteq M,\ TM \subseteq M,\ \text{und}\ -1 \notin M \text{ gilt.}$$

In Zukunft wird T meistens $\sum^{2m} := \sum A^{2m}$ sein, wobei wir dann anstatt von einem T-Modul einfach von einem ***Modul der Stufe 2m*** sprechen.

Bemerkung 2.2: Aus Lemma 1.12 folgt (mit $d = 2m$) für alle $a \in A$:

$$(2m)!a \in \sum^{2m} - \sum^{2m}.$$

Es gibt also zu jedem $a \in A$ ein $n \in \mathbb{N}$ und $q_1, q_2 \in \sum^{2m}$ mit $na = q_1 - q_2$.

Lemma 2.3:
Wenn S ein maximales T-Modul ist, dann gilt $S \cup -S = A$, und $S \cap -S$ ist ein Primideal von A.

Beweis: (i) Wir zeigen $S \cup -S = A$.
Sei $a \in A$. Annahme: $a \notin S \cup -S$.
Dann gilt $S \subsetneq S - aT$ und $S \subsetneq S + aT$.
Wegen der Maximalität von S können diese beide Mengen keine T-Moduln sein. Deshalb ist -1 in beiden Mengen enthalten, da alle anderen Eigenschaften eines T-Moduls erfüllt werden.
Es gilt also $-1 = s_1 + t_1 a$ und $-1 = s_2 - t_2 a$ für gewisse $t_1, t_2 \in T$ $s_1, s_2 \in S$.
Daraus folgt $0 = t_1(t_2 a) + t_2(-t_1 a) = t_1 + t_2 + t_1 s_2 + t_2 s_1$ und somit ist
$-t_1 = t_2 + t_1 s_2 + t_2 s_1 \in S$
Wähle $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ und $q_1, q_2 \in \sum^{2m} \subseteq T$ mit $na = q_1 - q_2$, was nach Bemerkung 2.2 geht.
Es gilt $-n = n \cdot (s - 1 + t_1 a) = ns_1 + t_1 \cdot (q_1 - q_2) = ns_1 + t_1 q_1 + q_2 \cdot (-t_1) \in S$
Daraus folgt $-1 = (-n) + (n-1) \in S$, was ein Widerspruch ist.

(ii) Sei $\mathfrak{p} = S \cap -S$. Wir zeigen, dass $\mathfrak{p}$ ein Ideal ist.
$\mathfrak{p} + \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$ ist klar. Wir müssen also nur noch $A\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$ zeigen.
Sei $a \in A, b \in \mathfrak{p}$.
Wir wählen (wieder nach Bemerkung 2.2) $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ und $q_1, q_2 \in \sum^{2m} \subseteq T$ mit
$na = q_1 - q_2$.
Damit gilt $nab \subseteq T\mathfrak{p} - T\mathfrak{p}$, und mit $\pm T\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}$ (was mit der Definition von $\mathfrak{p}$ sofort klar ist) folgt $nab \subseteq \mathfrak{p}$.
Annahme: $ab \notin S$. Dann gilt $ab \in -S$.
Daraus folgt $ab = nab + (n-1)(-ab) \in S$ was ein Widerspruch zur Annahme ist.
Also gilt: $ab \in S$. Genauso zeigt man $ab \in -S$.
Insgesamt erhalten wir $ab \in S \cap -S = \mathfrak{p}$.

(iii) Als Letztes zeigen wir noch, dass $\mathfrak{p}$ prim ist:
Es gilt $\mathfrak{p} \neq A$, da $-1 \notin S \supseteq \mathfrak{p}$ und daher $-1 \notin \mathfrak{p}$ gilt.
Seien $a, b \in \mathfrak{p}$, $b \notin \mathfrak{p}$, zu zeigen ist $a \in \mathfrak{p}$.
OBdA sei $b \notin S$. Daraus folgt $S \subsetneq Tb + S$, woraus $-1 \in Tb + S$ folgt (Wegen der Maximalität von S).
Daraus folgt $-a^{2m} = -1 \cdot a^{2m} \in Tba^{2m} + S = Ta^{2m-1}(ab) + S \subseteq \mathfrak{p} + S \subseteq S$.
Dies ist äquivalent zu $a^{2m} \in -S$, weshalb $a^{2m} \in \mathfrak{p}$ gilt (mit $a^{2m} \in A^{2m} \subseteq T \subseteq S$).

Das bedeutet gerade: $a^{2^m} \in \mathfrak{p}$.
$a \in \mathfrak{p}$ folgt nun, durch m-fache Anwendung der folgenden Behauptung:

$c^2 \in \mathfrak{p}$ impliziert c $\in \mathfrak{p}$.

Beweis:
Annahme: $c \notin \mathfrak{p}$
OBdA sei $c \notin S$. Daraus folgt $S \subsetneq S + Tc$, und wegen der Maximalität von S gilt $-1 = s + tc$ für gewisse $t \in T, s \in S$.
Umgestellt ergibt dies $s + 1 = -tc$ und durch Quadrieren folgt $(1 + s)^2 = t^2c^2 \in \mathfrak{p}$.
Daraus folgt:
$s^{2m} = (1 - (1 + s))^{2m} = 1 - 2m(1 + s) + \sum_{i=2}^{2m} \binom{2m}{i}(-1)^i(1 + s)^i \in 1 - 2m(1 + s) + \mathfrak{p}$.
Daraus wiederum folgt $1 + (\underbrace{2m(s + 1) - 2}_{=(2m-2)+2ms\in S} + s^{2m}) \in (1 + S) \cap \mathfrak{p} = \emptyset$, was einen Widerspruch darstellt.
$\big((1 + S) \cap \mathfrak{p} = \emptyset$, da ansonsten s_1,$s_2 \in S$ existieren würden, mit $1 + s_1 = -s_2$, und das würde $-1 = s_1 + s_2 \in S$ bedeuten, was ein Widerspruch wäre.$\big)$ $\square$

Definition 2.4: Ein Modul S der Stufe $2m$ in A wird ***Semiordnung der Stufe 2m*** genannt, wenn $S \cup -S = A$ gilt, und $S \cap S$ ein Primideal von A ist.

Bemerkung 2.5: Jedes Modul M der Stufe $2m$ ist in einer Semiordnung der Stufe $2m$ enthalten. (Mit Zorn´s Lemma, und der Tatsache, dass jedes maximale Modul der Stufe $2m$ nach Definition 2.4 eine Semiordnung der Stufe $2m$ ist.)

An dieser Stelle überlegen wir uns, was es im Spezialfall $A = \mathbb{R}$ überhaupt für Semiordnungen der Stufe $2m$ geben kann.

Lemma 2.6:
In $\mathbb{R}$ gibt es nur eine Semiordnung S der Stufe $2m$ und zwar $S = \mathbb{R}^2$.

Beweis: In $\mathbb{R}$ gilt $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{2m}$. Deshalb folgt $\mathbb{R}^2 \subseteq S$ für jede Semiordnung S der Stufe $2m$ in $\mathbb{R}$.
Angenommen es existiert ein $x \in S$ mit $x \notin \mathbb{R}^2$, dann gilt $-x \in \mathbb{R}^2 \subseteq S$. Dann gilt $x \in S \cap -S = \{0\}$, da $\{0\}$ das einzige Primideal in $\mathbb{R}$ ist. Also gilt $x = 0 \in \mathbb{R}^2$, was ein Widerspruch ist.
Also gilt insgesamt $S = \mathbb{R}^2$. $\square$

Notation: Sei M ein Modul der Stufe $2m$. Wir schreiben:

$$\mathcal{Y}_M^{2m}(A) := \{S \subseteq A \mid S \text{ ist Semiordnung der Stufe } 2m, \text{ und } M \subseteq S\}.$$

Im Fall $M = \sum^{2m}$ schreiben wir auch $\mathcal{Y}^{2m}(A)$, anstatt von $\mathcal{Y}^{2m}_M(A)$.
Wenn klar ist, welcher Ring A gemeint ist, schreiben wir auch einfach $\mathcal{Y}^{2m}_M$.

Lemma 2.7:
Sei A ein Integritätsring mit $\operatorname{Quot} A = K$. Die Semiordnungen $S' \in \mathcal{Y}^{2m}(K)$ der Stufe $2m$ entsprechen bijektiv den Semiordnungen $S \in \mathcal{Y}^{2m}(A)$ der Stufe $2m$ mit $S \cap -S = (0)$, über die Abbildungen $S' \mapsto S := S' \cap A$ und

$$S \mapsto S' := \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a,b \in A,\ ab^{2m-1} \in S,\ b \neq 0 \right\}. \tag{2.7.1}$$

Beweis: (i) Sei $S' \in \mathcal{Y}^{2m}(K)$. Wir zeigen: $S := S' \cap A \in \mathcal{Y}^{2m}(A)$ und $S \cap -S = (0)$.

- $1 \in S$:
  $1 \in S' \cap A =: S$
- $S + S \subseteq S$:
  $S + S = (S' \cap A) + (S' \cap A) \subseteq (S' + S') \cap A \subseteq S' \cap A = S$
- $A^{2m} S \subseteq S$:
  $A^{2m} S \subseteq K^{2m} S \cap A \subseteq K^{2m} S' \cap A \subseteq S' \cap A = S$
- $-1 \notin S$
  Dies ist klar, denn wäre $-1 \in S$, würde, wegen $S \subseteq S'$, $-1 \in S'$ folgen.
- $S \cap -S = (0)$:
  $S \cap -S \subseteq S' \cap -S' = (0)$. ($S' \cap -S'$ ist nach Definition 2.4 Primideal im Körper K und somit das Nullideal)
- $S \cup -S = A$:
  Sei $x \in A$ mit $x \notin S$.
  Daraus folgt $x \notin S'$ und da S' Semiordnung ist, gilt dann $-x \in S'$. Daraus folgt $-x \in S' \cap A = S$.

(ii) Sei $S \in \mathcal{Y}^{2m}(A)$ und S' definiert wie in (2.7.1)
Wir zeigen: $S' \in \mathcal{Y}^{2m}(K)$.

- $1 \in S'$:
  $1 = \frac{1}{1} \in S'$, da $1 \cdot 1^{2m-1} = 1 \in S$.
- $S' + S' \subseteq S'$:
  Aus $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in S'$ folgt, per Definition von S', ab^{2m-1}, $cd^{2m-1} \in S$.
  Daraus folgt $(ad + cb)(bd)^{2m-1} = ab^{2m-1}d^{2m} + cd^{2m-1}b^{2m} \in S$.
  Wiederum per Definition folgt $\frac{ad+cb}{bd} \in S'$.
  Daraus folgt $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in S'$.

- $K^{2m}S' \subseteq S'$:
  Seien $\frac{x^{2m}}{y^{2m}} \in K^{2m}, \frac{a}{b} \in S'$ (d.h $ab^{2m-1} \in S$).
  Es gilt $x^{2m}a\left(y^{2m}\right)^{2m-1}b^{2m-1} = x^{2m}\left(y^{2m-1}\right)^{2m-1}\left(ab^{2m-1}\right) \in S$.
  Daraus folgt $\frac{x^{2m}a}{y^{2m}b} = \frac{x^{2m}}{y^{2m}} \cdot \frac{a}{b} \in S'$.

- $-1 \notin S'$:
  Annahme: $-1 \in S'$.
  Dann gilt $-1 = \frac{a}{b}$ für gewisse $a,b \in A,\ b \neq 0$ mit $ab^{2m-1} \in S$.
  Daraus folgt $S \ni ab^{2m-1} = -b^{2m} \in -S$ woraus $b \in S \cap -S = (0)$, ein Widerspruch, folgt.

- $S' \cap -S' = K$:
  Seien $\frac{a}{b} \in K$, und $\frac{a}{b} \notin S'$.
  Daraus folgt $ab^{2m-1} \notin S$ und somit $ab^{2m-1} \in -S$.Daraus folgt $-ab^{2m-1} \in S$.
  Nach Definition gilt deshalb $\frac{-a}{b} \in S'$.
  Daraus folgt $-\frac{a}{b} \in S'$.

- $S' \cap -S' = (0)$: (Das Nullideal ist das einzige Primideal im Körper K)
  Sei $\frac{a}{b} \in S' \cap -S'$. (Also insbesondere $b \neq 0$ nach (2.7.1))
  Es gilt $ab^{2m-1} \in S \cap -S = (0)$ woraus $a = 0$ folgt(da A Integritätsring ist und $b \neq 0$ gilt).
  Daraus folgt $\frac{a}{b} = 0$.

(iii) Sei $S \in \mathcal{Y}^{2m}(A)$ mit $S \cap -S = (0)$.
Wir zeigen: $\left\{\frac{a}{b} \mid a,b \in A, ab^{2m} \in S,\ b \neq 0\right\} \cap A = S$.

- $\supseteq$: klar

- $\subseteq$: Angenommen es existieren $a,b \in A\backslash\{0\}$ mit $ab^{2m-1} \in S$ und $\frac{a}{b} \in A\backslash S$, dann gilt $\frac{a}{b} \in -S$. Daraus folgt $ab^{2m-1} = b^{2m} \cdot \frac{a}{b} \in -S$.
  Daraus folgt $ab^{2m-1} \in S \cap -S = (0)$, woraus $a = 0$ oder $b = 0$ folgt, was ein Widerspruch zur Annahme ist.

(iv) Sei $S' \in \mathcal{Y}^{2m}(K)$.
Wir zeigen: $M := \left\{\frac{a}{b} \mid a,b \in A, ab^{2m} \in S' \cap A,\ b \neq 0\right\} = S'$.

- $\supseteq$: Sei $\frac{a}{b} \in S'$. Daraus folgt $ab^{2m-1} = b^{2m} \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \in S' \cap A$.

- $\subseteq$: Sei $\frac{a}{b} \in M$, weshalb $ab^{2m-1} \in S'$ gilt. Daraus folgt $\frac{a}{b} = \left(\frac{1}{b}\right)^{2m} \cdot ab^{2m-1} \in S'$.

$\square$

Notation: Sei M ein Modul der Stufe $2m$, und $S \in \mathcal{Y}_M^{2m}(A)$. Wir schreiben:

$$\alpha_s: \ A \to A/\mathfrak{p} = \overline{A},$$

für die kanonische Abbildung von A in den Restklassenkörper $\overline{A}$,
wobei $\mathfrak{p} = S \cap -S$ ist. Außerdem schreiben wir

$$\overline{S} = \{a + \mathfrak{p} \ |a \in S\} \in \mathcal{Y}_{\overline{M}}^{2m}(\overline{A}),$$

für die Restklassenmenge von S, die auf kanonische Weise eine Semiordnung der Stufe $2m$ in $\overline{A}$ ist. Es gilt: $\overline{S} \cap -\overline{S} = (0)$. Nach Lemma 2.7 ist $\overline{S}$ eine Restriktion einer Semiordnung S' der Stufe $2m$ in $F = \operatorname{Quot} \overline{A}$. Wir definieren $S^+ = S \backslash (-S)$, dann gilt für alle $a \in A$,

$$a \in S^+ \Leftrightarrow \alpha_s(a) >_{S'} 0.$$

Satz 2.8 (Schwacher Positivstellensatz)**:**
Für $f \in A$, sind folgende Aussagen äquivalent:
(1) $f \in S^+$ für alle $S \in \mathcal{Y}_M^{2m}(A)$;
(2) $\sigma f = 1 + \mu$, für gewisses $\sigma \in \sum^{2m}$ und $\mu \in M$;
(3) $(1 + \sigma) f = 1 + \mu$, für gewisses $\sigma \in \sum^{2m}$ und $\mu \in M$;

Beweis: (1)$\Rightarrow$(2): (Beweis durch Kontraposition) Wenn $f \sum^{2m} \cap (1 + M) = \emptyset$ gilt, dann ist $M' = M - f \sum^{2m}$ ein Modul der Stufe $2m$, da dann $-1 \notin M'$ gilt (die anderen Eigenschaften sind klar).
Sei $S \supseteq M'$ Semiordnung der Stufe $2m$ (existiert nach Bemerkung 2.5).
Es gilt dann $S \in \mathcal{Y}_M^{2m}(A)$und $-f \in M'$, woraus $f \notin S^+$ folgt.

(2)$\Leftrightarrow$(3): "$\Leftarrow$": trivial
"$\Rightarrow$": Sei $\sigma f = 1 + \mu$ und $nf = q_1 - q_2$ für gewisse $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $q_1, q_2 \in \sum^{2m}$ (Nach Bemerkung 2.2). Es gilt:

$$\begin{aligned}(1 + ((n-1) + \sigma + q_2\sigma))f &= nf + (1 + \mu) + q_2(1 + \mu) \\ &= 1 + (q_1 + \mu + q_2\mu) \in 1 + M\end{aligned}$$

Mit $q := (n-1) + \sigma + q_2\sigma \in \sum^{2m}$ gilt dann $1 + q \in 1 + M$, wie gewünscht.

(2)$\Rightarrow$(1): Aus $\sigma f = 1 + \mu$ folgt $-1 = \mu - \sigma f$, woraus $\sigma f \notin -S$ folgt (sonst wäre $-1 \in S$). Daraus folgt $\sigma f \in S^+$.
Daraus folgt $f \in S^+$ (da aus $-f \in -S$, $\sigma f \in -S$ folgen würde). $\square$

Als nächstes führen wir den Begriff des *archimedischen* Moduls der Stufe $2m$ ein, der im weiteren Verlauf eine entscheidende Rolle spielen wird.

Definition 2.9: Sei M ein Modul der Stufe $2m$. M wird ***archimedisch*** genannt, wenn für jedes $a \in A$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, mit $n - a \in M$.

Satz 2.10:
Sei S eine archimedische Semiordnung der Stufe $2m$. Dann gibt es einen (Ring-)Homomorphismus $\phi : A \to \mathbb{R}$ mit $\phi(S) \subseteq \mathbb{R}^2$ und
$\ker \phi = \{a \in A \mid 1 \pm ka \in S$, *für alle* $k \in \mathbb{N}\}$.

Beweis: Für $a \in A$ definieren wir

$$Q_a := \left\{ \frac{r}{s} \;\middle|\; (r,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+ \text{ mit } r - sa \in S \right\}.$$

$Q_A \neq \emptyset$, da S Archimedisch ist.
Setze $\phi(a) := \inf Q_a$, wobei das Infimum bezüglich der einzigen Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$ gemeint ist.
Wir zeigen, dass ϕ wohldefiniert ist, d.h. dass für jedes Q_a das Infimum existiert, und dass ϕ ein Homomorphismus mit den genannten Eigenschaften ist.

(i) Für jedes $a \in A$ ist Q_a beschränkt (was bedeutet, dass das Infimum existiert):
Sei $\frac{r}{s} \in Q_a$ beliebig; d.h. $r - as \in S$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n + a \in S$.
Dann gilt $r + sn = (r - as) + s(n + a) \in S \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$.
Daraus folgt $\frac{r}{s} \geq -n$.

(ii) Für alle $a,b \in A$ gilt: $\phi(a) + \phi(b) = \phi(a + b)$:
Seien $\frac{r}{s} \in Q_a$ und $\frac{u}{v} \in Q_b$ beliebig; also $r - sa$, $u - vb \in S$ und $s,v \in \mathbb{N}^+$.
Daraus folgt $(rv + us) - sv(a + b) = v(r - sa) + s(u - vb) \in S$,
was, per Definition von Q_{a+b}, $\frac{rv+us}{sv} \in Q_{a+b}$ bedeutet,
woraus $\phi(a + b) \leq \frac{rv+us}{sv} = \frac{r}{s} + \frac{u}{v}$ folgt.
Daraus folgt (mit der Eigenschaft des Infimum)

$$\phi(a + b) \leq \phi(a) + \phi(b). \tag{2.10.1}$$

Wenn wir in (2.10.1) a durch $-a$ und b durch $a + b$ ersetzen, erhalten wir

$$\phi(b) \leq \phi(-a) + \phi(a + b). \tag{2.10.2}$$

Als nächstes zeigen wir, dass $-\phi(a) = \phi(-a)$ gilt.
Seien $\frac{r}{s} \in Q_a$ und $\frac{u}{v} \in Q_{-a}$ beliebig; also $r - sa$, $u - v(-a) \in S$ und $s,v \in \mathbb{N}^+$.
Daraus folgt $rv + su = v(r - sa) + s(u + va) \in S \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$.
Daraus folgt $-\frac{r}{s} \leq \frac{u}{v}$, woraus $-\phi(a) \leq \phi(-a)$ folgt.
Dass $-\phi(a) \geq \phi(-a)$ gilt, zeigen wir durch Widerspruch.
Annahme: $-\phi(a) < \phi(-a)$.
Wähle $(u,v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$ mit $-\phi(a) < \frac{u}{v} < \phi(-a)$.

Daraus folgt $u + va = u - v(-a) \notin S$ und $-(u + va) = -u - va \notin S$ (folgt aus $-\frac{u}{v} < \phi(a)$), was ein Widerspruch ist.
Also gilt $-\phi(a) \geq \phi(-a)$ und insgesamt

$$\phi(-a) = -\phi(a). \tag{2.10.3}$$

Gleichung (2.10.3) eingesetzt in (2.10.2) ergibt $\phi(b) \leq -\phi(a) + \phi(a + b)$,
was äquivalent ist zu $\phi(a) + \phi(b) \leq \phi(a + b)$.
Zusammen mit (2.10.1) folgt die Behauptung.

(iii) $\phi(1) = 1$:
Aus $1 - 1 \cdot 1 = 0 \in S$ folgt $1 = \frac{1}{1} \in Q_1$. Daraus folgt $\phi(1) \leq 1$
Für alle $\frac{r}{s} \in Q_1$ gilt $r - s \in S$.
Daraus folgt $r \geq s$ und somit $\frac{r}{s} \geq 1$. Daraus folgt $\phi(1) \geq 1$
Also gilt insgesamt $\phi(1) = 1$.

(iv) $\phi(S) \subseteq \mathbb{R}^2$:
Sei $a \in S$, $\frac{r}{s} \in Q_a$ beliebig; d.h. $r - sa \in S$.
Daraus folgt $r = (r - sa) + sa \in S \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$,
was $(r,s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ bedeutet, woraus $\frac{r}{s} \geq 0$ folgt.
Daraus folgt $\phi(a) \geq 0$.

(v) Für alle $a,b \in A$ gilt $\phi(a) \cdot \phi(b) = \phi(a \cdot b)$:
Wir zeigen zunächst: Für alle $t \in \sum^{2m}$ und $a \in A$ gilt $\phi(ta) = \phi(t)\phi(a)$.
Sei $\frac{r}{s} \in Q_a$ beliebig; d.h. $r - sa \in S$.
Daraus folgt $rt - sat = t \cdot (r - sa) \in S$.
Mit (iv) folgt dann $\phi(rt - sat) \geq 0$.
Daraus folgt $r \cdot \phi(t) - s \cdot \phi(at) \geq 0$ (folgt durch mehrfache Anwendung von (ii), da $r,s \subseteq \mathbb{Z}$ und $-\phi(a) = \phi(-a)$).
Daraus folgt $\phi(at) \leq \frac{r}{s}\phi(t)$ und daraus $\phi(at) \leq \phi(a)\phi(t)$.
Wenn wir a durch $-a$ ersetzen, erhalten wir
$\phi(-at) \leq \phi(-a)\phi(t)$.
Mit (2.10.3) gilt dann $-\phi(at) \leq -\phi(a)\phi(t)$, woraus $\phi(at) \geq \phi(a)\phi(t)$ folgt.
Insgesamt folgt: $\phi(at) = \phi(a)\phi(t)$
Nun zeigen wir die Multiplikativität von ϕ für allgemeine $a,b \in A$.
Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $nb = t_1 - t_2$ für gewisse $t_1,t_2 \in \sum^{2m}$ (mit Bemerkung 2.2).

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
n \cdot \phi(ab) &\overset{\text{(ii)}}{=} \phi(nab) = \phi(at_1 - at_2) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \phi(at_1) - \phi(at_2) \\
&= \phi(a)\phi(t_1) - \phi(a)\phi(t_2) = \phi(a) \cdot (\phi(t_1 - t_2)) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \phi(a)\phi(t_1 - t_2) = \phi(a)\phi(nb) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \phi(a)\phi(a) \cdot n \cdot \phi(b) \\
&= n\phi(a)\phi(b)
\end{aligned}$$

Da $n \neq 0$ gilt, folgt $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$.

(vi) $\ker \phi = \{a \in A \mid 1 \pm ka \in S,\ \forall k \in \mathbb{N}\}$:
Für alle $a \in A$ mit $\phi(a) > 0$ gilt $a \in S$.
(Ansonsten wäre $-a \in S$, woraus aus (iv) $\phi(-a) \geq 0$ folgen würde, und daraus mit (2.10.3) $-\phi(a) \geq 0$. Daraus folgt $\phi(a) \leq 0$, ein Widerspruch)
Sei $a \in \ker \phi$.
Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N} : \phi(1 \pm ka) \overset{\text{(ii)}}{=} \phi(1) \pm k \cdot \underbrace{\phi(a)}_{=0} = \phi(1) \overset{\text{(iii)}}{=} 1 > 0$.

Daraus folgt $1 \pm ka \in S$.
Sei $1 \pm ka \in S$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Mit (iv) folgt $\phi(1 \pm ka) \geq 0$, woraus mit (ii) und (iii) $1 \pm k\phi(a) \geq 0$ folgt.
Für alle $k \in \mathbb{N}^+$ gilt dann $1 \geq |k\phi(a)|$.
Daraus folgt $\frac{1}{k} \geq |\phi(a)|$ was $\phi(a) = 0$ bedeutet.
Daraus folgt $a \in \ker \phi$ □

2.2 Semiordnungen der Stufe $2m$ auf Körpern

In diesem Abschnitt betrachten wir Semiordnungen der Stufe $2m$ auf Körpern.
Diese Verallgemeinerung bringt einige nützliche Aspekte mit sich.

Lemma 2.11:
Sei T eine Präordnung der Stufe $2m$ auf einem Körper K. Dann ist $\mathcal{O}(T) := \{x \in K \mid n \pm x \in T$ *für ein* $n \in \mathbb{N}\}$ *ein Ring.*

Beweis: Es ist klar, dass $0 \in \mathcal{O}(T)$ gilt.
Um zu zeigen, dass $\mathcal{O}(T)$ ein Ring ist, genügt es deshalb zu zeigen, dass $\mathcal{O}(T)$ abgeschlossen bezüglich Subtraktion und Multiplikation ist.
Wir zeigen zuerst die Abgeschlossenheit unter Subtraktion.

Seien $x,y \in \mathcal{O}(T)$. Das heißt es existieren $n_1,n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \pm x, n_2 \pm y \in T$.
Sei $n' := n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$.
Dann gilt $n' + (x-y) = (n_1 + x) + (n_2 - y) \in T + T \subseteq T$
und $n' - (x-y) = (n_1 - x) + (n_2 + y) \in T + T \subseteq T$.
Also gilt insgesamt $n' \pm (x-y) \in T$,
und somit folgt $(x-y) \in \mathcal{O}(T)$.
Um die Abgeschlossenheit unter Multiplikation zu zeigen,
seien $a,b \in \mathcal{O}(T)$, das heißt es existieren $r,s \in N$ mit $r \pm a$, $s \pm b \in T$.
Dann gilt $2(rs + ab) = (r+a)(s+b) + (r-a)(s-b) \in T$.
Daraus folgt $rs + ab = \frac{1}{2}[2(rs+ab)] = \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \cdot 2^{2m-1} \cdot 2(rs+ab) \in T$.
Genauso gilt $2(rs - ab) = (r-a)(s+b) + (r+a)(s-b) \in T$,
woraus analog zum vorherigen $rs - ab \in T$ folgt.
Mit der Definition von $\mathcal{O}(T)$ folgt $ab \in \mathcal{O}(T)$. $\square$

Satz 2.12:
Sei S eine Semiordnung der Stufe 2m auf dem Körper K. Dann ist

$$\mathcal{O}(S) := \{x \in K \mid n \pm x \in S \textit{ für gewisse } n \in \mathbb{N}\}$$

ein Bewertungsring von K mit maximalem Ideal

$$\mathfrak{m}(S) := \{x \in K \mid 1 \pm kx \in S \textit{ für alle } k \in \mathbb{N}\}.$$

Außerdem gilt $\overline{K} := \mathcal{O}(S)/\mathfrak{m}(S) \subseteq \mathbb{R}$ und $\overline{\mathcal{O}(S) \cap S} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Beweis: Sei $T := \sum K^{2m}$. Dann ist $\mathcal{O}(T) \subseteq \mathcal{O}(S)$, da $T \subseteq S$.
Sei $B \supseteq \mathcal{O}(T)$ ein Unterring von K, der in $\mathcal{O}(S)$ enthalten ist, und bezüglich dieser Eigenschaft maximal ist (So ein Ring existiert nach Zorn's Lemma, da $\mathcal{O}(T)$ nach Lemma 2.11 ein Ring ist, der die Eigenschaften erfüllt).
Wir zeigen $B = \mathcal{O}(S)$.

$B \cap S$ ist eine archimedische Semiordnung der Stufe $2m$ in B (archimedisch, da $B \subseteq \mathcal{O}(S)$).
Deshalb existiert nach Satz 2.10 ein Homomorphismus $\phi : B \to \mathbb{R}$
mit $\phi(B \cap S) \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\ker \phi = \{b \in B \mid 1 \pm kb \in S$, für alle $k \in \mathbb{N}\}$.
Sei $\mathfrak{p} := \ker \phi$. Wir zeigen, dass $B = B_{\mathfrak{p}}$ gilt.

Sei $b \in B$ und $c \in B \backslash \mathfrak{p}$. Dann gilt $\phi(c^{2m} = \phi(c)^{2m} > 0$.
Deshalb existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \cdot \phi(c)^{2m} \pm \phi(b) > 0$ (Da $\mathbb{R}$ archimedisch ist).
Da ϕ ein Homomorphismus ist, gilt $\phi(kc^{2m} \pm b) > 0$.
Daraus folgt $kc^{2m} \pm b \in \phi^{-1}(\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}) \subseteq S$.
Daraus folgt $k \pm bc^{-2m} = \left(\frac{1}{c}\right)^{2m} \cdot (kc^{2m} \pm b) \in S$.
Daraus folgt $b/c^{2m} \in \mathcal{O}(S)$.
Sei nun $x \in B_{\mathfrak{p}}$, also $x = \frac{a}{c}$ für ein $a \in B$ und ein $c \in B \backslash \mathfrak{p}$.

Weiter sei $b := ac^{2m-1}$. Es gilt $b \in B$
Daraus folgt $x = \frac{a}{c} = \frac{ac^{2m-1}}{c^{2m}} = \frac{b}{c^{2m}} \in \mathcal{O}(S)$.
Daraus folgt $B_\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{O}(S)$ und wegen der Maximalität von B bezüglich dieser Eigenschaft gilt somit $B_\mathfrak{p} \subseteq B$.
Durch die Definition von $B_\mathfrak{p}$ ist klar, dass $B \subseteq B_\mathfrak{p}$ gilt,
also folgt insgesamt $B_\mathfrak{p} = B$.

Als nächstes zeigen wir folgende Behauptung:
B ist ein Bewertungsring.
Dafür zeigen wir zuerst:

$$\text{Für alle } \alpha \in K \text{ gilt entweder } \alpha^{2m} \in B \text{ oder } \alpha^{-2m} \in \mathfrak{p}. \tag{2.12.1}$$

Sei dafür $t \in T$.
(Bemerkung: Für einen Präpositivbereich T der Stufe $2m$ gilt allgemein:
Aus $x \in T\backslash\{0\}$ folgt $\frac{1}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)^{2m} \cdot x^{2m-1} \in T$.)
Daraus folgt $\frac{1}{1+t} \in T$ und daraus wiederum folgt $\frac{t}{1+t} \in T$.
Daraus folgt $1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}$, $1 - \frac{t}{1+t} = \frac{1}{1+t} \in T$.
Da auch $1 + \frac{1}{1+t}$, $1 + \frac{t}{1+t} \in T$ gilt,
folgt $\frac{1}{1+t}$, $\frac{t}{1+t} \in \mathcal{O}(T) \subseteq B$.
Sei $t \notin B$. Dann gilt auch $1 + t \notin B$ (ansonsten wäre $t = (1 + t) - 1 \in B$).
Annahme: $\frac{1}{1+t} \notin \mathfrak{p}$. Daraus folgt $\frac{1}{1+t} \in B\backslash\mathfrak{p}$. Daraus folgt $1 + t = \frac{1}{\frac{1}{1+t}} \in B_\mathfrak{p} = B$, was ein Widerspruch ist. Also $\frac{1}{1+t} \in \mathfrak{p}$.
Daraus folgt $\frac{t}{1+t} \notin \mathfrak{p}$ (ansonsten wäre $1 = \frac{1}{1+t} + \frac{t}{1+t} \in \mathfrak{p}$, ein Widerspruch).
Also gilt $\frac{t}{1+t} \in B\backslash\mathfrak{p}$.
Daraus folgt $\frac{1+t}{t} = \frac{1}{\frac{t}{1+t}} \in B_\mathfrak{p} = B$.
Daraus folgt $t^{-1} = \frac{1+t}{t} \cdot \frac{1}{1+t} \in \mathfrak{p}$.
Insgesamt gilt dann für $t \in T$ entweder $t \in B$ oder $t^{-1} \in \mathfrak{p}$.
Da $\alpha^{2m} \in T = \sum K^{2m}$ gilt, folgt somit (2.12.1).

Um die Behauptung, dass B ein Bewertungsring ist, zu zeigen, sei $\mathcal{O} \in K$ ein Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$, so dass $B \subseteq \mathcal{O}$ und $\mathfrak{m} \cap B = \mathfrak{p}$ gilt.
Solch ein $\mathcal{O}$ existiert nach Chevalley's Theorem. (siehe [E-P] 3.1.1)
Die Behauptung ist gezeigt, wenn wir $B = \mathcal{O}$ zeigen.
Dafür zeigen wir zuerst:

$$\text{Für alle } \alpha \in K \text{ gilt: aus } \alpha \in \mathcal{O} \text{ folgt } \alpha^{2m} \in B. \tag{2.12.2}$$

Sei dafür $\alpha \in \mathcal{O}$ mit $\alpha^{2m} \notin B$.
Aus (2.12.1) folgt dann $\alpha^{-2m} \in \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$.
Dann gilt $1 = \alpha^{2m} \cdot \alpha^{-2m} \in \mathfrak{m}$, was ein Widerspruch ist.
Also gilt (2.12.2).
Zusammen mit Bemerkung 2.2 folgt für alle $\alpha \in \mathcal{O}$, dass $(2m)!\alpha \in B$ gilt.

Daraus folgt $\alpha \in B$ (mit $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{O}(T) \subseteq B$).
Also gilt $\mathcal{O} \subseteq B$, woraus $B = \mathcal{O}$ folgt, was die Behauptung zeigt.

Kommen wir zum ursprünglichen Ziel, $B = \mathcal{O}(S)$, zurück.
Annahme: Es existiert ein $a \in \mathcal{O}(S) \backslash B$.
OBdA können wir annehmen, dass $a \in S$ gilt.
Wir setzen $S' := a^{-1}S$.
Wir zeigen nun:
(i) S' ist eine Semiordnung der Stufe $2m$;
(ii) $a\mathcal{O}(S') \subseteq \mathcal{O}(S)$.

Für (i) genügt es zu zeigen, dass $-1 \notin S'$ gilt.
$S' + S' \subseteq S'$ und $TS' \subseteq S'$ st klar, und $1 \in S'$ gilt, da $a \in S$ ist.
Wenn $-1 \in S'$ gilt, dann gilt $-a \in S$. Daraus folgt $a \in S \cap -S = (0)$, und aus $a = 0$ folgt $a \in B$, was ein Widerspruch zur Annahme ist.
Für (ii) sei $x \in \mathcal{O}(S')$, und $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ so, dass $n_1 \pm x \in S' = a^{-1}S$ und $n_2 - an \in S$ gilt.
So ein n_2 existiert, da mit a auch $na \in \mathcal{O}(S)$ gilt.
Dann gilt $an_1 \pm ax \in S$. Daraus folgt $n_2 \pm ax = (n_2 - an_1) + (an_1 \pm ax) \in S$.
Daraus folgt $ax \in \mathcal{O}(S)$, womit (ii) gezeigt ist.

Nun wählen wir B' auf die gleiche Weise, wie wir B in $\mathcal{O}(S)$ gewählt haben.
Dann ist B', wie B, ein Bewertungsring. Sein maximales Ideal ist
$\mathfrak{p}' = \{b \in B' \mid 1 \pm kb \in S', \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\}$.
Behauptung: $a \in B'$.
Sei $a \notin B'$, dann folgt mit (2.12.1) und der Tatsache, dass B' auf die gleiche Weise gewonnen wurde wie B, dass $a^{-1} \in \mathfrak{p}'$ gilt.
Daraus folgt $1 \pm ka^{-1} \in S' = a^{-1}S$, für alle $k \in \mathbb{N}$.
Mit a multipliziert, folgt $a - k \in S$, für alle $k \in \mathbb{N}$.
Da $a \in O(S)$ gilt, existiert ein $k' \in \mathbb{N}$, mit $k' - a \in S$.
Aus dem gerade Gezeigten folgt aber auch $a - (k' + 1) \in S$.
Daraus folgt $-1 = (k' - a) + (a - k' - 1) \in S$, was ein Widerspruch ist,
und somit gilt $a \in B'$.

Aus $a \in B'$ folgt $a^{2m} \subseteq aB' \subseteq a\mathcal{O}(S') \subseteq \mathcal{O}(S)$.
Wir haben $a \notin B$ angenommen. Daraus folgt mit (2.12.1), dass $a^{-1} \in \mathfrak{p}$ gilt,
woraus $a^{-2m} \in \mathfrak{p}$ folgt.
Das bedeutet gerade $1 \pm ka^{-2m} \in S$ für alle $k \in \mathbb{N}$,
woraus $a^{2m} - k \in S$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt.
Da aber, wie eben gezeigt, auch $a^{2m} \in \mathcal{O}(S)$ gilt, gibt es wieder ein $k' \in \mathbb{N}$ mit $k' - a^{2m} \in S$.
Daraus folgt $-1 = a^{2m} - (k' + 1) + (k' - a^{2m}) \in S$. Dies ist ein Widerspruch und somit war unsere oben getroffene Annahme falsch, und es folgt
$B = \mathcal{O}(S)$,
was wir ursprünglich auch zeigen wollten.

Daraus folgt schließlich, dass $\mathcal{O}(S)$ ein Bewertungsring von K mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}(S) = \mathfrak{p}$ ist.
Mit dem Homomorphiesatz folgt $\mathcal{O}(S)/\mathfrak{m}(S) \cong \operatorname{im}\phi \subseteq \mathbb{R}$.
Mit Satz 2.10 folgt $\phi(\mathcal{O}(S) \cap S) \subseteq \mathbb{R}^2$,
und somit gilt auch $\overline{\mathcal{O}(S) \cap S} \subseteq \mathbb{R}^2$. □

Korollar 2.13:
Wenn ein Körper K eine Semiordnung der Stufe $2m$ hat, ist er reell.

Beweis: Sei S eine Semiordnung der Stufe $2m$ von K.
Dann ist $\overline{K} = \mathcal{O}(S)/\mathfrak{m}(S)$ nach Satz 2.12 ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ und somit reell.
Also besitzt $\overline{K}$ eine Anordnung.
Aus dem Baer-Krull Darstellungssatz (Satz 1.7) folgt dann, dass auch K eine Anordnung besitzt und somit auch reell ist. □

Lemma 2.14:
Sei S eine Semiordnung der Stufe $2m$ auf K, und $\mathcal{O}$ ein Bewertungsring von K, der $\mathcal{O}(S)$ enthält.
Dann ist das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von $\mathcal{O}$ S-konvex, und $\overline{\mathcal{O} \cap S}$ ist eine Semiordnung der Stufe $2m$ in $\overline{K} = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$.

Beweis: Sei $a \in K \backslash \mathfrak{m}$ und $0 <_S a <_S b \in \mathfrak{m}$,
wobei $c \leq_S d$ durch $d - s \in S$ definiert ist.
Dies führen wir nun zu einem Widerspruch.

Es gilt $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}(S) \subseteq \mathcal{O}(S) \subseteq \mathcal{O}$.
Also gilt $b \in \mathfrak{m}(S)$ und da $\mathfrak{m}(S)$ und $\mathcal{O}(S)$ S-konvex sind, folgt $a \in \mathfrak{m}(S)$.
Dann gilt $a^{2m-1} \in \mathfrak{m}(S)$, woraus $a^{-(2m-1)} \notin \mathcal{O}(S)$ folgt.

Wir zeigen:

(i) $1 <_S b/a^{2m}$:
Wegen $0 <_S a$, gilt $0 <_S \frac{a}{a^{2m}} = a^{-(2m-1)}$, woraus $1 <_S a^{-(2m-1)}$ folgt (wegen der Konvexität von $\mathcal{O}(S)$).
Dann gilt $a^{2m} <_S a <_S b$, woraus (i) folgt.

(ii) $b/a^{2m} <_S 1$:
Wegen $a \notin \mathfrak{m}$, gilt $a^{-1} \in \mathcal{O}$ und somit auch $a^{-2m} \in \mathcal{O}$.
Dann gilt, wegen $b \in \mathfrak{m}$, $b/a^{2m} \in \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}(S)$. Da $1 \notin \mathfrak{m}(S)$ kann wegen der Konvexität von $\mathfrak{m}(S)$ nicht $1 \leq_S b/a^{2m}$ gelten, und somit folgt (ii).

Weil (i) und (ii) sich gegenseitig widersprechen, war unsere Annahme falsch, und somit ist $\mathfrak{m}$ S-konvex.

Sei $S' := \overline{S \cap \mathcal{O}}$. Wir müssen noch zeigen dass S' eine Semiordnung der Stufe $2m$ in $\overline{K}$ ist.

Da S eine Semiordnung der Stufe $2m$ ist, ist klar dass folgendes gilt:
$S' + S' \subseteq S'$, $\overline{K}^{2m} S' \subseteq S'$, $\overline{1} \in S'$, $S' \cup -S' = \overline{K}$.
Es genügt zu zeigen, dass $-\overline{1} \notin S'$ gilt.
Angenommen es gilt $-\overline{1} \in S'$. Dann gibt es ein $s \in S \cap \mathcal{O}$ mit$-1 \equiv s \bmod \mathfrak{m}$, also $1 + s \in \mathfrak{m}$.
Es gilt $1 \leq_S 1 + s \in \mathfrak{m}$ und da $\mathfrak{m}$ konvex ist, folgt $1 \in \mathfrak{m}$, ein Widerspruch. $\square$

2.3 Archimedische Moduln der Stufe $2m$

In Abschnitt 2.1 wurde der Begriff des archimedische Moduls eingeführt.
Wie dort schon erwähnt, werden die archimedischen Moduln noch eine entscheidende Rolle für diese Arbeit spielen.
Deshalb wollen wir uns in diesem Abschnitt näher damit beschäftigen.

Sei A ein kommutativer Ring mit 1.
Sei M ein Archimedischer Modul der Stufe $2m$ in A.
Wie vor Lemma 2.7, sei

$$S \in \mathcal{Y}_M^{2m}(A) = \{S \subseteq A \mid S \text{ ist Semiordnung der Stufe } 2m,\, M \subseteq S\}.$$

Wie auf Seite 22 sei $\alpha_S : A \to A/\mathfrak{p} = \overline{A}$ und $\mathfrak{p} = S \cap -S$ (ein Primideal von A).
Weiter sei $\overline{S}$, die durch S induzierte Semiordnung der Stufe $2m$ auf $\overline{A}$ mit
$\overline{S} \cap -\overline{S} = (0)$.
Sei S', die wie in (2.7.1) durch $\overline{S}$ induzierte Semiordnung der Stufe $2m$ auf $F =$Quot$\overline{A}$.
Wir schreiben $\mathcal{O}'$ für den Bewertungsring $\mathcal{O}(S')$ (wie in Satz 2.12 definiert).
Sei $\sigma : \mathcal{O}(S') \to L := O(S')/\mathfrak{m}(S') \subseteq \mathbb{R}$ die kanonische Restklassenabbildung, die nach Satz 2.12, nach $\mathbb{R}$ abbildet.
Da S archimedisch ist, weil M archimedisch ist, gilt $\overline{A} \subseteq \mathcal{O}(S')$, und somit lässt sich σ auf $\overline{A}$ anwenden.
Verkettet man nun α_S und σ, führt dies zu einem Homomorphismus

$$\phi_S : A \xrightarrow{\alpha_S} \overline{A} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R},$$

mit $\phi_S(S) \subseteq \mathbb{R}^2$ $\big(\alpha_S(S) \subseteq \overline{S} \subseteq S'$ und nach Satz 2.12 gilt $\overline{\mathcal{O}(S') \cap S'} \subseteq \mathbb{R}^2\big)$.
Es folgt $S \subseteq \phi_S^{-1}(\mathbb{R}^2) =: P_S$, wobei $P_S \in \mathcal{X}_M^{\max}$ ist.

Satz 2.15:
Sei M ein archimedischer Modul der Stufe $2m$ in A. Dann gilt für alle $S \in \mathcal{Y}_M^{2m}$, dass S genau dann maximal in $\mathcal{Y}_M^{2m}$ ist, wenn $S \in \mathcal{X}_M^{\max}$ gilt.

Beweis: "$\Leftarrow$": Sei $S \in \mathcal{X}_M^{\max}$. Dann gilt nach Satz 1.4 $\phi_S : A \to \overline{A} \subseteq \mathbb{R}$.
Sei $Q \in \mathcal{Y}_M^{2m}$ mit $Q \supseteq S$. Dann gilt $\overline{S} \subseteq \overline{Q}$ (bezüglich $\mathfrak{p} = S \cap -S$).
$\overline{Q} \cap -\overline{Q} =: \mathfrak{q}$ ist ein Primideal von $\overline{A}$. Sei $\leq$ die (wegen $\overline{A} \subseteq \mathbb{R}$) von $\mathbb{R}$ induzierte Anordnung.
Sei $0 \leq a \in \mathfrak{q}$. Dann gilt $0 \leq na \in \mathfrak{q}$.
Für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gilt dann entweder $na < 1$ oder $na - 1 \in \overline{P} \subseteq \overline{Q}$. Dann gilt aber $-1 = na - 1 - na \in \overline{Q}$, da $na \in \mathfrak{q} \subseteq -\overline{Q}$ gilt. Dies ist aber ein Widerspruch und somit gilt $na < 1$. Daraus folgt $0 \leq a < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und somit folgt $a = 0$. Dann gilt $\mathfrak{q} = \{0\}$.
Sei nun $x \in \overline{Q}$. Angenommen es gilt $x \notin \overline{S}$, dann gilt $-x \in \overline{S} \subseteq \overline{Q}$ und somit $x \in \mathfrak{q}$. Dann gilt aber $x = 0$ was ein Widerspruch zu $x \notin \overline{S}$ ist.
Also gilt $\overline{Q} = \overline{S}$ und daraus folgt dann $Q = S$.
"$\Leftarrow$": Es gilt $S \subseteq P_S \in \mathcal{X}_M^{\max}$. Da aber jeder Positivbereich automatisch eine Semiordnung der Stufe $2m$ ist, gilt $P_S \in \mathcal{Y}_M^{2m}$. Wegen S maximal in $\mathcal{Y}_M^{2m}$, folgt $S = P_S \in \mathcal{X}_M^{\max}$. □

Notation: Sei M ein archimedischer Modul der Stufe $2m$.
Für $a \in A$ betrachten wir die Abbildung

$$\hat{a} : \mathcal{X}_M^{\max} \to \mathbb{R},$$

die durch $\hat{a}(P) := \alpha_P(a)$ definiert ist.
$\hat{a}$ bildet wegen Satz 1.4 nach $\mathbb{R}$ ab.

Mit dieser Abbildung können wir nun einen Satz formulieren, der zum ersten Mal etwas über die Darstellung eines Elements $b \in A$ aussagt. Er ist sozusagen die Verallgemeinerung des Darstellungssatzes von Jacobi (siehe [P-D] 5.3.7), der im quadratischen Fall (m=1) sehr wichtig und bekannt ist und stammt ebenfalls von Thomas Jacobi.

Satz 2.16:
Sei M ein archimedischer Modul der Stufe $2m$ in A, $b \in A$ und für alle $S \in (\mathcal{Y}_M^{2m})^{\max} = \mathcal{X}_M^{\max}$ gilt $\hat{b}(S) > 0$. Dann gilt $b \in M$.

Beweis: Sei $b \in A$ mit $\hat{b}(S) > 0$ für alle $S \in (\mathcal{Y}_M^{2m})^{\max}$.
$\hat{b}(S) > 0$ für alle $S \in (\mathcal{Y}_M^{2m})^{\max}$ impliziert $\hat{b}(S) > 0$ für alle $S \in \mathcal{Y}_M^{2m}$.
Es gilt $\alpha_S(b) = \hat{b}(S) > 0$ und daraus folgt

$$b \in S^+. \tag{2.16.1}$$

Mit Satz 2.8 folgt dann, dass ein $\tau \in \sum A^{2m}$ existiert, mit

$$(1 + \tau)b \in 1 + M. \tag{2.16.2}$$

Wegen $\tau \in \sum A^{2m}$ existiert ein $\nu \in \mathbb{N}$ und $b_1, \ldots, b_\nu \in A$ mit $\tau = \sum_{i=1}^{\nu} b_i^{2m}$.
Wir definieren

$$B := \mathbb{Z}[b,b_1,\ldots,b_\nu] \subseteq A \quad \text{und}$$
$$M_B := M \cap B.$$

Da M archimedisch ist, ist klar, dass M_B ein archimedischer Modul der Stufe $2m$ von B ist.
Wir finden dann ein $q \in \mathbb{N}$ mit

$$q \pm b,\ q \pm b_1, \ldots,\ q \pm b_\nu \in 1 + M_B. \tag{2.16.3}$$

Für jedes $e := (e_1,\ldots,e_{2\nu+2}) \in \{0,1,\ldots,2m-1\}^{2\nu+2}$ sei

$$g_e := \left(\prod_{i=1}^{\nu} (q+b_i)^{e_i} \cdot (q-b_i)^{e_{\nu+i}}\right) (q+b)^{e_{2\nu+1}} (q-b)^{e_{2\nu+2}}.$$

Aus (2.16.1), (2.16.3) und der Definition von M_B folgt dann $g_e, g_e b \in P^+$ für alle $P \in \mathcal{X}_{M_B}^{\max} = \left(\mathcal{Y}_{M_B}^{2m}\right)^{\max}$.
Nach Satz 2.8 existieren dann $\sigma_e,\ \sigma'_e \in \sum B^{2m}$ mit

$$(1+\sigma_e)g_e,\ (1+\sigma'_e)g_e b \in M_B.$$

Wir setzen

$$\sigma := (1+\tau)\prod_e (1+\sigma_e)(1+\sigma'_e) \in \sum B^{2m}.$$

Mit den bisherigen Definitionen und Folgerungen gilt dann
$\sigma b \in 1 + M$ und $\sigma g_e,\ \sigma g_e b \in M$.
Wir definieren

$$M_b := M \cap \{sb + r \mid s \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ r \in \mathbb{N}\} \text{ und}$$
$$\operatorname{Stab}(M_b) := \{a \in A \mid aM_b \subseteq M\}.$$

Dann gilt

$$\sigma g_e \cdot M_b \subseteq \mathbb{N}\sigma g_e b + \mathbb{N}\sigma g_e \subseteq M. \tag{2.16.4}$$

Weiter definieren wir

$$T(g) := \sum B^{2m} + \sum_e g_e \sum B^{2m}.$$

$T(g)$ ist eine Präordnung der Stufe $2m$ in B.

Sei nun $x \in T(g)$ und $a \in M_b$.
Dann gilt

$$\begin{aligned}\sigma x a &\subseteq \sigma a \sum B^{2m} + \sum_e \sigma g_e a \sum B^{2m}\\ &\subseteq \sigma \sum B^{2m} M + \sum_e M \sum B^{2m} \quad \text{(mit (2.16.4))}\\ &\subseteq M.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\sigma T(g) \subseteq \mathrm{Stab}(M_b). \tag{2.16.5}$$

Behauptung: T(g) ist archimedisch.

Für $1 \leq i \leq \nu$ gilt $q - b_i = g_{e'} \in T(g)$ für ein $e' \in \{0, \ldots ,2m-1\}^{2\nu+2}$.
Außerdem gilt $q - b = g_{e''}$ für ein $e'' \in \{0, \ldots ,2m-1\}^{2\nu+2}$.
Also existiert zu jedem $a \in \mathbb{Z} \cup \{b,b_1, \ldots ,b_\nu\}$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a - k \in T(g)$.
Seien nun $a_1,a_2 \in B$ und $n_1,n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 - a_1,n_2 - a_2 \in T(g)$.
Dann gilt $(n_1 + n_2) - (a_1 + a_2) = (n_1 - a_1) + (n_2 - a_2) \in T(g)$ und
$3n_1n_2 - a_1a_2 = (n_1 + a_1)(n_2 - a_2) + n_1(n_2 + a_2) + n_2(n_1 - a_1) \in T(g)$.
Da jedes $a \in B$ aber gerade durch endliches Addieren und Multiplizieren von Elementen aus $\mathbb{Z} \cup \{b,b_1, \ldots ,b_\nu\}$ gebildet wird, folgt induktiv, dass für jedes $a \in B$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N - a \in T(g)$ existiert.
Somit ist gezeigt, dass $T(g)$ archimedisch ist.

Es existiert daher ein $r \in \mathbb{N}$ mit $r - \sigma \in T(g)$.
Es gilt

$$\begin{aligned}r^{2m-1}(r-\sigma) &= (r-\sigma+\sigma)^{2m-1}(r-\sigma)\\ &= \left(\sum_{i=0}^{2m-1}\binom{2m-1}{i}\sigma^i(r-\sigma)^{2m-1-i}\right)(r-\sigma)\\ &= (r-\sigma)^{2m} + \sigma\cdot\sum_{i=1}^{2m-1}\binom{2m-1}{i}\sigma^{i-1}(r-\sigma)^{2m-i}\\ &\in \sum A^{2m} + \sigma\cdot T(g) \subseteq \mathrm{Stab}(M_b) \quad \text{(mit (2.16.5))}\end{aligned}$$

Wir setzen $l := r^{2m}$.
Dann gilt

$$l - \sigma = r^{2m} - \sigma = r^{2m-1}(r-\sigma) + (r^{2m-1}-1)\sigma \subseteq \mathrm{Stab}(M_b).$$

Wir definieren

$$Q := \{(s,r) \mid s \in \mathbb{N}\backslash\{0\},\ r \in \mathbb{Z},\ sb + r \in M\}.$$

Sei nun $(s,r) \in Q$. Dann gilt für $r \geq 0$

$$\begin{aligned}(sl)b + (rl - s) = &\underbrace{(l-\sigma)}_{\in \mathrm{Stab}(M_b)} \underbrace{(sb+r)}_{\in M_b} + s\underbrace{(\sigma b - 1)}_{\in M} + \underbrace{r\sigma}_{\in \sum A^{2m}} \\ &\in M + M + \sum A^{2m} \subseteq M\end{aligned}$$

Daraus folgt $(sl,rl - s) \in Q$.
Da M archimedisch ist, existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k + b \in M$.
Also gilt $(1,k) \in Q$.
Wenn wir das eben Gezeigte auf $(1,k)$ anwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned}(1,k) &\in Q \\ (l,lk-1) &\in Q \\ (l^2,l^2k - l - l) &\in Q \\ (l^3,l^3k - 2l^2 - l^2) &\in Q \\ \vdots \qquad &\quad \vdots \\ (l^e,l^ek - el^{e-1}) &\in Q,\end{aligned}$$

für alle $e \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, die $l^{e-1}k - (e-1)l^{e-2} \geq 0$ erfüllen.
$e = lk + 1$ erfüllt dies, und somit gilt

$$(l^e, \underbrace{l^ek - lkl^{e-1}}_{=0} - l^{e-1}) = (l^e, -l^{e-1}) \in Q.$$

Mit der Definition von Q gilt dann $l^eb - l^{e-1} \in M$, woraus
$l^eb = l^eb - l^{e-1} + l^{e-1} \in M$ folgt.
Daraus folgt $b = \left(\frac{1}{l^e}\right)^{2m} \cdot (l^e)^{2m-1} \cdot l^eb \in M$. □

Wir wollen den eben bewiesenen Satz nun konkret im Polynomring über $\mathbb{R}$ anwenden.

Sei ab jetzt $\mathbf{A} = \mathbb{R}[\mathbf{X_1}, \ldots, \mathbf{X_n}]$.

Notation: Für $h_1, \ldots, h_s \in A$, definieren wir

$$W_{\mathbb{R}}(h) := W_{\mathbb{R}}(h_1, \ldots, h_s) := \{a \in \mathbb{R}^n \mid h_1(a) \geq 0, \ldots, h_s(a) \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

und

$$M^{2m}(h_1, \ldots, h_s) := \sum\nolimits^{2m} + h_1 \sum\nolimits^{2m} + \cdots + h_s \sum\nolimits^{2m}.$$

Dabei ist $M^{2m}(h_1, \ldots, h_s)$ ein Modul der Stufe $2m$ genau dann wenn $-1 \notin M^{2m}(h_1, \cdots, h_s)$ gilt.

Satz 2.17:
Für $h_1,\ldots,h_s \in A$ sei $M = M^{2m}(h_1,\ldots,h_s)$ ein archimedischer Modul der Stufe 2m. Sei $f \in A$ mit $f > 0$ auf $W_{\mathbb{R}}(h)$
Dann gilt $f \in M$.

Beweis: Sei $S \in (\mathcal{Y}_M^{2m})^{\max} = \mathcal{X}_M^{\max}$ (Satz 2.15).
α_S bildet wegen Satz 1.4 nach $\mathbb{R}$ ab.
Wegen $h_i \in M \subseteq S$ gilt $\alpha_S(h_i) \geq 0$.
Das bedeutet $h_i(\overline{X_1},\ldots,\overline{X_n}) = \overline{h_i} = \alpha_S(h_i) \geq 0$,
und somit folgt $(\overline{X_1},\ldots,\overline{X_n}) \in W_{\mathbb{R}}(h)$. Wegen $f > 0$ auf $W_{\mathbb{R}}(h)$ folgt dann
$\hat{f}(S) = \alpha_S(f) = \overline{f} = f(\overline{X_1},\ldots,\overline{X_n}) > 0$.
Mit Satz 2.16 folgt dann $f \in M$. □

Anhand dieses Satzes sehen wir, dass die entscheidende Bedingung für eine "schöne" Darstellung (als Summe $2m$-ter Potenzen) von einem f mit $f > 0$ auf $W_{\mathbb{R}}(h)$ die Archimedizität von $M = M^{2m}(h_1,\ldots,h_s)$ ist.
Wir brauchen deshalb notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass ein Modul M der Stufe $2m$ archimedisch ist.

Satz 2.18:
Sei $M = M^{2m}(h_1,\ldots,h_s)$ ein Modul der Stufe 2m. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
(1) M ist Archimedisch;
(2) $W_{\mathbb{R}}(h)$ ist kompakt, und $\mathcal{X}_M^{\max} = (\mathcal{Y}_M^{2m})^{\max}$;
(3) $W_{\mathbb{R}}(h)$ ist kompakt, und für alle $f \in A$ gilt:

$$f > 0 \text{ auf } W_{\mathbb{R}}(h) \text{ impliziert } \sigma f \in 1 + M \text{ für ein } \sigma \in \sum\nolimits^{2m}.$$

Beweis: (1)⇒(2): Wenn für ein $a \in \mathbb{R}^n$ $h_1(a),\ldots h_s(a) \geq 0$ gilt, dann gilt $(\sigma_0 + h_1\sigma_1 + \ldots h_s\sigma_s)(a) \geq 0$, für alle $\sigma_0,\ldots,\sigma_s \in \sum^{2m}$. Deshalb gilt für alle $f \in M$ und alle $a \in W_{\mathbb{R}}(h)$, $f(a) \geq 0$.
Da M Archimedisch ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, mit $N - \sum X_i^2 \in M$.
Daraus folgt $N - \sum a_i^2 \geq 0$ für alle $a = (a_1,\ldots a_n) \in W_{\mathbb{R}}(h)$. Daraus folgt $|a| = \sqrt{\sum a_i^2} \leq \sqrt{N}$ und somit ist $W_{\mathbb{R}}(h)$ beschränkt (und damit kompakt).
$\mathcal{X}_M^{\max} = (\mathcal{Y}_M^{2m})^{\max}$ folgt direkt aus Satz 2.15.

(2)⇒(3): Weil f strikt positiv auf $W_{\mathbb{R}}(h)$ ist, folgt mit Satz 1.5, dass $t_1 f = 1 + t_2$, für gewisse $t_1,t_2 \in T(h_1,\ldots,h_s) = \sum_{\nu\in\{0,1\}^s} h_1^{\nu_1}\cdots h_s^{\nu_s} \sum^{2m}$ gilt.
Für $P \in \mathcal{X}_M$ gilt $t_1,t_2 \in P$ und somit folgt dann
$\alpha_P(f)\cdot\alpha_P(t_1) = \alpha_P(t_1 f) = \alpha_P(1+t_1) > 0$. (Da $1 + t_1 \in P\backslash -P$ gilt.)
Wegen $\alpha_P(t_1) \geq 0$ folgt dann $\alpha_P(f) > 0$, und somit gilt, dass f strikt positiv auf $\mathcal{X}_M$ ist, also insbesondere auch auf $\mathcal{X}_M^{\max} = (\mathcal{Y}_M^{2m})^{\max}$.

Seien $S_1,S_2 \in \mathcal{Y}_M^{2m}$ und $S_1 \subseteq S_2$. Wenn $f \notin S_1^+$ gilt, dann folgt $-f \in S_1 \subseteq S_2$ und somit $f \notin S_2^+$.
Also folgt aus $f \in S_2^+$ auch $f \in S_1^+$.
Insgesamt folgt damit, dass f sogar strikt positiv auf $\mathcal{Y}_M^{2m}$ ist, also gilt $f \in S^+$, für alle $S \in \mathcal{Y}_M^{2m}$.
Mit Satz 2.8 existiert dann ein $\sigma \in \sum^{2m}$ mit $\sigma f \in 1 + M$.

(3)⇒(1): Da $W_{\mathbb{R}}(h)$ kompakt ist, existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \pm X_1,\ldots,k \pm X_n > 0$ auf $W_{\mathbb{R}}(h)$.
Dann gilt für alle $e = (e_1,\ldots,e_{2n}) \in \{0,\ldots,2m-1\}^{2n}$,
$g_e := \prod_{i=1}^{n}(k - X_i)^{e_i}(k + X_i)^{e_{i+n}} > 0$ auf $W_{\mathbb{R}}(h)$.
Mit (3) und Satz 2.8 ((2)⇒(3)) gilt dann, dass es zu jedem e ein $t_e \in \sum^{2m}$ gibt, mit $(1 + t_e)g_e \in M$.
Sei $t \in \sum^{2m}$ so, dass $1 + t = \prod_e (1 + t_e)$ gilt, und sei

$$T' := \sum\nolimits^{2m} (k \pm X_1,\ldots,k \pm X_n),$$

der von $k \pm X_1,\ldots,k \pm X_n$ und $\sum^{2m}$ erzeugte Unterhalbring von A.
Es gilt dann $(1 + t)T' \subseteq M$.
T' ist eine Präordnung der Stufe $2m$, da $-1 \notin T'$ gilt. Denn wäre $-1 \in T'$, dann würde $-1 = -1 - t + t = (1 + t)(-1) + t \in M + \sum^{2m} \subseteq M$, ein Widerspruch, gelten.
Die anderen Eigenschaften sind klar, da T' ein Halbring ist.

Behauptung: T' ist Archimedisch.

Wegen der Definition von T' folgt, dass zu jedem $a \in \mathbb{R} \cup \{X_1,\ldots,X_n\}$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k - a \in T'$ existiert.
Seien nun $f_1,f_2 \in A$ und $n_1,n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 - f_1,n_2 - f_2 \in T'$.
Dann gilt $(n_1 + n_2) - (f_1 + f_2) = (n_1 - f_1) + (n_2 - f_2) \in T'$ und
$3n_1n_2 - f_1f_2 = (n_1 + f_1)(n_2 - f_2) + n_1(n_2 + f_2) + n_2(n_1 - f_1) \in T'$.
Da jedes $f \in A$ aber gerade durch endliches Addieren und Multiplizieren von Elementen aus $\mathbb{R} \cup \{X_1,\ldots,X_n\}$ gebildet wird, folgt induktiv, dass für jedes $f \in A$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N - f \in T'$ existiert.
Somit ist gezeigt, dass T' archimedisch ist.

Wir können daher ein $l \in \mathbb{N}$ mit $l - t \in T'$ wählen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(1+l)^{2m-1}(l-t) &= (1+t+l-t)^{2m-1}(l-t)\\ &= \sum_{i=0}^{2m-1}\binom{2m-1}{i}(1+t)^i(l-t)^{2m-1-i}(l-t)\\ &= (l-t)^{2m} + (1+t)\sum_{i=1}^{2m-1}\binom{2m-1}{i}(1+t)^{i-1}(l-t)^{2m-i}\\ &\in T + (1+t)T' \subseteq M,\end{aligned}$$

woraus $l - t \in M$ folgt, da $(1+l)^{2m-1} \in \mathbb{N}$ und somit $(1+l)^{-(2m-1)} \in \sum^{2m}$ gilt.
Sei nun $\sigma \in \sum^{2m}$. Da T' archimedisch ist, gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $s - \sigma \in T'$.
Sei $r := s(1+l)$.
Dann gilt $r - \sigma = (1+t)(s-\sigma) + s(l-t) + t\sigma \in M$.
Daraus folgt, dass man zu jedem $\sigma \in \sum^{2m}$ ein $r \in \mathbb{N}$ findet, mit $r - \sigma \in M$.
Da $A = \sum^{2m} - \sum^{2m}$ gilt (mit Bemerkung 2.2), folgt daraus schon, dass es zu jedem $a \in A$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, mit $N - a \in M$. Damit ist gezeigt, dass M archimedisch ist. $\square$

Diser Satz zeigt uns, dass die Kompaktheit von $W_{\mathbb{R}}(h)$ eine notwendige Bedingung dafür ist, dass M archimedisch ist.
Leider liefert er uns keine sinnvolle hinreichende Bedingung.

Um hier eine Verbesserung zu erziehlen und weiter zu kommen, benötigen wir neue Hilfsmittel und Methoden.
Diese liefert uns hauptsächlich die Bewertungstheorie, aber es werden auch einige Begriffe zu Formen vom Grad $2m$ (eine Verallgemeinerung der Quadratischen Formen) benötigt.

Diese Begriffe werden wir nun an dieser Stelle einführen

Notation: Für einen Körper K und für $c_1, \ldots, c_r \in K$ nennen wir, analog zu den Quadratischen Formen,

$$\rho = \langle c_1, \ldots, c_r \rangle = c_1 Z_1^{2m} + \cdots + c_r Z_r^{2m},$$

eine ("diagonalisierte") Form vom Grad $2m$ in den Unbestimmten $Z_1, \ldots, Z_r$.
Sind alle $c_i \neq 0$, so heißt ρ regulär.
Wir schreiben $\langle c_1, \ldots, c_r \rangle^*$ für den regulären Teil von ρ, das heißt, dass aus der obigen Notation alle c_i mit $c_i = 0$ gestrichen werden.

Definition 2.19: Für zwei Formen $\rho = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$ und $\tau = \langle b_1, \ldots, b_l \rangle$ definieren wir die Summe von ρ und τ (geschrieben als $\rho \perp \tau$) durch

$$\rho \perp \tau := \langle a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_l \rangle .$$

Weiter schreiben wir $k\rho := \underbrace{\rho\perp\cdots\perp\rho}_{k-mal}$ für das k-fache von ρ.

Definition 2.20: Eine Form $\langle c_1,\ldots,c_r\rangle$ wird ***2m-isotrop*** über K genannt, wenn ein r-Tupel $(z_1,\ldots,z_r) \in K^r\backslash\{0\}$ existiert, mit $\sum_i c_i z_i^{2m} = 0$.

Definition 2.21: Eine Form ρ wird ***schwach 2m-isotrop*** über K genannt, wenn $n\rho$ $2m$-isotrop ist, für ein $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 2.22: Wenn K reell ist, dann ist eine Form $\langle c_1,\ldots,c_r\rangle$ genau dann schwach $2m$-isotrop, wenn $\sum_{i=1}^r c_i\sigma_i = 0$ gilt, für gewisse $\sigma_i \in \sum K^{2m}$ nicht alle 0.

Definition 2.23: Für zwei Formen $\rho = \langle a_1,\ldots,a_r\rangle$ und $\tau = \langle b_1,\ldots,b_l\rangle$ definieren wir das Produkt von ρ und τ (geschrieben als $\rho\bigotimes\tau$) durch

$$\rho\bigotimes\tau := \langle a_1b_1,\ldots,a_rb_1,\ldots,a_1b_l,\ldots,a_rb_l\rangle .$$

Definition 2.24: Analog zu der Pfister-Form im quadratischen Fall, definieren wir $\langle\langle a_1,\ldots,a_r\rangle\rangle_{2m} := \bigotimes_{i=1}^{r} \left\langle 1,a_i,\ldots,a_i^{2m-1}\right\rangle .$

Kommen wir zu einem nützlichen Lemma, das die schwache $2m$-Isotropie einer Form über K mit den Semiordnungen der Stufe $2m$ von K verknüpft.

Satz 2.25:
Sei $\rho = \langle 1,a_1,\ldots,a_r\rangle$ eine reguläre Form über K.
Dann ist ρ genau dann schwach 2m-isotrop über K, wenn ρ indefinit über allen Semiordnungen S der Stufe 2m von K ist, das heißt wenn $-a_i \in S$ für mindestens ein $i \le r$ gilt.

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei S eine beliebige Semiordnung der Stufe $2m$ von K.
Wenn ρ schwach $2m$-isotrop über K ist, existieren $\sigma_0,\ldots,\sigma_r \in \sum K^{2m}$, nicht alle $\sigma_i = 0$, mit

$$0 = \sigma_0 + a_1\sigma_1 + \ldots + a_r\sigma_r.$$

OBdA sei $\sigma_r \neq 0$.
Annahme: Es gilt $a_1,\ldots,a_r \in S$. Dann folgt

$$-a_r\sigma_r = \sigma_0 + \ldots + a_{r-1}\sigma_{r-1} \in S,$$

woraus $a_r\sigma_r \in S \cap -S = \{0\}$ und wegen $\sigma_r \neq 0$, dann $a_r = 0$ folgt. Das ist ein Widerspruch, da ρ regulär ist.
Also existiert mindestens ein $i \le r$ mit $a_i \notin S$ und somit $-a_i \in S$.

"$\Leftarrow$": Wenn ρ nicht schwach $2m$-isotrop ist, gilt

$$-1 \notin \sum K^{2m} + a_1 \sum K^{2m} + \ldots + a_r \sum K^{2m} = M^{2m}(a_1, \ldots ,a_r) =: M.$$

Dann ist M ein Modul der Stufe $2m$ von K. Sei $S \supseteq M$ eine Semiordnung der Stufe $2m$ von K, die nach Bemerkung 2.5 auf jeden Fall existiert.
Dann gilt $a_1, \ldots ,a_r \in S$ und somit ist ρ nicht indefinit über S. □

Wie schon erwähnt, benötigen wir im weiteren Verlauf etwas Bewertungstheorie, und hier im speziellen folgende Notationen, die wir ganz allgemein für einen beliebigen Ring A einführen.

Notation: Sei A ein beliebiger kommutativer Ring mit 1.
Sei $F_{\mathfrak{p}} := \mathrm{Quot}(A/\mathfrak{p})$ für ein $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ und $\mathfrak{p}$ reell.
Weiter definieren wir $\mathfrak{R}^1(\mathfrak{p})$ als die Menge aller Rang 1-Bewertungen v auf $F_{\mathfrak{p}}$ mit reellem Restklassenkörper.
Außerdem sei

$$\mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p}) = \left\{ v \in \mathfrak{R}^1(\mathfrak{p}) \mid v(\overline{X_i}) < 0, \text{ für ein } i \in \{1, \ldots ,n\} \right\}.$$

Sei ab jetzt wieder $A = \mathbb{R}[X_1, \ldots ,X_n]$.

An dieser Stelle schieben wir ein Lemma aus der reellen Algebra ein, das später im Beweis der Verallgemeinerung des Satzes von Schmüdgen benötigt wird.

Lemma 2.26:
Sei $A = \mathbb{R}[X_1, \ldots ,X_n]$. Wenn $W_{\mathbb{R}}(h) = W_{\mathbb{R}}(h_1, \ldots ,h_s)$ kompakt ist, dann ist die Form $\tau = \langle 1,\overline{h_1}, \ldots ,\overline{h_s}\rangle^*$ für alle reellen $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, A$ und alle $v \in \mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p})$ indefinit bezüglich allen Anordnungen von $\widehat{(F_{\mathfrak{p}},v)}$. (Also total indefinit.)

Beweis: Sei $v \in \mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p})$ mit zugehörigem Bewertungsring $\mathcal{O}$ und mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und sei $\leq$ eine Anordnung auf $\widehat{F_{\mathfrak{p}}}$.
OBdA sei $v(\overline{X_1}) < 0$ und $0 < \overline{X_1}$.
Dann gilt $v(\frac{r}{\overline{X_1}}) > 0$ für alle $r \in \mathbb{N}$,
woraus $\frac{r}{\overline{X_1}} \in \mathfrak{m}$ folgt.
Daraus folgt $1 - \frac{r}{\overline{X_1}} \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$,
also hat das Polynom $X^2 - \left(1 - \frac{r}{\overline{X_1}}\right)$ die einfache Nullstelle 1 in $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$.
Da $(\widehat{F_{\mathfrak{p}}},v)$ nach Satz 1.11 henselsch ist, hat das Polynom nach dem henselschen Lemma (vergleiche (1.10)) dann auch eine Nullstelle x in $\widehat{F_{\mathfrak{p}}}$.
Also existiert ein $x \in \widehat{F_{\mathfrak{p}}}$ mit $x^2 - \left(1 - \frac{r}{\overline{X_1}}\right) = 0$.

Daraus folgt $\overline{X_1} - r = x^2\overline{X_1} \geq 0$,
woraus $r \leq \overline{X_1}$ folgt.

Weil $W_{\mathbb{R}}(h)$ kompakt ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass die Formel

$$\forall y_1, \ldots, y_n \left(N < y_1 \rightarrow \bigvee_{i=1}^{s} h_i(y_1, \ldots, y_n) < 0 \right)$$

in $\mathbb{R}$ gilt.
Nach Tarski´s Transferprinzip (siehe [P-D] 2.1.10) gilt sie dann auch im reellen Abschluss von $(\widehat{F_{\mathfrak{p}}}, \leq)$.
Wegen $N \leq \overline{X_1}$, folgt dann $\overline{h_i} = h_i(\overline{X_1}, \ldots, \overline{X_n}) < 0$ für mindestens ein $i \leq s$.
Also ist τ indefinit bezüglich $\leq$. □

Kommen wir nun zu unserem Ziel zurück, eine sinnvolle, hinreichende Bedingung für die Archimedizität eines Moduls der Stufe $2m$ zu finden.

Dies tun wir ausgehend von Bedingung (3) in Satz 2.18.

Satz 2.27:
*Für $a_1, \ldots, a_s \in A$ sei $M = M^{2m}(a_1, \ldots, a_s) = \sum^{2m} + a_1 \sum^{2m} + \cdots + a_s \sum^{2m}$.
Weiter sei $a \in A$. Dann existiert ein $\sigma \in \sum^{2m}$ mit $\sigma a \in 1 + M$ genau dann, wenn die Form $\langle 1, -\overline{a}, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_s} \rangle^*$ für alle reellen $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ schwach $2m$-isotrop über $F_{\mathfrak{p}} = \operatorname{Quot} \overline{A}$ ist, wobei $\overline{A} = A/\mathfrak{p}$ ist.*

Beweis: ”⇒”: Sei $\sigma a \in 1 + M$ für ein $\sigma \in \sum^{2m}$.
Daraus folgt $\sigma a = 1 + \sigma_o + a_1\sigma_1 + \cdots + a_s\sigma_s$ für gewisse $\sigma_o, \ldots, \sigma_s \in \sum^{2m}$.
Sei $\mathfrak{p}$ ein beliebiges reelles Primideal. Wir betrachten die obige Gleichung dann in $F_{\mathfrak{p}} = \operatorname{Quot} \overline{A} = \operatorname{Quot} A/\mathfrak{p}$.
Es gilt $\overline{\sigma a} = \overline{1 + \sigma_o} + \overline{a_1\sigma_1} + \cdots + \overline{a_s\sigma_s}$ und $\overline{\sigma_1}, \ldots \overline{\sigma_s} \in \sum F^{2m}$
Das ist äquivalent zu $0 = 1 \cdot \overline{1 + \sigma_o} - \overline{a} \cdot \overline{\sigma} + \overline{a_1} \cdot \overline{\sigma_1} + \cdots + \overline{a_s} \cdot \overline{\sigma_s}$
Daraus folgt, dass $\langle 1, -\overline{a}, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_s} \rangle^*$ schwach $2m$-isotrop ist.

”⇐”: (Beweis durch Kontraposition)
Sei $a \sum^{2m} \cap (1 + M) = \emptyset$.
Daraus folgt $-1 \cap (M - a \sum^{2m}) = \emptyset$.
Somit ist $M' = M - a \sum^{2m}$ ein Modul der Stufe $2m$.
Nach Bemerkung 2.5 gibt es dann eine Semiordnung S der Stufe $2m$ mit $S \supseteq M'$
Sei $\mathfrak{p} = S \cap -S$. $\overline{S}$ ist dann eine Semiordnung der Stufe $2m$ von $\overline{A} = A/\mathfrak{p}$.
$\mathfrak{p}$ ist somit reell, und es gilt $\overline{S} \cap -\overline{S} = \{0\}$. Somit kann $\overline{S}$ auf $F_{\mathfrak{p}} = \operatorname{Quot} \overline{A}$ fortgesetzt werden (Lemma 2.7).
Weil $1, -a, a_1, \ldots, a_s \in M' \subseteq S$ gilt, folgt $1, -\overline{a}, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_s} \in \overline{S}$.

Somit kann die Form $\langle 1, -\overline{a}, \overline{a_1}, \dots, \overline{a_s}\rangle^*$ nicht schwach $2m$-isotrop über $F_\mathfrak{p}$ sein (Satz 2.25). □

Diesen Satz modifizieren wir weiter.

Satz 2.28 (Charakterisierungssatz I)**:**
Sei $M = M^{2m}(h_1, \dots, h_s)$ ein Modul der Stufe 2m und $f \in A$.
Dann existiert ein $\sigma \in \sum^{2m}$ mit $\sigma f \in 1 + M$ genau dann, wenn $f > 0$ auf $W_\mathbb{R}(h)$ gilt und für alle reellen $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ und alle $v \in \mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p})$, die Form $\left\langle 1, -\overline{f}, \overline{h_1}, \dots, \overline{h_s}\right\rangle^*$ schwach 2m-isotrop über der Komplettierung $\widehat{(F_\mathfrak{p}, v)}$ ist.

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei $\rho = \left\langle 1, -\overline{f}, \overline{h_1}, \dots, \overline{h_s}\right\rangle^*$.
ρ ist nach Satz 2.27 schwach $2m$-isotrop über $F_\mathfrak{p}$. Dann ist ρ auch schwach $2m$-isotrop über $\widehat{(F_\mathfrak{p}, v)}$.
Da $\sigma f = 1 + \mu$ für ein $\mu \in M$ gilt, folgt $f > 0$ auf $W_\mathbb{R}(h)$, denn es gilt $\mu \geq 0$ auf $W_\mathbb{R}(h)$ und somit $1+\mu > 0$ und $\sigma \geq 0$ auf ganz $\mathbb{R}^n$. Somit muss $f > 0$ auf $W_\mathbb{R}(h)$ gelten.

"$\Leftarrow$": Wir zeigen durch Induktion über die Krulldimension d von $\overline{A} = A/\mathfrak{p}$, dass ρ schwach $2m$-isotrop über $F_\mathfrak{p}$ ist.

$\underline{d = 0}$: Wegen $d = 0$, gilt $\overline{A} = \mathbb{R}$.
Sei $\leq$ $(=\leq_{\mathbb{R}^2})$ die eindeutige Anordnung auf $\mathbb{R}$. Wenn $\overline{h_i} = h_i(\overline{X_1}, \dots, \overline{X_n}) \geq 0$ für alle h_i gilt, dann gilt $\overline{X_1}, \dots, \overline{X_n} \in W_\mathbb{R}(h)$.
Da $f > 0$ auf $W_\mathbb{R}(h)$, folgt $\overline{f} = f(\overline{X_1}, \dots, \overline{X_n}) > 0$. Also gilt $-\overline{f} < 0$.
Insgesamt folgt, dass ρ indefinit bezüglich $\leq$ ist und da $\leq$ die einzige Semiordnung der Stufe $2m$ von $\mathbb{R}$ ist (vergleiche Lemma 2.6), ist ρ indefinit über allen Semiordnungen der Stufe $2m$ von $\mathbb{R}$ und somit nach Satz 2.25 schwach $2m$-isotrop über $\mathbb{R} = F_\mathfrak{p}$.

$\underline{d > 0}$: Angenommen ρ ist nicht schwach $2m$-isotrop über $F_\mathfrak{p}$.
Dann existiert eine Semiordnung $S \subseteq F_\mathfrak{p}$ der Stufe $2m$ mit $-\overline{f}, \overline{h_1}, \dots, \overline{h_s} \in S$.
Nach Satz 2.12 ist $\mathcal{O}(S)$ ein Bewertungsring von $F_\mathfrak{p}$.
$\mathcal{O}(S)$ ist verschieden von $F_\mathfrak{p}$, denn wäre $\mathcal{O}(S) = F_\mathfrak{p}$, würde nach Satz 2.12 $F_\mathfrak{p} = \mathcal{O}(S)/\mathfrak{m}(S) \subseteq \mathbb{R}$ gelten, was ein Widerspruch zu $d > 0$ wäre.
Sei nun $\mathcal{O}$ ein maximaler echter Bewertungsring von $F_\mathfrak{p}$, der $\mathcal{O}(S)$ enthält, und $\mathfrak{m}$ sein maximales Ideal.
(So ein maximaler Oberring existiert nach [E-P] (3.4.6) und der Tatsache, dass der Transzendenzgrad von $F_\mathfrak{p}/\mathbb{R}$ endlich ist.)
Nach Lemma 2.14 ist $\overline{S \cap \mathcal{O}}$ eine Semiordnung der Stufe $2m$ in $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$. Somit ist der Restklassenkörper $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$ von $\mathcal{O}$ reell (mit Korollar 2.13).
Außerdem ist die zu $\mathcal{O}$ gehörige Bewertung v nach [E-P] (2.3.2) eine Rang1-Bewertung, und somit liegt v in $\mathfrak{R}^1(p)$.

Wir betrachten nun 2 Fälle.

Fall 1: $\overline{X_1},\dots,\overline{X_n} \in \mathcal{O}$.
Weil $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{O}(S) \subseteq \mathcal{O}$ gilt, folgt $\overline{A} \subseteq \mathcal{O}$.
Dann gilt:
(a) $\mathfrak{p}' = \overline{A} \cap \mathfrak{m}$ ist ein reelles Primideal von $\overline{A}$ und $\mathfrak{p}' \neq 0$.
Daraus folgt: Krulldimension $(\overline{A}/\mathfrak{p}') < d$.
(b) Nach Lemma 2.14 existiert eine Semiordnung S' der Stufe $2m$ in $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$ mit $-\overline{f} + \mathfrak{m}, \overline{h_1} + \mathfrak{m},\dots,\overline{h_s} + \mathfrak{m} \in S'$.
Deshalb kann die Form $\left\langle 1, -\overline{f} + \mathfrak{m}, \overline{h_1} + \mathfrak{m}, \dots, \overline{h_s} + \mathfrak{m}\right\rangle^*$ nach Satz 2.25 nicht schwach $2m$-isotrop über $\operatorname{Quot}(\overline{A}/\mathfrak{p}')$ sein (mit $\operatorname{Quot}(\overline{A}/\mathfrak{p}') \subseteq \mathcal{O}/\mathfrak{m}$).
Sei nun $\mathfrak{p}''$ das Urbild von $\mathfrak{p}'$ unter der kanonischen Restklassenabbildung $A \mapsto \overline{A}$. Dann gilt $\overline{A}/\mathfrak{p}' \cong A/\mathfrak{p}''$.
Wegen der Isomorphie folgt dann, dass $\left\langle 1, -\overline{f},\overline{h_1},\dots,\overline{h_s}\right\rangle^*$ nicht schwach $2m$-isotrop über $\operatorname{Quot} A/\mathfrak{p}''$ ist, was ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung ist, da die Krulldimension von $A/\mathfrak{p}'' \cong \overline{A}/\mathfrak{p}'$ nach (a) kleiner d ist.

Fall 2: Es existiert ein i mit $v(\overline{X_i}) < 0$.
Dann gilt $v \in \mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p})$.
Nach Voraussetzung gilt dann, dass $\left\langle 1, -\overline{f},\overline{h_1},\dots,\overline{h_s}\right\rangle^*$ schwach $2m$-isotrop über $\widehat{(F_\mathfrak{p},v)}$ ist.
Da aber der Abschluss $\widehat{S}$ von S in $\widehat{(F_\mathfrak{p},v)}$ auch wieder eine Semiordnung der Stufe $2m$ in $\widehat{(F_\mathfrak{p},v)}$ mit $1, -\overline{f},\overline{h_1},\dots,\overline{h_s} \in S \subseteq \widehat{S}$ ist, ist dies ein Widerspruch zu Satz 2.25.

Man sieht also, dass beide Fälle zu einem Widerspruch führen, was zeigt, dass unsere Annahme falsch war.
Insgesamt folgt also, dass ρ schwach $2m$-isotrop über $F_\mathfrak{p}$ ist, und somit folgt die Behauptung mit Satz 2.27. $\square$

Nun sind wir in der Lage den sogenannten Charakterisierungssatz II, der ebenso wie der Charakterisierungssatz I von Alexander Prestel stammt, zu formulieren, der sowohl eine hinreichende als auch eine notwendige Bedingung für die Archimedizität von $M^{2m}(h_1,\dots,h_s)$ liefert. Er charakterisiert sozusagen gerade die archimedischen Moduln.

Satz 2.29 (Charakterisierungssatz II)**:**
Sei $M = M^{2m}(h_1,\dots,h_s)$ ein Modul der Stufe 2m. Dann ist M genau dann archimedisch, wenn $W_\mathbb{R}(h)$ kompakt ist und für alle reellen $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ und alle $v \in \mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p})$, die Form $\tau = \left\langle 1,\overline{h_1},\dots,\overline{h_s}\right\rangle^*$ schwach 2m-isotrop über der Komplettierung $\widehat{(F_\mathfrak{p},v)}$ ist.

Beweis: "$\Rightarrow$": $W_\mathbb{R}(h)$ ist nach Satz 2.18 (1) $\Rightarrow$ (3) kompakt.
Also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $f := N - \sum X_i^{2m} > 0$ auf $W_\mathbb{R}(h)$.
Wieder mit Satz 2.18 (1) $\Rightarrow$ (3) folgt die Existenz eines $\sigma \in \sum^{2m}$ mit $\sigma f \in 1 + M$.
Deshalb ist die Form $\left\langle 1, -\overline{f},\overline{h_1},\dots,\overline{h_s}\right\rangle^*$ nach Satz 2.28 schwach $2m$-isotrop über

$\widehat{(F_\mathfrak{p},v)}$ für alle reellen $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ und alle $v \in \mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p})$. Das bedeutet gerade

$$0 = \sigma - \overline{f}\sigma_0 + \overline{h_1}\sigma_1 + \ldots + \overline{h_s}\sigma_s \text{ für } \sigma,\sigma_0,\ldots,\sigma_s \in \sum \widehat{(F_\mathfrak{p},v)}^{2m}. \qquad (2.29.1)$$

Sei nun $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ reell und $v \in \mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p})$ beliebig.
OBdA können wir deshalb annehmen, dass $v(\overline{X_1}) < 0$ und $v(\overline{X_1}) \leq v(\overline{X_i})$ für alle $i \leq n$ gilt.
Sei $\mathcal{O}$ der zu v gehörige Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}$.
Dann gilt $v(N/\overline{X_1}^{2m}) > 0$ und somit $N/\overline{X_1}^{2m} \in \mathfrak{m}$.
Außerdem gilt $1 - N/\overline{X_1}^{2m} \in \mathcal{O}$.
Deshalb liegt $p(X) := X^{2m} - \left(1 - \frac{N}{\overline{X_1}^{2m}}\right)$ in $\mathcal{O}[X]$
und es gilt $p(X) \equiv X^{2m} - 1 \mod \mathfrak{m}$.
p hat also die einfache Nullstelle 1 in $\mathcal{O}/\mathfrak{m}$. Da v eine Rang1-Bewertung ist, gilt das henselsche Lemma (siehe Satz 1.10) in $\widehat{(F_\mathfrak{p},v)} = (\widehat{F_\mathfrak{p}},\widehat{v})$.
Daraus folgt, dass p eine Nullstelle $x \in \widehat{F_\mathfrak{p}}$ besitzt.
Also gilt $x^{2m} - \left(1 - \frac{N}{\overline{X_1}^{2m}}\right) = 0$.
Daraus folgt $N = \overline{X_1}^{2m} - \overline{X_1}^{2m}x^{2m}$.
Setzt man dies in das anfangs definierte Polynom f ein, ergibt sich
$\overline{f} = -\overline{X_1}^{2m}x^{2m} - \overline{X_2}^{2m} - \ldots - \overline{X_n}^{2m}$ und somit
$-\overline{f} = \overline{X_1}^{2m}x^{2m} + \overline{X_2}^{2m} + \ldots + \overline{X_n}^{2m} \in \sum \widehat{(F_\mathfrak{p},v)}^{2m}$.
Setzt man dies in (2.29.1) ein, ergibt sich
$0 = \sigma' + \sigma_1\overline{h_1} + \ldots + \sigma_s\overline{h_s}$ für $\sigma',\sigma_1,\ldots,\sigma_s \in \sum \widehat{(F_\mathfrak{p},v)}^{2m}$
woraus folgt, dass $\tau = \left\langle 1,\overline{h_1},\ldots,\overline{h_s}\right\rangle^*$ schwach $2m$-isotrop über $\widehat{(F_\mathfrak{p},v)}$ ist.

"$\Leftarrow$": Wenn τ schwach $2m$-isotrop über $\widehat{(F_\mathfrak{p},v)}$ ist, dann gilt für alle $f \in A$, dass $\left\langle 1,-\overline{f},\overline{h_1},\ldots,\overline{h_s}\right\rangle^*$ auch schwach $2m$-isotrop ist.
Dies gilt insbesondere für alle $f \in A$ mit $f > 0$ auf $W_\mathbb{R}(h)$.
Nach Satz 2.28 existiert deshalb für alle $f \in A$ mit $f > 0$ auf $W_\mathbb{R}(h)$ ein $\sigma \in \sum^{2m}$ mit $\sigma f \in 1 + M$.
Mit Satz 2.18 (3)$\Rightarrow$(1) folgt, dass M archimedisch ist. $\square$

2.4 Verallgemeinerung des Satzes von Schmüdgen

Unser eigentliches Ziel, die Verallgemeinerung des Satzes von Schmüdgen, ist eine Anwendung des Charakterisierungssatzes II. Bevor wir jedoch dazu kommen, benötigen wir noch ein Lemma, das allgemein für einen Körper K, der $\mathbb{R}$ enthält, gilt.

Sei also $K \supseteq \mathbb{R}$ ein Körper.

Lemma 2.30:
Sei T eine Präordnung der Stufe $2m$ in K. Wenn m ungerade ist, dann existiert eine Anordnung (der Stufe 2) $P \supseteq T$.

Beweis: Wir zeigen zuerst:

$$T = \bigcap_{\substack{T \subseteq S \\ S\ T-Sem.}} S,$$

wobei S alle T-Semiordnungen von K durchläuft, also alle Teilmengen $S \subseteq K$ mit $S + S \subseteq S$, $TS \subseteq S$, $1 \in S$, $-1 \notin S$, $K = S \cup -S$ und $S \cap -S = \{0\}$.

Dabei ist "$\subseteq$" klar.

Zeigen wir also "$\supseteq$":

Sei hierfür $x \in \bigcap_{\substack{T \subseteq S \\ S\ T-Sem.}} S$.
Annahme: $x \notin T$.
Wir definieren $T' := T - xT$ und zeigen, dass T' ein T-Modul der Stufe $2m$ ist.
Hierfür genügt es zu zeigen, dass $-1 \notin T'$ gilt, alle anderen Eigenschaften sind klar.
Angenommen es gilt $-1 \in T'$.
Dann existieren t_1,$t_2 \in T$ mit $-1 = t_1 - xt_2$.
Daraus folgt $x = \frac{1}{t_2} \cdot (1 + t_1) = \left(\frac{1}{t_2}\right)^{2m} \cdot t_2^{2m-1} \cdot (1 + t_1) \in T$ (da T eine Präordnung der Stufe $2m$ und somit multiplikativ ist). Dies ist aber ein Widerspruch zur anfangs getroffenen Annahme.
Also gilt $-1 \notin T'$ und somit ist T' ein T-Modul.
Sei $M \supseteq T'$ ein maximaler T-Modul.
Somit ist M nach Lemma 2.3 und Definition 2.4 eine T-Semiordnung
und nach Voraussetzung gilt somit $x \in M$.
Außerdem gilt $-x \in T' \subseteq M$, woraus $x \in -M$ folgt.
Daraus folgt $x \in M \cap -M = \{0\}$, da $M \cap -M$ nach Lemma 2.3 ein Primideal und K ein Körper ist.
Also gilt $x = 0$ und somit $x \in T$ was ein Widerspruch zur Annahme ist.
Also war diese falsch und insgesamt folgt $x \in T$,
und somit haben wir $T = \bigcap_{\substack{T \subseteq S \\ S\ T-Sem.}} S$ gezeigt.

Sei nun $T' := \sqrt[m]{T} := \{a \in K \mid a^m \in T\}$.

Behauptung: T' ist eine Präordnung (der Stufe 2) mit $T \subseteq T'$.

- $T \subseteq T'$:
  Aus $a \in T$ folgt $a^m \in T$. Also gilt $a \in T'$.
- $T' \cdot T' \subseteq T'$:
  Seien $a,b \in T'$ also $a^m,b^m \in T$. Daraus folgt $(ab)^m = a^m b^m \in T$. Also gilt $ab \in T'$.
- $K^2 \subseteq T'$:
  Es gilt $(a^2)^m = a^{2m} \in T$, da T Präordnung der Stufe $2m$ ist.
  Also gilt $a^2 \in T'$.
- $-1 \notin T'$:
  Angenommen es gilt $-1 \in T'$.Dann gilt nach Definition $(-1)^m \in T$.
  Da m ungerade ist gilt aber $(-1)^m = -1$, also folgt $-1 \in T$, was ein Widerspruch ist. Insgesamt gilt also $-1 \notin T'$.
  (Hier geht die Voraussetzung, dass m ungerade ist, ein.)
- $T' + T' \subseteq T'$:
  Seien $a,b \in T'$, also $a^m,b^m \in T$.
  OBdA können wir annehmen, dass $a,b \neq 0$ gilt.
  Sei $S \supseteq T$ eine beliebige T-Semiordnung (und damit auch automatisch eine Semiordnung der Stufe $2m$) und $\mathcal{O}(S)$, der wie in Satz 2.12 definierte, zugehörige Bewertungsring mit maximalem Ideal $\mathfrak{m}(S)$ und Restklassenkörper $\mathbb{R}$.
  Weiter sei v die zu $\mathcal{O}(S)$ gehörige Bewertung.
  OBdA sei $v(a) \leq v(b)$. Setze $c := \frac{b}{a}$, dann gilt $v(c) \geq 0$ und somit $c \in \mathcal{O}(S)$.
  Außerdem gilt $c^m = \frac{b^m}{a^m} = \frac{b^m a^m}{a^{2m}} \in T \subseteq S$.
  Also folgt $\overline{c}^m \in \overline{S \cap \mathcal{O}(S)} \subseteq \mathbb{R}^2$.
  Daraus folgt (wieder wegen m ungerade) $\overline{c} \subseteq \mathbb{R}^2$.
  Wir wählen $d \in K$ mit $\overline{d}^2 = 1 + \overline{c}$.
  Daraus folgt $\frac{1+\overline{c}}{\overline{d}^2} = 1$ und somit gilt
  $1 + c = d^2 \cdot (1 + \mu)$ für ein $\mu \in \mathfrak{m}(S)$.
  Dann gilt:

  $$\begin{aligned} &(1+c)^m = d^{2m}(1+\mu') \in TS \subseteq S \text{ (für ein } \mu' \in \mathfrak{m}(S)), \text{ daraus folgt} \\ &(a+b)^m = a^m(1+c)^m \in TS \subseteq S. \end{aligned}$$

  Da S eine beliebige T-Semiordnung war, gilt
  $(a+b)^m \in \bigcap_{\substack{T \subseteq S \\ S\ T-Sem.}} S = T.$
  Daraus folgt $(a+b) \in T'$.

Damit ist gezeigt, dass T' eine Präordnung (der Stufe 2) ist,
und somit existiert nach 1.2 eine Anordnung P (der Stufe 2) mit
$P \supseteq T' \supseteq T$. □

Dieses Lemma wurde erstmals 1979 von Eberhard Becker bewiesen [B2] und existierte somit schon lange vor der Arbeit von Wörmann und Jacobi.

Jetzt ist die komplette Vorarbeit geleistet und wir kommen zu unserem eingangs erwähnten Ziel.

Satz 2.31 (Verallgemeinerung des Satzes von Schmüdgen)**:**
Sei $m \in \mathbb{Z}$ ungerade.
Seien $h_1, \ldots, h_s \in A = \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ so, dass $W_{\mathbb{R}}(h) = W_{\mathbb{R}}(h_1, \ldots, h_s)$ kompakt ist..
Weiter sei

$$T^{2m}(h_1, \ldots, h_s) = \sum_{\nu \in \{0, \ldots, 2m-1\}^s} h_1^{\nu_1} \cdots h_s^{\nu_s} \sum{}^{2m} = M^{2m}((h_1^{\nu_1} \cdots h_s^{\nu_s})_\nu),$$

und $f \in A$ mit $f > 0$ auf $W_{\mathbb{R}}(h)$.
Dann gilt $f \in T^{2m}(h_1, \ldots, h_s)$.

Beweis: Wir zeigen, dass $T := T^{2m}(h_1, \ldots, h_s)$ archimedisch ist.
Mit dem Charakterisierungssatz II (Satz 2.29) müssen wir dafür zeigen, dass die Form $\tau := \langle\langle 1, \overline{h_1}, \ldots, \overline{h_s} \rangle\rangle_{2m}^{*}$ schwach $2m$-isotrop über $\widehat{(F_{\mathfrak{p}}, v)}$ ist, für alle reellen $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ und alle $v \in \mathfrak{R}_\infty^1(\mathfrak{p})$.
Sei dazu $\mathfrak{p}$ ein beliebiges reelles Primideal von A und $v \in \mathfrak{R}_\infty^1(\mathfrak{p})$ beliebig.
Weiter sei $K := \widehat{(F_{\mathfrak{p}}, v)}$.

Annahme: τ ist nicht schwach $2m$ isotrop über K.

Dann gilt $-1 \notin T^{2m}(\overline{h_1}, \ldots, \overline{h_s})$.
Also ist $T^{2m}(\overline{h_1}, \ldots, \overline{h_s})$ eine Präordnung der Stufe $2m$ in K. (Die anderen Eigenschaften sind klar.)
Nach Lemma 2.30 existiert dann eine Anordnung $P \supseteq T^{2m}(\overline{h_1}, \ldots, \overline{h_s})$ in K.
Wegen $\overline{h_i} \in T^{2m}(\overline{h_1}, \ldots, \overline{h_s})$ für alle $i \leq s$, sind alle $\overline{h_i}$ nicht-negativ bezüglich P.
Dies ist aber ein Widerspruch zu Lemma 2.26, das wegen der Kompaktheit von $W_{\mathbb{R}}(h)$ besagt, dass $\overline{h_1}, \ldots, \overline{h_s}$ indefinit bezüglich jeder Anordnung von K sind.

Also war die Annahme falsch und es gilt, dass τ schwach $2m$-isotrop über K ist.

Insgesamt folgt, dass $T^{2m}(h_1, \ldots, h_s)$ archimedisch ist.

Wegen $f > 0$ auf $W_{\mathbb{R}}(h)$ folgt mit Satz 2.16 dann $f \in T^{2m}(h_1, \ldots, h_s)$. □

3 Gegenbeispiel zur Verallgemeinerung des Satzes von Schmüdgen im Fall m=2

Wie gerade gesehen, konnten wir für den Fall dass m ungerade ist, eine Verallgemeinerung des Satzes von Schmüdgen auf Summen $2m$-ter Potenzen erzielen. Dabei ging die Voraussetzung, dass m ungerade ist, explizit im Beweis von Satz 2.31 ein, da wir ansonsten Lemma 2.30 nicht hätten benutzen dürfen.
Die Frage, die sich dann natürlich stellt, ist, ob diese Verallgemeinerung für gerades m auch gilt und man es einfach nicht oder eben anders beweisen kann, oder aber, ob diese Verallgemeinerung für gerades m im Allgemeinen gar nicht gilt.
Dies hätte man dann gezeigt, wenn man ein Gegenbeispiel zu Satz 2.31 finden könnte, das heißt, man müsste zu einer geraden Zahl m Polynome $f,h_1,\ldots,h_s \in A = \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ finden, die alle Voraussetzungen von Satz 2.31 erfüllen und es gilt trotzdem $f \notin T^{2m}(h_1,\ldots,h_s)$.
Dass es so ein Gegenbeispiel gibt und somit die Verallgemeinerung von Schmüdgen im allgemeinen für gerades m nicht gilt, zeigen wir in diesem Abschnitt.

Formulieren wir also zuerst die Existenz solch eines Gegenbeispiels in einer Behauptung und beweisen diese dann anschließend.

Behauptung 3.1 (Gegenbeispiel)**:**
Sei $m \in \mathbb{N}$ gerade und $A = \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$. Weiter seien $h_1,\ldots,h_s \in A = \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ mit $W_{\mathbb{R}}(h)$ kompakt. Es existiert ein $f \in A$ mit $f > 0$ auf $W_{\mathbb{R}}(h)$ und
$f \notin T^{2m}(h_1,\ldots,h_s) = \sum\limits_{\nu\in\{0,\ldots,2m-1\}^s} h_1^{\nu_1}\cdots h_s^{\nu_s}\sum^{2m}$.

Beweis: Als erstes wählen wir unser gerades $m \in \mathbb{Z}$.
Sei also $m = 2$.
Wir wählen als Ring A den Polynomring über $\mathbb{R}$ in einer Variablen (also $n = 1$).
Es ist also $A = \mathbb{R}[X]$.
Wir definieren

$$h := h_1 := 1 - X^2.$$

Dann gilt

$$h^2 = X^4 - 2X^2 + 1 \qquad \text{und} \qquad h^3 = -X^6 + 3X^4 - 3X^2 + 1,$$

und weiter

$$T(h) := T^{2m}(h) = \sum A^4 + h \cdot \sum A^4 + h^2 \cdot \sum A^4 + h^3 \cdot \sum A^4$$

Weiter wählen wir

$$f := X + 2.$$

Es gilt dann

$$W_{\mathbb{R}}(h) = [-1{,}1] \text{ ist kompakt} \qquad \text{und es gilt} \qquad f > 0 \text{ auf} W_{\mathbb{R}}(h)$$

Wir zeigen nun, dass $f \notin T(h)$ gilt.

Annahme: $f \in T(h)$
Dann gilt: $f = \sigma_0 + \sigma_1 h + \sigma_2 h^2 + \sigma_3 h^3$ für gewisse $\sigma_i \in \sum A^4$.

Bevor wir die Annahme nun zu einem Widerspruch führen, zuerst noch ein paar einfache Bemerkungen, die entweder aus der Linearen Algebra bekannt sind oder die ganz einfach aus den bisherigen Definitionen folgen und die im weiteren Verlauf des Beweises benutzt werden:

- Für $i \in \{0, \ldots, 3\}$ gilt entweder $\deg \sigma_i = 4 \cdot n_i$ für ein $n_i \in \mathbb{N}$ oder $\deg \sigma_i = -\infty$.
- Da $f \neq 0$ gilt, sind nicht alle $\sigma_i = 0$ und deshalb existiert ein $i \in \{0, \ldots, 3\}$ mit $\deg \sigma_i \geq 0$. Somit besitzt $\{\deg \sigma_i \mid 0 \leq i \leq 3\}$ ein Maximum und es gilt $\max\limits_{i=0,\ldots,3} \{\deg \sigma_i\} \geq 0$.
- Für $p \in A$ beliebig bezeichnen wir den Leitkoeffizienten von p im folgenden mit LK(p).
- Für $p,q \in A \backslash \{0\}$ gilt $\deg(pq) = \deg p + \deg q$ und es gilt LK(pq) =LK(p)+LK(q).
- Für $p,q \in A$ gilt: Ist $\deg p \neq \deg q$, so gilt $\deg(p + q) = \max\{\deg p, \deg q\}$.
- für $p,q \in A$ gilt: Ist $\deg p = \deg q$ und LK(p)+LK(q) $\neq 0$, so gilt $\deg(p + q) = \deg p = \deg q$.
- Wenn $\sigma_i \neq 0$ gilt, so ist LK(σ_i) > 0.

Wir führen nun eine Fallunterscheidung durch und unterscheiden die Fälle je nachdem welches der σ_i $(0 \leq i \leq 3)$ maximalen Grad hat.

Fall 1: $\max_{i=0,\ldots,3}\{\deg\sigma_i\} = \deg\sigma_3$

Dann gilt

$\deg\sigma_3 + 6 > \deg\sigma_3 + 4 \geq \deg\sigma_2 + 4$, und
$\deg\sigma_3 + 6 > \deg\sigma_3 + 2 \geq \deg\sigma_1 + 2$, und
$\deg\sigma_3 + 6 > \deg\sigma_3 \geq \sigma_0$.

Aus diesen drei Ungleichungen folgt

$\deg(h^3\sigma_3) > \deg(h^2\sigma_2)$, und
$\deg(h^3\sigma_3) > \deg(h\sigma_1)$, und
$\deg(h^3\sigma_3) > \deg\sigma_0$.

Daraus folgt

$$\deg f = \deg(h^3\sigma_3) = 6 + \deg\sigma_3 \geq 6,$$

was ein Widerspruch ist.

Fall 2: $\max_{i=0,\ldots,3}\{\deg\sigma_i\} = \deg\sigma_2$

Dann gilt

$\deg\sigma_2 + 4 > \deg\sigma_2 + 2 \geq \deg\sigma_1 + 2$, und
$\deg\sigma_2 + 4 > \deg\sigma_2 \geq \sigma_0$.

Aus diesen zwei Ungleichungen folgt

$$\begin{aligned} &\deg(h^2\sigma_2) > \deg(h\sigma_1), \text{ und} \\ &\deg(h^2\sigma_2) > \deg\sigma_0. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Zusätzlich folgt aus Fall 1, dass $\deg\sigma_2 > \deg\sigma_3$ gilt.
Sei ohne Einschränkung $\sigma_3 \neq 0$, das bedeutet dann $\deg\sigma_3 = 4n_3$.

$$\begin{aligned} &\text{Dann gilt } 4n_2 > 4n_3, \text{ daraus folgt } n_2 > n_3, \\ &\text{daraus folgt } n_2 - 1 \geq n_3, \text{ daraus folgt } 4n_2 - 4 \geq 4n_3, \\ &\text{und daraus folgt } \deg\sigma_2 - 4 \geq \deg\sigma_3. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Daraus folgt $\deg\sigma_2 + 4 \geq \deg\sigma_3 + 8 > \deg\sigma_3 + 6$,
woraus $\deg(h^2\sigma_2) > \deg(h^3\sigma_3)$ folgt.
Zusammen mit (3.1.1) folgt

$$\deg f = \deg(h^2\sigma_2) = 4 + \deg\sigma_2 \geq 4,$$

was wiederum ein Widerspruch ist.

Fall 3: $\max\limits_{i=0,\ldots,3}\{\deg\sigma_i\} = \deg\sigma_1$

Es gilt $\deg\sigma_1 + 2 > \deg\sigma_1 \geq \deg\sigma_0$,
woraus

$$\deg(h\sigma_1) > \deg\sigma_0 \text{ folgt.} \tag{3.1.3}$$

Aus Fall 2 folgt, dass $\deg\sigma_1 > \deg\sigma_2$ gilt.
Mit der gleichen Argumentation wie in (3.1.2) folgt $\deg\sigma_1 - 4 \geq \deg\sigma_2$.
Daraus folgt $\deg\sigma_1 + 2 \geq \deg\sigma_2 + 6 > \deg\sigma_2 + 4$,
woraus

$$\deg(h\sigma_1) > \deg(h^2\sigma_2) \text{ folgt.} \tag{3.1.4}$$

Aus Fall 1 folgt $\deg\sigma_1 > \deg\sigma_2$, woraus wieder wie in (3.1.2)

$$\deg\sigma_1 - 4 \geq \deg\sigma_2 \text{ folgt.}$$

Wir unterscheiden an dieser Stelle nochmal in zwei Unterfälle.

Fall 3.1 $\deg\sigma_1 - 4 > \deg\sigma_3$

Dann gilt $\deg\sigma_1 + 2 > \deg\sigma_3 + 6$,
woraus $\deg(h\sigma_1) > \deg(h^3\sigma_3)$ folgt.
Zusammen mit (3.1.3) und (3.1.4) folgt

$$\deg f = \deg(h\sigma_1) = 2 + \deg\sigma_1 \geq 2,$$

was wieder einen Widerspruch darstellt.

Fall 3.2 $\deg\sigma_1 - 4 = \deg\sigma_3$

Daraus folgt $\deg\sigma_1 + 2 = \deg\sigma_3 + 6$,
und daraus

$$\deg(h\sigma_1) = \deg(h^3\sigma_3). \tag{3.1.5}$$

Es gilt $\mathrm{LK}(h\sigma_1) = -\mathrm{LK}(\sigma_1) < 0$,
und $\mathrm{LK}(h^3\sigma_3) = -\mathrm{LK}(\sigma_3) < 0$.
Daraus folgt $\mathrm{LK}(h\sigma_1)+\mathrm{LK}(h^3\sigma_3) < 0$, woraus mit (3.1.5)

$$\deg(h\sigma_1 + h^3\sigma_3) = \deg(h\sigma_1) \text{ folgt.}$$

Zusammen mit (3.1.3), (3.1.4) und (3.1.5) folgt daraus

$$\deg f = \deg(h\sigma_1) = 2 + \deg\sigma_1 \geq 2,$$

was wieder ein Widerspruch ist.

Fall 4: $\max_{i=0,\ldots,3}\{\deg\sigma_i\} = \deg\sigma_0$

Aus Fall 3 folgt $\deg\sigma_0 > \deg\sigma_1$,
woraus wieder wie in (3.1.2) $\deg\sigma_0 - 4 \geq \deg\sigma_1$ folgt.
Daraus folgt $\deg\sigma_0 \geq \deg\sigma_1 + 4 > \deg\sigma_1 + 2$, und daraus

$$\deg\sigma_0 > \deg(h\sigma_1). \tag{3.1.6}$$

Aus Fall 1 folgt $\deg\sigma_0 > \deg\sigma_3$.
Daraus folgt wieder wie in (3.1.2)

$$\deg\sigma_0 - 4 \geq \deg\sigma_3. \tag{3.1.7}$$

Aus Fall 2 folgt $\deg\sigma_0 > \deg\sigma_2$.
Auch hier folgt wieder wie in (3.1.2)

$$\deg\sigma_0 - 4 \geq \deg\sigma_2. \tag{3.1.8}$$

An dieser Stelle unterscheiden wir (3.1.7) und (3.1.8) in 3 Unterfälle.

Fall 4.1 $\deg\sigma_0 - 4 = \deg\sigma_3$ (damit folgt automatisch $\deg\sigma_3 \geq \deg\sigma_2$)
Daraus folgt $\deg\sigma_0 = \deg\sigma_3 + 4 < \deg\sigma_3 + 6$.
Daraus folgt $\deg\sigma_0 < \deg(h^3\sigma_3)$.
Insgesamt folgt aus Fall 4.1 zusammen mit (3.1.6) dann

$$\deg f = \deg(h^3\sigma_3) = 6 + \deg\sigma_3 \geq 6,$$

was wieder ein Widerspruch ist.

Fall 4.2 $\deg\sigma_0 - 4 > \deg\sigma_3$ und $\deg\sigma_0 - 4 > \deg\sigma_2$
Mit der Argumentation aus (3.1.2) folgt aus den beiden Ungleichungen,
dass $\deg\sigma_0 - 8 \geq \deg\sigma_3$ und $\deg\sigma_0 > \deg\sigma_2 + 4$ gilt.
Daraus folgt dann $\deg\sigma_0 \geq \deg\sigma_3 + 8 > \deg\sigma_3 + 6$,
woraus $\deg\sigma_0 > \deg(h^3\sigma_3)$ folgt und $\deg\sigma_0 > \deg(h^2\sigma_2)$.
Aus diesen beiden Ungleichungen folgt zusammen mit (3.1.6) dann

$$\deg f = \deg\sigma_0 = 4 \cdot n_0$$

was auch hier wiederum ein Widerspruch ist, da $4 \cdot n_o \neq 1$ gilt.

Fall 4.3 $\deg\sigma_0 - 4 > \deg\sigma_3$ und $\deg\sigma_0 - 4 = \deg\sigma_2$
Aus der ersten Ungleichung folgt direkt aus Fall 4.2, dass

$$\deg\sigma_0 > \deg(h^3\sigma_3) \text{ gilt.} \tag{3.1.9}$$

Aus der zweiten folgt $\deg \sigma_0 = \deg \sigma_2 + 4$, was äquivalent ist zu

$$\deg \sigma_0 = \deg(h^2\sigma_2). \tag{3.1.10}$$

Es gilt $\mathrm{LK}(\sigma_0) > 0$,
und $\mathrm{LK}(h^2\sigma_2) = \mathrm{LK}(\sigma_2) > 0$.
Daraus folgt $\mathrm{LK}(\sigma_0)+\mathrm{LK}(h^2\sigma_2) > 0$, woraus mit (3.1.10)
$\deg(\sigma_0 + h^2\sigma_2) = \deg(\sigma_0)$ folgt.
Zusammen mit (3.1.6) und (3.1.9) folgt daraus dann

$$\deg f = \deg(\sigma_0) = \deg(h^2\sigma_2) = 4 + \deg \sigma_2 \geq 4,$$

und somit führt auch dieser Fall zu einem Widerspruch.

Insgesamt führen also alle Fallunterscheidungen zu einem Widerspruch, was bedeutet, dass unsere Annahme falsch war.
Also gilt $f \notin T(h)$. $\square$

4 Genauere Betrachtung des Falls $A = \mathbb{R}[X_1]$

Wie wir gerade gesehen haben, gilt die Verallgemeinerung des Satzes von Schmüdgen (2.31) für gerades m nicht.
Daraus lässt sich schließen, dass die relativ einfache Bedingung der Kompaktheit von $W_{\mathbb{R}}(h)$ hier nicht dafür ausreicht, dass $T^{2m}(h_1,\ldots,h_s)$ archimedisch ist. Deshalb kann man auch Satz 2.16 nicht anwenden.

Man muss also den Umweg über den Charakterisierungssatz II (2.29) und seine bewertungstheoretischen Bedingungen gehen, um zu sehen ob ein Modul $M = M^{2m}(h_1,\ldots,h_s)$ (der Stufe $2m$) archimedisch ist und somit (wegen Satz 2.16) aus $f > 0$ auf $W_{\mathbb{R}}(h)$ auch $f \in M$ folgt.
Der Vorteil ist dafür aber, dass man für M nicht $T^{2m}(h_1,\ldots,h_s)$ wählen muss, was bei der Verallgemeinerung des Satzes von Schmüdgen ja der Fall ist, sondern auch $M^{2m}(h_1,\ldots,h_s)$ nehmen kann. Somit hat man, im Fall dass M wirklich archimedisch ist, für alle $f > 0$ auf $W_{\mathbb{R}}(h)$ eine einfachere Darstellung, da die Produkte der h_i's wegfallen.
Der Umweg über den Charakterisierungssatz II ist somit nicht nur eine Möglichkeit um auch bei geradem m sagen zu können, ob ein f mit $f > 0$ auf $W_{\mathbb{R}}(h)$ eine bestimmte Darstellung (aus Summen $2m$-ter Potenzen) hat, sondern er kann auch für ungerades m eine Vereinfachung der Darstellung liefern.

Zur Erinnerung und weil der Satz für diesen Abschnitt so wichtig ist, zitieren wir ihn an dieser Stelle noch einmal.

Charakterisierungssatz II (Satz 2.29): *Sei $M = M^{2m}(h_1,\ldots,h_s)$ ein Modul der Stufe $2m$. Dann ist M genau dann archimedisch, wenn $W_{\mathbb{R}}(h)$ kompakt ist und für alle reellen $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ und alle $v \in \mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p})$, die Form $\tau = \left\langle 1,\overline{h_1},\ldots,\overline{h_s}\right\rangle^*$ schwach $2m$-isotrop über der Komplettierung $\widehat{(F_{\mathfrak{p}},v)}$ ist.*

Definition: Für ein $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ und eine Bewertung v auf F_p nennen wir den Körper $\widehat{(F_{\mathfrak{p}},v)}$ ***zulässig***, wenn $\mathfrak{p}$ reell ist und $v \in \mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p})$ gilt.
Die zulässigen Körper sind also genau die Körper über denen τ schwach $2m$-isotrop

sein muss, damit $M^{2m}(h_1, \ldots, h_s)$ archimedisch ist.

Die Anzahl der zulässigen Körper kann natürlich sehr hoch sein (je nachdem wie viel reelle Primideale $\mathfrak{p}$ es gibt und wie viele Bewertungen in $\mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p})$ liegen) und somit ist es natürlich alles andere als einfach, die schwache $2m$-Isotropie von τ zu prüfen.

Wir wollen uns in diesem Abschnitt deshalb auf den Fall $A = \mathbb{R}[X_1] = \mathbb{R}[X]$ beschränken und für diesen Fall einerseits die reellen Primideale in $\operatorname{Spec} A$ als auch die Bewertungen in $\mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p})$ und somit insbesondere die zulässigen Körper nicht nur auf eine geringe Anzahl bringen, sondern auch konkret bestimmen.
Wie wir im ersten Teil des Abschnittes sehen werden, gibt es für $A = \mathbb{R}[X]$ sogar nur eine Bewertung, die die Voraussetzungen erfüllt, und somit nur einen zulässigen Körper $\widehat{(F_\mathfrak{p}, v)}$ über dem die schwache $2m$-Isotropie nachgeprüft werden muss.
Wir machen somit aus dem Begriff "für alle“ im Charakterisierungssatz II eine konkrete Aussage für nur eine Bewertung beziehungsweise einen Körper, und bekommen somit eine deutlich einfachere Formulierung des Satzes.

Im zweiten Teil des Abschnittes werden wir dann sogenannte Restklassenformen einführen, mit deren Hilfe wir dann im dritten Teil einen Satz beweisen werden, der es uns erlaubt, die schwache $2m$-Isotropie von τ über $\mathbb{R}$ anstatt über $\widehat{(F_\mathfrak{p}, v)}$ zu prüfen, was dann noch einmal zu einer Verbesserung des Charakterisierungssatzes führen wird.

Sei also ab jetzt immer $\mathbf{A} = \mathbb{R}[\mathbf{X}]$.

4.1 Bestimmung der zulässigen Körper

Schauen wir als Erstes, welches die reellen Primideale in A sind.
Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass

$$\operatorname{Spec} A = \{0\} \cup \{X - a \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{(X-a)^2 + b \mid a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0\}$$

gilt.
Sei also $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$.
Wir betrachten die 3 verschiedenen Möglichkeiten für $\mathfrak{p}$.

(I) $\mathfrak{p} = 0$.
Dann gilt $\overline{A} := A/\mathfrak{p} = \mathbb{R}[X]$.
$\mathbb{R}[X]$ besitzt eine Anordnung, also ist $\mathfrak{p}$ reell.

(II) $\mathfrak{p} \in \{X - a \mid a \in \mathbb{R}\}$.
Dann gilt $\overline{A} = \mathbb{R}$,
und somit ist $\mathfrak{p}$ reell.

(III) $\mathfrak{p} \in \{(X - a)^2 + b \mid a,b \in \mathbb{R}, b \neq 0\}$.
Dann gilt $\overline{A} = \mathbb{C}$,
und somit ist $\mathfrak{p}$ nicht reell.

Wir müssen also im weiteren Verlauf nur noch die beiden Fälle (I) und (II) betrachten.

Kümmern wir uns jetzt um die Menge $\mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p})$.

Fall I: Sei $\mathfrak{p} = 0$

Dann gilt $F_\mathfrak{p} = \operatorname{Quot} \overline{A} = \mathbb{R}(X)$.
Sei $v \in \mathfrak{R}^1(\mathfrak{p})$, das bedeutet, dass v eine Rang1-Bewertung ist und dass der Restklassenkörper $\overline{\mathbb{R}(X)}_v$ reell ist.

Behauptung: v ist trivial auf $\mathbb{R}$.

Angenommen $v|_\mathbb{R}$ wäre nicht trivial. Der Restklassenkörper von $v|_\mathbb{R}$ ist als Unterkörper von $\overline{\mathbb{R}(X)}_v$ auch reell. $\mathbb{R}$ hätte somit eine nicht-triviale Bewertung mit reellem Restklassenkörper, was nach Korollar 1.8 bedeuten würde, dass $\mathbb{R}$ eine nicht-archimedische Anordnung besitzen würde. Dies wäre aber ein Widerspruch.
v muss also auf $\mathbb{R}$ trivial sein.

Nach Satz 1.6 kann v dann entweder die Gradbewertung v_∞ oder eine p-adische Bewertung v_p für ein irreduzibles Polynom $p \in \mathbb{R}[X]$ sein. (Definition der Bewertungen auf Seite 11)
v_∞ hat den Restklassenkörper $\mathbb{R}$ und somit einen reellen Restklassenkörper, v_p hat den Restklassenkörper $\mathbb{R}[X]/p$ und somit nur dann einen reellen Restklassenkörper, wenn $p = X - a$ für ein $a \in \mathbb{R}$ gilt.
Es gilt also

$$\mathfrak{R}^1(\mathfrak{p}) = \{v_\infty\} \cup \{v_p \mid p = X - a,\, a \in \mathbb{R}\}.$$

Es gilt:
(i) $v_\infty\left(\overline{X}\right) = -1 < 0$ und somit $v \in \mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p})$;
(ii) $v_p\left(\overline{X}\right) = 1 > 0$ für $p = X$, und somit $v_p \notin \mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p})$;
(iii) $v_p\left(\overline{X}\right) = 0$ für $p = X - a$ und $a \neq 0$, und somit $v_p \notin \mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p})$;
Also folgt

$$\mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p}) = \{v_\infty\}.$$

Fall II: Sei $\mathfrak{p} = X - a$ für ein $a \in \mathbb{R}$.

Dann gilt $F_\mathfrak{p} = \operatorname{Quot} \overline{A} = \mathbb{R}$.
Mit der gleichen Argumentation wie eben muss für $v \in \mathfrak{R}^1(\mathfrak{p})$ gelten, dass v auf $\mathbb{R}$ trivial ist. Also ist in diesem Fall v die triviale Bewertung.
Dann gilt

$v\left(\overline{X}\right) = 0$ und somit $v \notin \mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p})$.
Also folgt

$$\mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p}) = \emptyset.$$

Insgesamt haben wir somit nur den einen zulässigen Körper $\widehat{(F_\mathfrak{p},v)} = \widehat{(\mathbb{R}(X),v_\infty)}$.

Es gilt $v_\infty\left(\frac{1}{X}\right) = 1$ und somit gilt nach [E-P] (1.3.5)

$$\begin{aligned}\widehat{(\mathbb{R}(X),v_\infty)} &= \left\{\sum_{i=k}^{\infty} a_i \left(\frac{1}{X}\right)^i \mid k \in \mathbb{Z},\, a_i \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\sum_{i=-\infty}^{k} a_i X^i \mid k \in \mathbb{Z},\, a_i \in \mathbb{R}\right\} \\ &=: \mathbb{R}\left(\left(\frac{1}{X}\right)\right)\end{aligned}$$

Wenn man nun die bisherigen Ergebnisse zusammenfasst und in den Charakterisierungssatz II einbaut ergibt sich folgende vereinfachte Formulierung.

Satz 4.1 (Charakterisierungssatz II für $\mathbb{R}[X]$)**:**
Sei $M = M^{2m}(h_1,\ldots,h_s)$ ein Modul der Stufe 2m. Dann ist M genau dann archimedisch, wenn $W_\mathbb{R}(h)$ kompakt ist und die Form $\tau = \langle 1,h_1,\ldots,h_s\rangle^*$ schwach 2m-isotrop über $\mathbb{R}\left(\left(\frac{1}{X}\right)\right) := \widehat{(\mathbb{R}(X),v_\infty)}$ ist.

4.2 Die Restklassenformen einer regulären Form

In diesem Abschnitt führen wir die sogenannten Restklassenformen vom Grad $2m$ einer gegebenen regulären Form ein. Wir verallgemeinern hierfür die in [E-P] (Abschnitt 6.3) eingeführten Restklassenformen (vom Grad 2) auf einen beliebigen, geraden Grad $2m$.
Dies machen wir ganz allgemein für einen beliebigen Körper K mit einer nicht-trivialen Bewertung v auf K.
Mit Hilfe dieser Restklassenformen beweisen wir später einen Satz, der es uns erlaubt die schwache $2m$-Isotropie anstatt über einem bewerteten Körper (K,v) über seinem Restklassenkörper $\overline{K}_v$ zu betrachten.
Dies führt meistens zu einer Verbesserung, da die Restklassenkörper oft einfacher sind als die ursprünglichen Körper.
Dies gilt insbesondere auch in unserem Fall, wo der Restklassenkörper von $\widehat{(\mathbb{R}(X),v_\infty)} = \mathbb{R}\left(\left(\frac{1}{X}\right)\right)$ einfach $\mathbb{R}$ ist, was man sich anhand der Definition von $\mathbb{R}\left(\left(\frac{1}{X}\right)\right)$ und v leicht

klar macht, oder was man auch anhand des Beispiels 2 auf Seite 11 mit Satz 1.9 sieht.

Sei also K ein Körper, $\rho = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$ eine reguläre Form über K und
$v : K \twoheadrightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ eine nicht-triviale Bewertung auf K.

Als Erstes wählen wir Elemente c_i $(1 \leq i \leq k)$ so, dass die Werte $v(c_i)$ ein Repräsentantensystem der Menge $\{v(a_\nu) + 2m\Gamma \mid 1 \leq \nu \leq r\} \subseteq \Gamma/2m\Gamma$ bilden.
Als Repräsentant von $0 + 2m\Gamma$ wählen wir immer 1.
Als nächstes ordnen wir die Elemente a_ν $(1 \leq \nu \leq r)$ in Blöcke
a_{ij} $(1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq r_i)$ so, dass für festes i und alle j

$$v(a_{ij}) \equiv v(c_i) \bmod 2m\Gamma$$

gilt.
Es gilt dann $v(a_{ij}{c_i}^{-1}) = v(a_{ij}) - v(c_i) = 2m \cdot x$ für ein $x \in \Gamma$.
Da v surjektiv ist, existiert ein $b_{ij} \in K^\times$ mit $v(b_{ij}) = -x$.
Wir setzen

$$u_{ij} := a_{ij}{c_i}^{-1} b_{ij}^{2m}$$

Dann gilt $v(u_{ij}) = v(a_{ij}{c_i}^{-1} b_{ij}^{2m}) = 0$ und somit ist u_{ij} eine Einheit in $\mathcal{O}_v$.
Da $a_{ij} b_{ij}^{2m} = c_i u_{ij}$ gilt, und sich a_{ij} und $c_i u_{ij}$ nur um eine $2m$-te Potenz unterscheiden, ist $\rho = \langle a_1, \ldots, a_r \rangle$ isomorph (als Form von Grad $2m$) zu der Summe

$$c_1 \langle u_{11}, \ldots, u_{1r_1} \rangle \perp \ldots \perp c_k \langle u_{k1}, \ldots, u_{kr_k} \rangle$$

Betrachten wir die u_{ij}'s in $\overline{K}_v$, dann gilt $\overline{u}_{ij} \neq 0$, da $u_{ij} \notin \mathfrak{m}_v$ gilt.
Deshalb ist

$$\overline{\rho}^{(i)} := \langle \overline{u}_{i1}, \ldots, \overline{u}_{ir_i} \rangle$$

für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ eine reguläre Form (vom Grad $2m$) über $\overline{K}_v$.
Diese Formen $\overline{\rho}^{(i)}$ werden die ***Restklassenformen*** (vom Grad $2m$) von ρ genannt.
Die Form, die zu $c_i = 1$ gehört, wird ***erste Restklassenform*** von ρ genannt.

Bemerkung: Diese Restklassenformen sind nicht eindeutig, da die Wahl der b_{ij}'s nur bis auf eine Einheit in $\mathcal{O}_v$ bestimmt ist. Deshalb sind die u_{ij}'s nur bis auf eine $2m$-te Potenz einer Einheit in $\mathcal{O}_v$ bestimmt. Dies ist aber für den späteren Gebrauch der Restklassenformen irrelevant.

An dieser Stelle betrachten wir zum besseren Verständnis und zur Verdeutlichung der eben eingeführten Restklassenformen ein Beispiel und wählen den Körper $K = \mathbb{R}(X)$ und die Bewertung $v = v_\infty$. Damit haben wir einerseits ein intuitives und einfaches erstes Beispiel und einerseits genau denjenigen Körper mit der Bewertung auf dessen Komplettierung wir die allgemein eingeführten Restklassenformen später konkret anwenden.

Beispiel:
$\rho = \langle\ \underbrace{(2x^5 - 3X^2 + 4X)}_{=:a_1},\ \underbrace{(x^2-3)}_{=:a_2},\ \underbrace{(\frac{3X-6}{X^2+1})}_{=:a_3},\ \underbrace{(-2X^{-3})}_{=:a_4},\ \underbrace{(X^3 + 2X^2 - X)}_{=:a_5},\ \underbrace{(-\frac{4X+1}{X^8})}_{=:a_6}\ \rangle$
ist eine reguläre Form über $\mathbb{R}(X)$.
$v_\infty : \mathbb{R}(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ ist die auf Seite 11 eingeführte Gradbewertung auf $\mathbb{R}(X)$.
Wir suchen die Restklassenformen vom Grad 6 (m=3) von ρ.
Es gilt:
$v(2x^5 - 3X^2 + 4X) = -5 \equiv 1 \bmod 6\mathbb{Z}$;
$v(x^2 - 3) = -2 \equiv 4 \bmod 6\mathbb{Z}$;
$v(\frac{3X-6}{X^2+1}) = 1 \equiv 1 \bmod 6\mathbb{Z}$;
$v(-2X^{-3}) = 3 \equiv 3 \bmod 6\mathbb{Z}$.
$v(X^3 + 2X^2 - X) = -3 \equiv 3 \bmod 6\mathbb{Z}$.
$v(\frac{4X+1}{X^8}) = 7 \equiv 1 \bmod 6\mathbb{Z}$.
Wir wählen dann $c_1 = X^{-1}$, $c_2 = X^2$ und $c_3 = X^3$ als Repräsentantensystem von $\{v(a_\nu) + 6\mathbb{Z} \mid 1 \leq \nu \leq 6\} = \{1 + 6\mathbb{Z},\ 3 + 6\mathbb{Z},\ 4 + 6\mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
Die Umordnung der a_i's ergibt dann

$$a_{11} := a_1, \quad a_{12} := a_3, \quad a_{13} := a_6, \quad a_{21} := a_2, \quad a_{31} := a_4, \quad a_{32} := a_5.$$

Für die oben eingeführten Indizes bedeutet dies gerade $k = 3$, $r_1 = 3$, $r_2 = 1$ und $r_3 = 2$.
Kommen wir nun zu der Wahl der b_{ij}'s und somit zu den u_{ij}'s.
Es gilt:

- $v(a_{11}{c_1}^{-1}) = v(a_{11}) - v(c_1) = -5 - 1 = -6$, daher bietet sich $b_{11} := X^{-1}$ an und dann gilt $u_{11} = 2 - 3/X^3 + 4/X^4$;

- $v(a_{12}{c_1}^{-1}) = v(a_{12}) - v(c_1) = 1 - 1 = 0$, daher bietet sich $b_{12} := 1$ an und dann gilt $u_{12} = \frac{3X^2-6X}{X^2+1} = 3 - \frac{6X+3}{X^2+1}$;

- $v(a_{13}{c_1}^{-1}) = v(a_{13}) - v(c_1) = 7 - 1 = 6$, daher bietet sich $b_{13} := X$ an und dann gilt $u_{13} = \frac{4X^8+X^7}{X^8} = 4 + \frac{1}{X}$;

- $v(a_{21}{c_2}^{-1}) = v(a_{21}) - v(c_2) = -2 + 2 = 0$, daher bietet sich $b_{21} := 1$ an und dann gilt $u_{21} = 1 - \frac{3}{X^2}$;

- $v(a_{31}{c_3}^{-1}) = v(a_{31}) - v(c_3) = 3 + 3 = 6$, daher bietet sich $b_{31} := X$ an und dann gilt $u_{31} = -2$;

- $v(a_{32}{c_3}^{-1}) = v(a_{32}) - v(c_3) = -3 + 3 = 0$, daher bietet sich $b_{32} := 1$ an und dann gilt $u_{32} = 1 + 2/X - 1/X^2$.

Die drei (wegen $k = 3$) Restklassenformen vom Grad 6 von ρ sind dann

$$\overline{\rho}^{(1)} = \langle \overline{u}_{11}, \overline{u}_{12}, \overline{u}_{13} \rangle = \left\langle \overline{2-3/X^3+4/X^4},\ \overline{3-\tfrac{6X+3}{X^2+1}},\ \overline{4+1/X} \right\rangle = \langle 2,\ 3,\ 4 \rangle \ \text{ und}$$
$$\overline{\rho}^{(2)} = \langle \overline{u}_{21} \rangle = \left\langle \overline{1-\tfrac{3}{X^2}} \right\rangle = \langle 1 \rangle \ \text{ und}$$
$$\overline{\rho}^{(3)} = \langle \overline{u}_{31}, \overline{u}_{32} \rangle = \left\langle \overline{-2},\ \overline{1+2/X-1/X^2} \right\rangle = \langle -2,\ 1 \rangle\,.$$

Bemerkung: Wie man an diesem Beispiel sieht und sich aber auch anhand der allgemeinen Definition der Restklassenformen leicht überlegt, gilt für $K = \mathbb{R}(X)$, $v = v_\infty$ und für eine reguläre Form $\rho = \langle p_1, \ldots, p_r \rangle$ mit $p_i \in \mathbb{R}[X]$, also für eine Form die nur aus Polynomen besteht, dass eine Restklassenform vom Grad $2m$ gerade aus den Leitkoeffizienten der p_i's mit gleichem Grad modulo $2m$ besteht.
Dies gilt genauso analog für die Komplettierung $\mathbb{R}\left(\left(\frac{1}{X}\right)\right)$ von $(R(X), v_\infty)$.

In diesem Fall erhält man die Restklassenformen sofort und ganz einfach ohne irgendwelches Rechnen. So sind zum Beispiel die Restklassenformen vom Grad 4 (m=2) der Form

$$\rho = \left\langle 3X^5-2.7X^4+X,\ 5.4X^2-11,\ 0.245X^{13}+21X^7-8X^4,\ 12X^3-2.6X^2,\ -X^6+21X^5-2.7X \right\rangle$$

gerade

$$\overline{\rho}^{(1)} = \langle 5.4, -1 \rangle\,,\ \overline{\rho}^{(2)} = \langle 3,\ 0.245 \rangle \ \text{ und } \overline{\rho}^{(3)} = \langle 12 \rangle\,.$$

Des weiteren gibt es ganz allgemein für alle Formen über einem bewerteten Körper, dessen Bewertung v nach $\mathbb{Z}$ abbildet, höchstens $2m$ Restklassenformen vom Grad $2m$ über $\overline{K}_v$.

4.3 Weitere Vereinfachung des Charakterisierungssatzes II

Nachdem wir nun den Begriff der Restklassenformen eingeführt und uns mit ihnen vertraut gemacht haben, kommen wir zu dem schon im Vorfeld angesprochenen Satz, der eine weitere Vereinfachung des Charakterisierungssatz II für $A = \mathbb{R}[X]$ (Satz 4.1) liefert. Bei dem Satz handelt es sich um eine Verallgemeinerung eines Satzes von Alexander Prestel (siehe [E-P] 6.3.4). Diesen Satz verallgemeinern wir, ebenso wie die Restklassenformen vorher, von Grad 2 auf einen beliebigen Grad $2m$.
Wie die Restklassenformen werden wir auch diesen Satz ganz allgemein für einen beliebigen Körper K formulieren und beweisen.

Satz 4.2:
Sei (K,v) ein henselscher Körper mit nicht-trivialer Bewertung v und $\operatorname{char} \overline{K}_v \neq 2$.

Dann ist eine reguläre Form ρ genau dann $2m$-isotrop über K, wenn mindestens eine der Restklassenformen vom Grad $2m$ von ρ $2m$-isotrop über $\overline{K}_v$ ist.
Wenn $\overline{K}_v$ reell ist, gilt die Aussage auch analog für schwache $2m$-Isotropie.

Beweis: "$\Rightarrow$": Sei ρ $2m$-isotrop.
ρ ist als Form vom Grad $2m$ isomorph zu der Summe $c_1 \langle u_{11}, \ldots, u_{1r_1} \rangle \perp \ldots \perp c_k \langle u_{k1}, \ldots, u_{kr_k} \rangle$, wobei k, r_i $(1 \leq i \leq k)$, c_i und u_{ij} $(1 \leq j \leq r_i)$ genau so gewählt wurden wie in Abschnitt 4.2.
Also existieren $x_{ij} \in K$, nicht alle 0, mit

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{j=1}^{r_i} u_{ij} x_{ij}^{2m} = 0.$$

Die Menge $\{v(c_i u_{ij} x_{ij}^{2m}) \mid 1 \leq i \leq k,\ 1 \leq j \leq r_i\}$ besitzt ein Minimum, da $c_i, u_{ij} \neq 0$ gilt und mindestens ein x_{ij} ungleich 0 ist.
OBdA sei $v(c_1 u_{11} x_{11}^{2m}) = \min_{i,j} \{v(c_i u_{ij} x_{ij}^{2m})\}$ dieses Minimum.
Das bedeutet $v(c_1 u_{11} x_{11}^{2m}) \leq v(c_i u_{ij} x_{ij}^{2m})$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ und $j \in \{1, \ldots, r_i\}$.
Daraus folgt

$$v(c_1) + 2m \cdot v(x_{11}) \leq v(c_i) + 2m \cdot v(x_{ij}), \tag{4.2.1}$$

da die u_{ij}'s nach Konstruktion in $\mathcal{O}_v^\times$ liegen. Für $i \neq 1$ gilt sogar

$$v(c_1) + 2m \cdot v(x_{11}) < v(c_i) + 2m \cdot v(x_{ij}), \tag{4.2.2}$$

denn angenommen es würde Gleichheit gelten, würde daraus
$v(c_1) - v(c_i) = 2m \cdot [v(x_{ij}) - v(x_{11})]$ folgen, was ein Widerspruch zur Wahl der c_i's wäre.
Wir teilen die obige Gleichung durch $c_1 x_{11}^{2m}$ und erhalten dann

$$\sum_{j=1}^{r_1} u_{1j} \left(\frac{x_{1j}}{x_{11}}\right)^{2m} + \sum_{i=2}^{k} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{c_i}{c_1} u_{ij} \left(\frac{x_{ij}}{x_{11}}\right)^{2m} = 0. \tag{4.2.3}$$

Aus (4.2.1) folgt mit $i = 1$ und $v(u_{1j}) = 0$, dass
$v\left(u_{1j} \left(\frac{x_{1j}}{x_{11}}\right)^{2m}\right) \geq 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, r_1\}$ gilt.
Also gilt $v\left(u_{1j} \left(\frac{x_{1j}}{x_{11}}\right)^{2m}\right) \in \mathcal{O}_v$ für alle $j \in \{1, \ldots, r_1\}$.
Aus (4.2.2) folgt mit $v(u_{ij}) = 0$, dass
$v\left(\frac{c_i}{c_1} u_{ij} \left(\frac{x_{ij}}{x_{11}}\right)^{2m}\right) > 0$ für $2 \leq i \leq k$ und alle $j \in \{1, \ldots, r_1\}$ gilt.
Also gilt $v\left(\frac{c_i}{c_1} u_{ij} \left(\frac{x_{ij}}{x_{11}}\right)^{2m}\right) \in \mathfrak{m}_v \subseteq \mathcal{O}_v$ für alle $2 \leq i \leq k$ und alle $j \in \{1, \ldots, r_1\}$.

Wir können also Gleichung (4.2.3) im Restklassenkörper $\overline{K}_v = \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$ betrachten und erhalten dann

$$\sum_{j=1}^{r_1} \overline{u}_{1j} \overline{\left(\frac{x_{1j}}{x_{11}}\right)}^{2m} = 0.$$

Wegen $\overline{\left(\frac{x_{11}}{x_{11}}\right)} = 1$, sind nicht alle $\overline{\left(\frac{x_{1j}}{x_{11}}\right)}$ gleich 0 und somit ist die Restklassenform $\overline{\rho}^{(1)} = \langle \overline{u}_{11}, \ldots, \overline{u}_{1r_1} \rangle$ $2m$-isotrop über $\overline{K}_v$.
"$\Leftarrow$": Sei eine der Restklassenformen $\overline{\rho}^{(i)}$ von ρ $2m$-isotrop über $\overline{K}_v$, zum Beispiel $\overline{\rho}^{(1)}$.
Das bedeutet

$$\sum_{j=1}^{r_1} \overline{u}_{1j} \overline{z}_{1j}^{2m} = 0,$$

für gewisse $z_{1j} \in \mathcal{O}_v$, nicht alle 0 in $\overline{K}_v$, also nicht alle in $\mathfrak{m}_v$.
OBdA sei also $z_{11} \in \mathcal{O}_v^\times = \mathcal{O}_v \backslash m_v$.
Dann hat das Polynom

$$f(X) = u_{11} X^{2m} + \sum_{j=2}^{r_1} u_{1j} z_{1j}^{2m}$$

eine einfache Nullstelle in $\overline{K}_v$ (da char $\overline{K}_v \neq 2$ gilt). Nach Hensels Lemma (siehe Satz 1.10) existiert dann ein $z \in K^\times$ mit

$$0 = f(z) = u_{11} z^{2m} + \sum_{j=2}^{r_1} u_{1j} z_{1j}^{2m}.$$

Das bedeutet aber gerade, dass $\langle u_{11}, \ldots, u_{1r_1} \rangle$ $2m$-isotrop ist, und somit auch
$c_1 \langle u_{11}, \ldots, u_{1r_1} \rangle \perp \ldots \perp c_k \langle u_{k1}, \ldots, u_{kr_k} \rangle$.
Diese Form ist isomorph zu ρ und somit ist auch ρ $2m$-isotrop.

Bezüglich schwacher $2m$-Isotropie wenden wir das eben gezeigte einfach auf ein vielfaches $n\rho$ von ρ, für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$, an.
Damit eine Summe von $2m$-ter Potenzen in $\overline{K}_v$ nur dann verschwindet, wenn alle Summanden null sind, brauchen mir dann jedoch die stärkere Vorausetzung, dass $\overline{K}_v$ rell sein muss. □

Da $\mathbb{R}\left(\left(\frac{1}{X}\right)\right)$ nach Satz 1.11 henselsch ist, können wir Satz 4.2 darauf anwenden, und wie bisher schon des Öfteren erwähnt, hat $\mathbb{R}\left(\left(\frac{1}{X}\right)\right)$ den Restklassenkörper $\mathbb{R}$.
Diese beiden Tatsachen ergeben zusammen mit Satz 4.1 eine nochmals vereinfachte Version von eben diesem:

Satz 4.3:
Seien $h_1, \ldots, h_s \in \mathbb{R}[X]$ und sei $M = M^{2m}(h_1, \ldots, h_s)$ ein Modul der Stufe $2m$. Dann ist M genau dann archimedisch, wenn $W_{\mathbb{R}}(h)$ kompakt ist und mindestens eine

der (höchstens 2m-vielen) Restklassenformen vom Grad 2m von $\tau = \langle 1,h_1,\dots,h_s\rangle^*$ *schwach 2m-isotrop über* $\mathbb{R}$ *ist.*

Aus Lemma 2.6 und Satz 2.25 folgt, dass eine Form ρ genau dann schwach $2m$-isotrop über $\mathbb{R}$ ist, wenn ρ indefinit (bezüglich der einzigen Anordnung auf $\mathbb{R}$) ist.
Wenn wir diese Äquivalenz in Satz 4.3 berücksichtigen ergibt sich für den Charakterisierungssatz II für $\mathbb{R}[X]$ eine weitere vereinfachte und nun entgültige Formulierung:

Satz 4.4 (Charakterisierungssatz II für $\mathbb{R}[X]$)**:**
Seien $h_1,\dots,h_s \in \mathbb{R}[X]$ *und sei* $M = M^{2m}(h_1,\dots,h_s)$ *ein Modul der Stufe 2m. Dann ist M genau dann archimedisch, wenn* $W_{\mathbb{R}}(h)$ *kompakt und mindestens eine der (höchstens 2m-vielen) Restklassenformen vom Grad 2m von* $\tau = \langle 1,h_1,\dots,h_s\rangle^*$ *indefinit über* $\mathbb{R}$ *ist.*

Bemerkung 4.5: Dass mindestens eine der Restklassenformen vom Grad $2m$ von $\tau = \langle \underbrace{1}_{=:h_0},h_1,\dots,h_s\rangle^*$ indefinit über $\mathbb{R}$ ist, bedeutet nach dem zuvor in Abschnitt 4.2 gezeigten gerade, dass $i,j \in \{0,\dots,s\}$ mit $\deg h_i \equiv \deg h_j \bmod 2m\mathbb{Z}$ existieren, so dass der Leitkoeffizient von h_i positiv und der von h_j negativ ist.

Zum Abschluss dieses Kapitels schauen wir uns anhand von Satz 4.4 nocheinmal unser Gegenbeispiel aus Kapitel 3 an.
Dort war m=2, $h = 1 - X^2$, $W_{\mathbb{R}}(h)$ kompakt
und somit $\tau = \langle 1,\ h,\ h^2,\ h^3\rangle = \langle 1,\ -X^2+1,\ X^4-2X+1,\ -X^6+3X^4-3X^2+1\rangle$.
Mit den Überlegungen aus Abschnitt 4.2 ergeben sich dann die Restklassenformen (vom Grad 4)
$\rho^{(1)} = \langle 1,1\rangle$ (Leitkoeffizienten der Polynome mit Grad $0 \bmod 4\mathbb{Z}$) und
$\rho^{(2)} = \langle -1,-1\rangle$ (Leitkoeffizienten der Polynome mit Grad $2 \bmod 4\mathbb{Z}$).
Beide Restklassenformen sind nicht indefinit bezüglich $\mathbb{R}$ und somit ist
$M^4(h,h^2,h^3) = T^4(h)$ nicht archimedisch.
Somit folgt für ein $f \in \mathbb{R}[X]$ aus $f > 0$ nicht notwendigerweise schon $f \in T^4(h)$. Dies ist genau das, was wir in Kapitel 3 für $f = X + 2$ gezeigt haben.

5 Zusammenfassung

Zum Schluss dieser Arbeit wollen wir die erzielten Ergebnisse aus Kapitel 2 und 4 zusammenfassen.

Es sei $A = \mathbb{R}[X_1, \ldots ,X_n]$

Für $h_1, \ldots ,h_s \in A$ tragen wir die im Laufe der Arbeit in den verschiedenen Sätzen gefundenen Bedingungen für die Archimedizität von $M = M^{2m}(h_1, \ldots ,h_s)$ beziehungsweise $T = T^{2m}(h_1, \ldots ,h_s)$ zusammen.
Diese Bedingungen sind dann mit Satz 2.17 schon hinreichend dafür, dass für ein beliebiges $f \in A$ mit $f > 0$ auf $W_{\mathbb{R}}(h)$ $f \in M$ beziehungsweise $f \in T$ gilt.

Wir unterscheiden dabei die beiden Fälle $A = \mathbb{R}[X_1, \ldots ,X_n]$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ (Kapitel 2) und $A = \mathbb{R}[X_1]$ (Kapitel 4). In beiden Ringen unterscheiden wir dann nochmal zwischen geradem und ungeradem m.

Sei $A = \mathbb{R}[X_1, \ldots ,X_n]$.
Für $h_1, \ldots ,h_s \in A$ seien $W_{\mathbb{R}}(h)$, $M := M^{2m}(h_1, \ldots ,h_s)$ und $T := T^{2m}(h_1, \ldots ,h_s)$ wie bisher definiert.
$h_1, \ldots ,h_s$ sind so gewählt, dass M und T Moduln der Stufe $2m$ sind.

Sei $f \in A$ mit $f > 0$ auf $W_{\mathbb{R}}(h)$.

(I) $A = \mathbb{R}[X_1, \ldots ,X_n]$ mit $n \geq 1$ beliebig

- m ist ungerade

  $*$ Sei $W_{\mathbb{R}}(h)$ kompakt.
  Dann gilt $f \in T^{2m}(h_1, \ldots ,h_s)$.
  (mit der Verallgemeinerung des Satzes von Schmüdgen 2.31)

  $*$ Sei $W_{\mathbb{R}}(h)$ kompakt und die Form $\langle 1,h_1, \ldots ,h_s\rangle^*$ für alle reellen $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ und alle $v \in \mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p})$ schwach $2m$-isotrop über der Komplettierung $\widehat{(F_{\mathfrak{p}},v)}$.
  Dann gilt $f \in M^{2m}(h_1, \ldots ,h_s)$.
  (mit Charakterisierungssatz II 2.29 und Satz 2.17)

- m ist gerade
  - $*$ Sei $W_{\mathbb{R}}(h)$ kompakt und die Form $\langle\langle 1,h_1,\dots,h_s\rangle\rangle^*$ für alle reellen $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ und alle $v \in \mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p})$ schwach $2m$-isotrop über der Komplettierung $\widehat{(F_\mathfrak{p},v)}$.
    Dann gilt $f \in T^{2m}(h_1,\dots,h_s)$.
    (mit Charakterisierungssatz II 2.29 und Satz 2.17)
  - $*$ Sei $W_{\mathbb{R}}(h)$ kompakt und die Form $\langle 1,h_1,\dots,h_s\rangle^*$ für alle reellen $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ und alle $v \in \mathfrak{R}^1_\infty(\mathfrak{p})$ schwach $2m$-isotrop über der Komplettierung $\widehat{(F_\mathfrak{p},v)}$.
    Dann gilt $f \in M^{2m}(h_1,\dots,h_s)$.
    (mit Charakterisierungssatz II 2.29 und Satz 2.17)

(II) $A = \mathbb{R}[X]$ $(n = 1)$

- m ist ungerade
  - $*$ Sei $W_{\mathbb{R}}(h)$ kompakt.
    Dann gilt $f \in T^{2m}(h_1,\dots,h_s)$.
    (mit der Verallgemeinerung des Satzes von Schmüdgen 2.31)
  - $*$ Sei $W_{\mathbb{R}}(h)$ kompakt und eine der Restklassenformen vom Grad $2m$ von $\langle 1,h_1,\dots,h_s\rangle^*$ indefinit über $\mathbb{R}$.
    Dann gilt $f \in M^{2m}(h_1,\dots,h_s)$.
    (mit Charakterisierungssatz II für $\mathbb{R}[X]$ 4.4 und Satz 2.17)
- m ist gerade
  - $*$ Sei $W_{\mathbb{R}}(h)$ kompakt und eine der Restklassenformen vom Grad $2m$ von $\langle\langle 1,h_1,\dots,h_s\rangle\rangle^*$ indefinit über $\mathbb{R}$
    Dann gilt $f \in T^{2m}(h_1,\dots,h_s)$.
    (mit Charakterisierungssatz II für $\mathbb{R}[X]$ 4.4 und Satz 2.17)
  - $*$ Sei $W_{\mathbb{R}}(h)$ kompakt und eine der Restklassenformen vom Grad $2m$ von $\langle 1,h_1,\dots,h_s\rangle^*$ indefinit über $\mathbb{R}$
    Dann gilt $f \in M^{2m}(h_1,\dots,h_s)$.
    (mit Charakterisierungssatz II für $\mathbb{R}[X]$ 4.4 und Satz 2.17)

6 Literaturverzeichnis

[A] Artin, Emil
Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate
Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar Hamburg, 1926

[B1] Becker, Eberhard
Hereditarily-Pythagorean fields and orderings of higher level
Monografias de Matematicas, Instituto Mat. Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1978

[B2] Becker, Eberhard
Partial orders on a field and valuation rings
Communications in Algebra, Band 7, 1979

[E-P] Engler, Antonio J. und Prestel Alexander
Valued Fields
Springer Monographs in Mathematics, 2005

[H] Hilbert, David
Mathematische Probleme
Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1900

[J] Jacobi, Thomas
Über die Darstellung strikt positiver Polynome auf semialgebraischen Kompakta
Dissertation, Universität Konstanz, 1999

[P-D] Prestel, Alexander und Delzell, Charles
Positive Polynomials
Springer Monographs in Mathematics, 2001

[P] Prestel, Alexander
Reelle Algebra
Vorlesungsskript, Universität Konstanz, Wintersemester 2007/08

[Sch] Schmüdgen, Konrad
The K-moment problem for compact semi-algebraic sets
Mathematische Annalen, 1991

[W] Wörmann, Thorsten
Strikt positive Polynomein der semialgebraischen Geometrie
Dissertation, Universität Dortmund, 1998

Erklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Diplomarbeit mit dem Thema

Summen $2m$-ter Potenzen von reellen Polynomen

selbstständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe. Die Stellen, die aus anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen sind, habe ich in jedem einzelnen Fall durch Angabe der Quelle, auch der benutzten Sekundärliteratur, als Entlehnung kenntlich gemacht.

Die Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

Konstanz, den ____________________

____

(Unterschrift)